الجمهوريّة العربيّة السوريّة
وزارة التّربية والتّعليم

الرّياضيّات

الهندسة

كتاب الطالب

الصَّفُّ الثامن

2025 - 2026 م

طُبِعَ أوّلَ مرّةٍ للعامِ الدّراسيِّ ٢٠١٦ ـ ٢٠١٧ م

المحتوى

الوحدة الأولى متوازيات الأضلاع والانسحاب

انطلاقة نشطة

1. في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، أشر إليها:

① متوازي الأضلاع $ABCD$ يُقرأ أيضاً:

① $ABDC$

② $ADCB$

③ $DCAB$

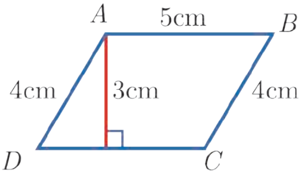
② الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع، فالقطعتان المستقيمتان:

① $[AB]$ و $[CD]$ متناصفتان

② $[AD]$ و $[BC]$ متناصفتان

③ $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتان

③ مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ المرسوم جانباً تساوي:



① $12\ \text{cm}^2$

② $15\ \text{cm}^2$

③ $20\ \text{cm}^2$

④ الرباعي $EFGH$ هو متوازي أضلاع، إذن:

① $EF = HG$ و $EH = FG$

② $EG = HF$

③ $EF = FG$

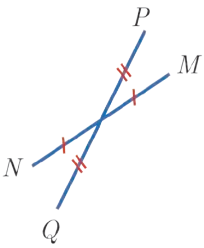
⑤ الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع مركزه O، إذن:

① $OA = OB$

② O هي منتصف $[AB]$

③ O هي مركز تناظر لمتوازي الأضلاع

⑥ القطعتان المستقيمتان $[QP]$ و $[NM]$ متناصفتان، إذن:



① $MNQP$ هو متوازي أضلاع

② $MNPQ$ هو متوازي أضلاع

③ $MPNQ$ هو متوازي أضلاع

⑦ $(FE) \parallel (AB)$ و $(BE) \parallel (AF)$، فالرباعي:

① $AFBE$ هو متوازي أضلاع

② $AEBF$ هو متوازي أضلاع

③ $ABEF$ هو متوازي أضلاع

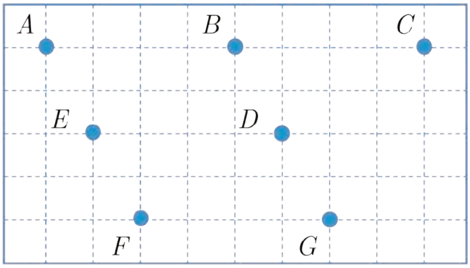
⑧ شكل رباعي محدب فيه ضلعان متقابلان متوازيان ومتساويان. نستنتج أنّ هذا الرباعي هو:

①مستطيل ② معين ③ متوازي أضلاع

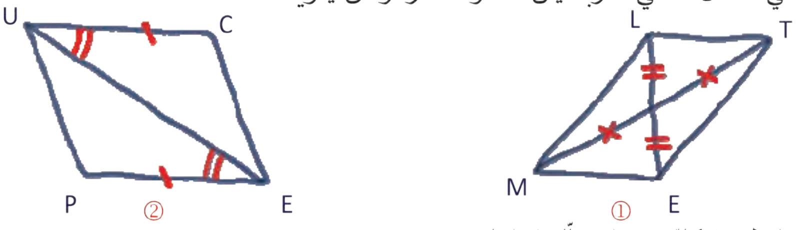
⑨ شكل رباعي محدب $ABCD$ فيه $AB = CD$ و $AD = BC$، نستنتج أنّ هذا الرباعي هو:

①مستطيل ② معين ③ متوازي أضلاع

.2 تأمل الشكل المرافق، ثم سمِّ جميع متوازيات الأضلاع التي تؤخذ رؤوسها من النقاط السبعة.



.3 في الشكل التالي، الرباعيان ① و ② مرسومان يدوياً.



ما طبيعة كلٍّ منهما؟ علِّل إجابتك.

.4 $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ دائرتان متمركزتان في O. $[AB]$ قطرٌ في الدائرة $\mathscr{C}$ و $[CD]$ قطر في الدائرة $\mathscr{C}'$ يحقق $\widehat{AOD} = 30^\circ$.

1) ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات المسألة.

2) أثبت أنَّ الرباعي $ACBD$ هو متوازي أضلاع.

إذا اشتركت دائرتان بمركز واحد، قلنا إنهما متمركزتان.

نرمز للدائرة بالرمز $\mathscr{C}$ وهو الشكل الرسومي للحرف C.

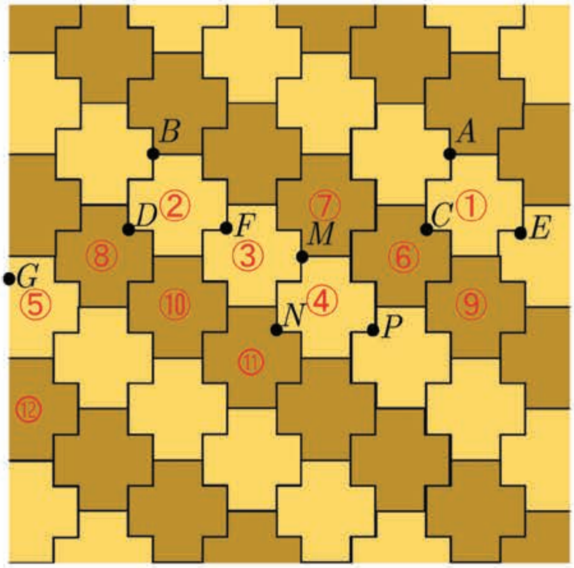
قص الشكل واستعمله في النشاط الآتي

الانسحاب وخواصه

نشاط «نحو مفهوم الانسحاب انطلاقاً من ترصيف»

1. في أحد أرصفة دمشق

الأسئلة الآتية تسمح بطرح مفهوم الانسحاب وفق مستقيم.



1. ضع، على ورقة شفافة، قصاصتي الحجر ① والحجر ②. علِّمْ أيضاً النقاط A و C و E، ثم ارسم المستقيمات (AB) و (CD) و (EF).
2. وفق أية حركة يمكن أن تنتقل قصاصة الحجر ① لتنطبق على قصاصة الحجر ②؟
3. وفق تلك الحركة، ما النقاط التي تنطبق عليها A و C و E؟ وما المواضع التي تشغلها قصاصتا الحجر ④ و الحجر ⑨؟
4. ارسم على ورقة شفافة الشكلين الرباعيين $ABDC$ و $ABFE$. ما طبيعة كلٍّ منهما؟

نقول إنَّ الحجر ② هو صورة الحجر ① وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.

2. انسحاب آخر

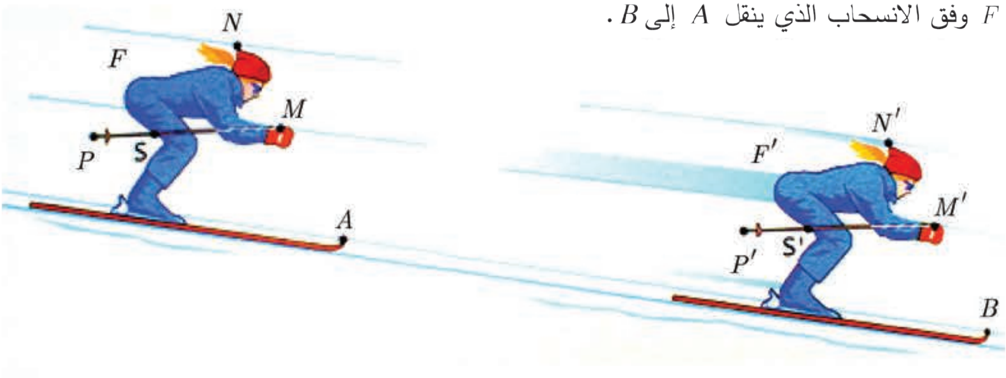
1. هذه المرة، وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة M.

ما صورة الحجر ①؟ وما صورة الحجر ⑥؟ وما صورة كلٍ من النقطتين C و E؟ وأخيراً، ما صورة الحجر ⑦؟

2. هل يوجد انسحاب ينقل الحجر ⑧ إلى الحجر ⑪ إنْ نعم، ما هو؟

تعلّم

عند التزلج من A إلى B، ينطبق الشكل F على الشكل F'. نقول إنَّ الشكل F' هو صورة الشكل F وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.



$(MM') \parallel (AB)$ $\quad$ $(NN') \parallel (AB)$ $\quad$ $MM' = NN' = AB$

خواص الانسحاب

يحافظ الانسحاب على:

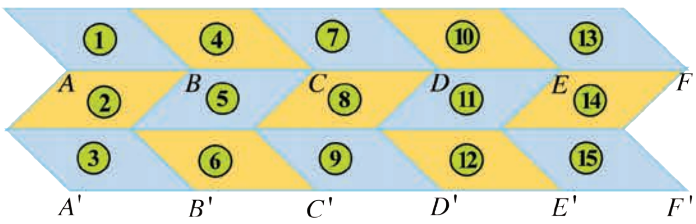
- الأطوال
- الاستقامة
- قياس الزوايا
- المساحات

في الصورة السابقة

- M' و N' و P' و S' هي صور النقاط M و N و P و S وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.
- $M'N' = MN$
- النقاط M و S و P على استقامة واحدة، فالنقاط M' و S' و P' على استقامة واحدة.
- $\widehat{S'M'N'} = \widehat{SMN}$
- مساحة المثلث $S'M'N'$ تساوي مساحة المثلث SMN.

تحقّق من فهمك

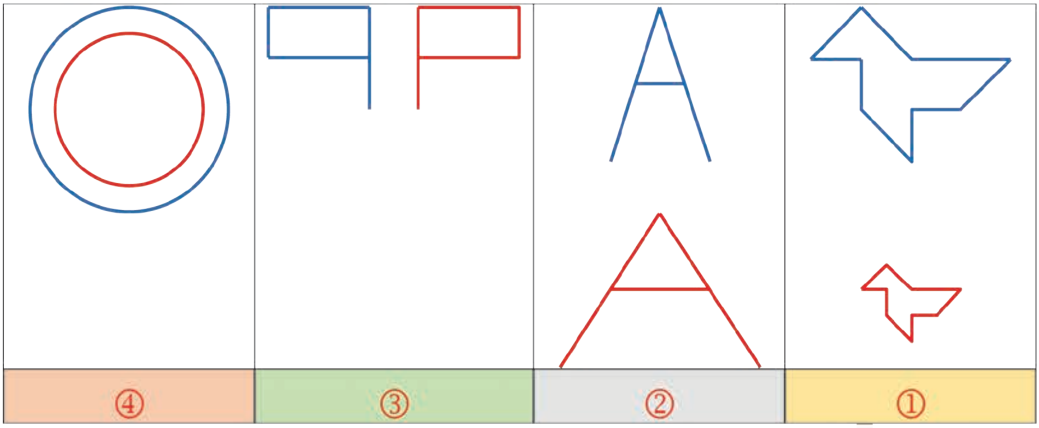
① لدينا في الشكل التالي 15 متوازي أضلاع طبوقة مرقمة من الرقم 1 حتى الرقم 15.



قص الشكل واستعمله في التدرب الآتي

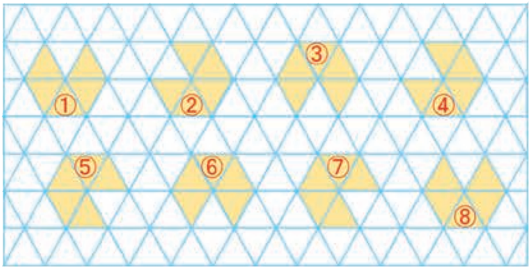
1. ما صورة كل من متوازيي الأضلاع ① و ② وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى D.
2. ما صورة كل من متوازيي الأضلاع ⑮ و ⑪ وفق الانسحاب الذي ينقل F إلى C.
3. ما صورة كل من متوازيي الأضلاع ⑦ و ⑬ وفق الانسحاب الذي ينقل D إلى D'.
4. وفق أي انسحاب ينتقل متوازي الأضلاع ③ إلى متوازي الأضلاع ⑦.
5. وفق أي انسحاب ينتقل متوازي الأضلاع ④ إلى متوازي الأضلاع ⑨.
6. وفق أي انسحاب ينتقل متوازي الأضلاع ⑨ إلى متوازي الأضلاع ⑬.

② اشرح لماذا الشكل الأحمر ليس صورة للشكل الأزرق وفق انسحاب.



تدرّب

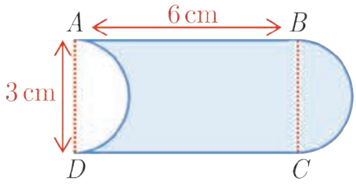
① تأمل الشكل التالي:



دلّ على كل شكل وصورته وفق انسحاب.

② تأمل الشكل المرسوم جانباً.

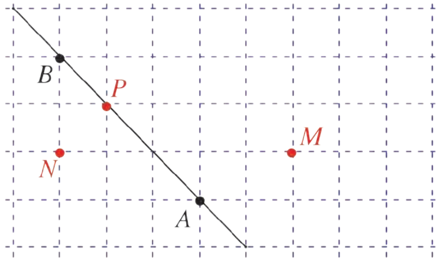
1. ما صورة نصف الدائرة التي قطرها $[BC]$ وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A ؟
2. استنتج مساحة المنطقة الملونة باللون الأزرق



② صورة نقطة وفق انسحاب

نشاط « رسم صورة نقطة وفق انسحاب، باستخدام أدوات هندسية»

.1 على ورقة سنتيمترية



1. انقل الشكل المرافق إلى ورقة سنتيمترية.

وضَعْ النقطة M' التي تجعل الرباعي

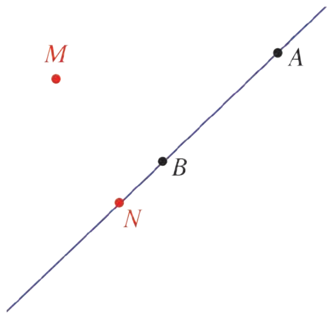
$ABM'M$ متوازي أضلاع.

2. ما صورة النقطة M وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B؟

3. وضَعْ وفق هذا الانسحاب:

① N' صورة النقطة N ② P' صورة النقطة P

.2 على ورقة بيضاء



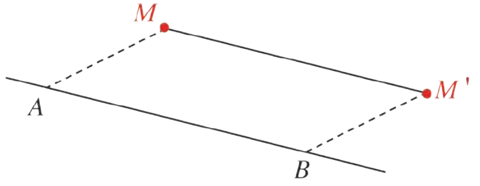
1. انقل الشكل المرافق إلى ورقة بيضاء.

2. ليكن T الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.

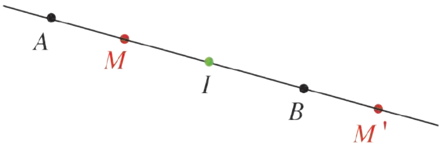
وفق هذا الانسحاب، استعمل الأدوات الهندسية لرسم النقطة M' صورة النقطة M، والنقطة N' صورة النقطة N. اشرح العمل الذي قمت به.

تعلّم

تعريف:



القول إنَّ « النقطة M' هي صورة النقطة M التي **لا تنتمي** إلى المستقيم (AB)، وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B » يعني أنَّ « الرباعي $ABM'M$ متوازي أضلاع » ويترتب على ذلك أنَّ القطعتين $[AM']$ و $[BM]$ متناصفتان.



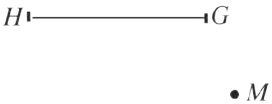
حالة خاصة:

في حالة النقطة M **تنتمي** إلى المستقيم (AB)،
تكون النقاط A و B و M' و M على استقامة واحدة، وتكون القطعتان $[AM']$ و $[BM]$ متناصفتين.

اكتســاب معــارف

كيف نرسم صورة نقطة؟

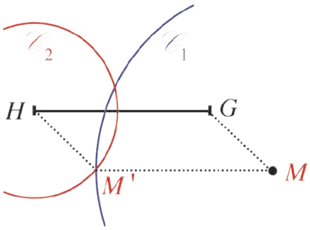
مثال



ارسمْ (مستخدماً الفرجار فقط) النقطة M' صورة النقطة M وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة G إلى النقطة H.

تذكَّرْ: في الإنشاء الهندسي، نستخدم فقط فرجاراً ومسطرةً غير مدرجة.

طريقة الانشاء



- لنكمل HGM إلى متوازي أضلاع $HGMM'$.
- نرسم الدائرة $\mathscr{C}_1$ التي مركزها M و نصف قطرها يساوي GH (فتحة الفرجار)
- نرسم الدائرة $\mathscr{C}_2$ التي مركزها H و نصف قطرها يساوي GM (فتحة الفرجار)
- تتقاطع الدائرتان في نقطتين. نختار النقطة التي تكمل HGM إلى رباعي. فتكون هي النقطة M' صورة النقطة M.

التعليل:

$MM' = GH$ (نصف قطر الدائرة $\mathscr{C}_1$)

$HM' = GM$ (نصف قطر الدائرة $\mathscr{C}_2$)

فالرباعي $HGMM'$ متوازي أضلاع، ويترتب على ذلك أنَّ M' هي صورة M.

تحقّق من فهمك

في كلٍ من الحالتين الآتيتين، ارسم الشكل الموافق ثم أكمل العبارتين الآتيتين:

1. N هي صورة M وفق الانسحاب الذي ينقل P إلى Q والنقطة M لا تقع على (PQ)، إذن .... هو متوازي أضلاع.
2. وفق الانسحاب الذي ينقل J إلى K، R هي صورة T والنقطة T لا تقع على (JK)، إذن .... هو متوازي أضلاع.

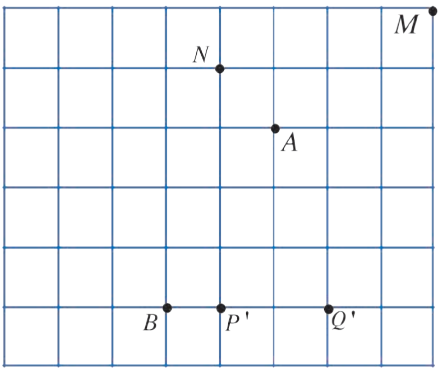
تدرّب

① ارسم مثلثاً ABC، ثم ارسم باستعمال الفرجار:

1. النقطة E، صورة A وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى C.
2. النقطة F، صورة E وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى A.
3. النقطة G، صورة F وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

② ارسم متوازيَ أضلاعٍ $ABCD$ مركزه M، ثم انقل العبارات الآتية إلى دفترك وأكملها:

1. صورة النقطة D وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B هي ...
2. وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى ... ، A هي صورة D.
3. وفق الانسحاب الذي ينقل M إلى A، ... هي صورة C.



③ انسخ الشبكة الآتية على صفحةٍ من دفترك:

1. وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B:
   ① وضِّعْ M' صورة M.
   ② وضِّعْ M'' صورة M'.
   ③ وضِّعْ N' صورة N.
2. وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A، وضِّعْ N'' صورة N'.
3. P' هي صورة P وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B. وضِّعْ النقطة P.
4. Q' هي صورة Q وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A. وضِّعْ النقطة Q.

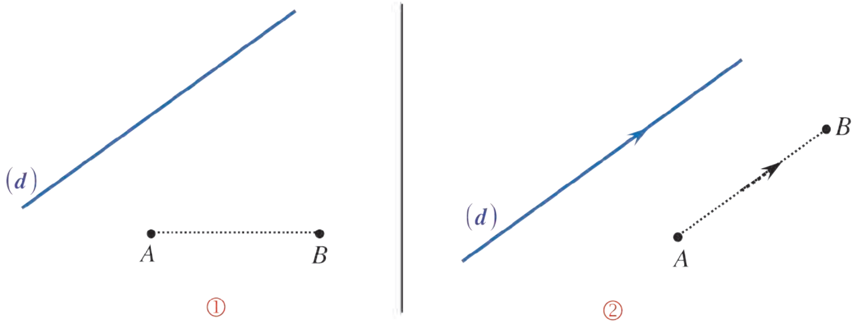
3 صورة شكل وفق انسحاب

نشاط « رسم صورة مستقيم وفق انسحاب باستعمال أدوات هندسية، وإثبات أنَّ المستقيم وصورته متوازيان»

وفق الانسحاب، أي شكل وصورته قابلان للانطباق، فصورة مستقيم هي مستقيم.

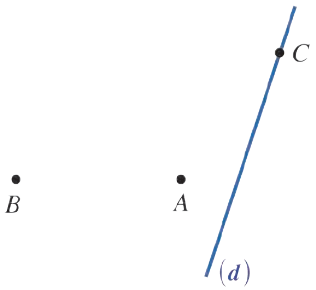
1. تخمين

1. انقل الشكلين التاليين ① و ② إلى صفحة بيضاء. وفي كل حالة، ارسم (d') صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.



2. ما وضع المستقيمين (d) و (d') في كل حالة؟

2. إثبات: حالة (d) و (AB) غير متوازيين



1. انقل الشكل المرافق إلى صفحة بيضاء، ووضّعْ E نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (AB).

2. ارسم، وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B:

C' صورة النقطة C من (d) و E' صورة E.

3. لماذا النقطة E' واقعة على المستقيم (AB)؟

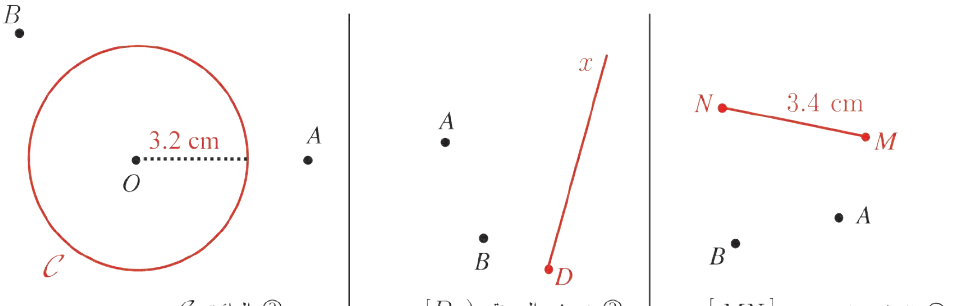
4. لماذا الرباعي $CC'E'E$ هو متوازي أضلاع؟

5. استنتج أنَّ المستقيم (d) وصورته $(C'E')$ متوازيان.

في الرياضيات، وبشكلٍ خاص في الهندسة، لا يجوز استنتاج الإجابة من الشكل، بل يجب أن تتم الإجابة بالبرهان عبر سلسلة من الاستنتاجات.

3. صورة: قطعة مستقيمة، نصف مستقيم، دائرة

انقل الأشكال ① و ② و ③ إلى صفحة بيضاء. وفي كل حالة، ارسم الشكل وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.



① القطعة المستقيمة $[MN]$ ② نصف المستقيم $[Dx)$ ③ الدائرة $\mathcal{C}$

تعلّم

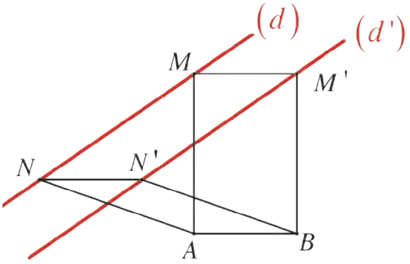
صورة مستقيم

صورة مستقيم (d) وفق أي انسحاب هي مستقيم (d') يوازي (d).

إنشاء صورة مستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B

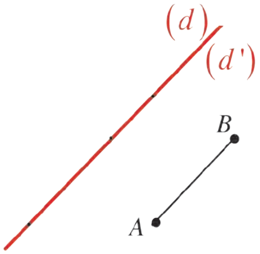
أولاً: حالة (d) لا يوازي (AB):

نختار نقطتين M و N من المستقيم (d) ونرسم صورتيهما M' و N' وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B. فيكون المستقيم (d') المار بالنقطتين M' و N' صورة (d).



ثانياً: حالة (d) يوازي (AB):

في هذه الحالة، ينطبق المستقيم (d) على المستقيم (d')

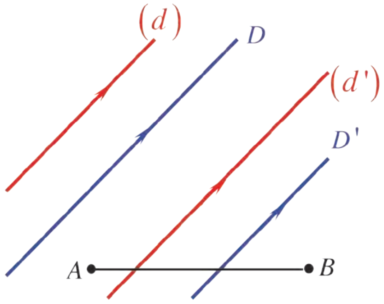


وفق انسحاب:

- صورتا مستقيمين متوازيين، هما مستقيمان متوازيان.
- صورتا مستقيمين متعامدين، هما مستقيمان متعامدان.

في الشكل $\boxed{1}$:

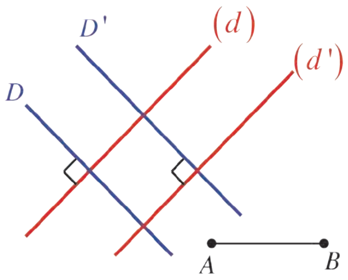
المستقيمان المتوازيان (d') و D' هما على التوالي صورتا المستقيمين المتوازيين (d) و D وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.



1

في الشكل $\boxed{2}$:

المستقيمان المتعامدان (d') و D' هما على التوالي صورتا المستقيمين المتعامدين (d) و D وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

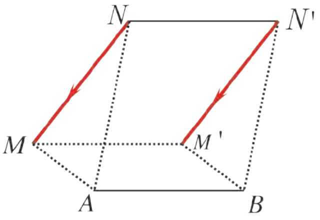


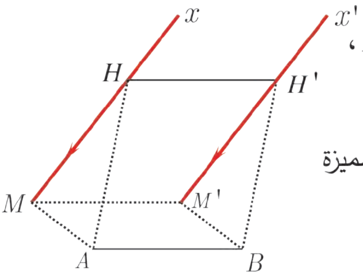
2

صورة: قطعة مستقيمة، نصف مستقيم، دائرة

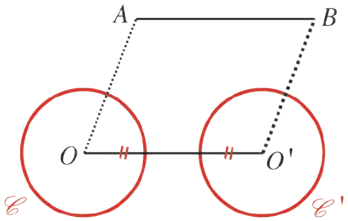
صورة قطعة مستقيمة $[MN]$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، هي قطعة مستقيمة $[M'N']$ توازي $[MN]$.

(M' و N' هما على التوالي صورتا M و N)





صورة نصف مستقيم $[Mx)$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، هي نصف مستقيم $[M'x')$ يوازي $[Mx)$.
(M' هي صورة M و H' هي صورة H، حيث H نقطة غير مميزة من نصف المستقيم $[Mx)$).



صورة دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O، وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، هي دائرة $\mathscr{C}'$ مركزها O' هو صورة O وفق هذا الانسحاب، ونصف قطرها يساوي نصف قطر $\mathscr{C}$.

وفق انسحاب:

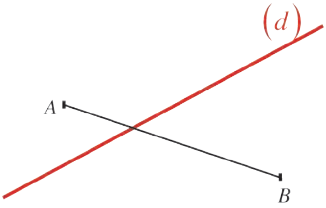
- صورة مستطيل F هي مستطيل يطابق F.
- صورة مثلث $\mathcal{R}$ هي مثلث يطابق $\mathcal{R}$.

اكتســاب معــارف

كيف نرسم صورة مستقيم وفق انسحاب؟

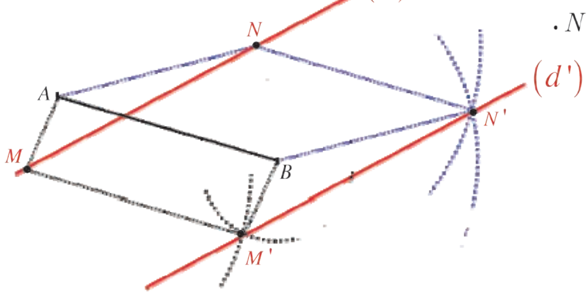
لرسم صورة مستقيم وفق انسحاب، نرسم صورتي نقطتين منه (باستعمال الفرجار)، ثم نرسم المستقيم المار بهاتين النقطتين.

مثال



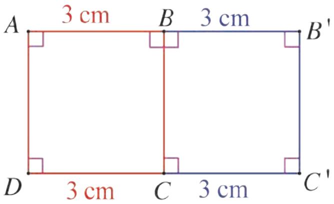
انقل الشكل المرافق إلى ورقة بيضاء، ثم ارسم المستقيم (d') صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.

الحلّ



- نضع على المستقيم (d) النقطتين M و N.
- نرسم M' و N' صورتي M و N باستعمال الفرجار.
- نرسم، المستقيم $(M'N')$، وهو المستقيم المطلوب (d').

كيف نستعمل خواص الانسحاب في إنشاءٍ هندسي؟



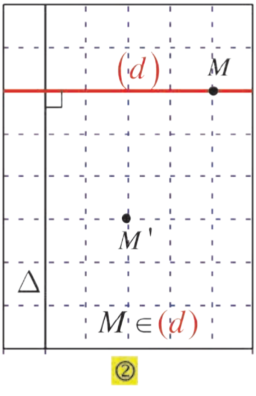
مثال $ABCD$ مربع طول ضلعه $3\ \text{cm}$. ارسم هذا المربع على صفحة بيضاء، ثم ارسم صورته وفق الانسحاب الذي ينقل D إلى C. تحقق مما أنشأت.

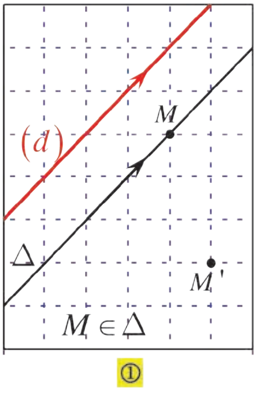
الحل وفق هذا الانسحاب:

- صورة النقطة A هي النقطة B وصورة النقطة D هي النقطة C. فصورة القطعة $[AD]$ هي $[BC]$.
- نرمز إلى صورة B بالرمز B' وإلى صورة C بالرمز C'.
- الانسحاب يحافظ على الزوايا و $\widehat{BAD} = 90°$، إذن $\widehat{B'BC} = 90°$.
  كما أنَّ $\widehat{ADC} = 90°$، إذن $\widehat{BCC'} = 90°$.
- الانسحاب يحافظ على الأطوال و $AB = DC = 3\ \text{cm}$، إذن $BB' = CC' = 3\ \text{cm}$.
  بهذا يكون المربع $BB'C'C$ صورة المربع $ABCD$ وفق هذا الانسحاب.

تحقّق من فهمك

انقل الشكلين ① و ② إلى دفترك، وعلى كلٍ منهما:

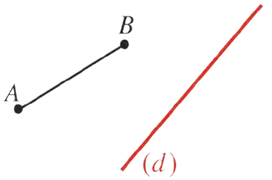




1. ارسم صورتي المستقيمين (d) و Δ. وفق انسحاب من M إلى M'.
2. أكمل كلاً من العبارتين الآتيتين:
   ① صورتا مستقيمين متوازيين وفق أي انسحاب هما ....
   ② صورتا مستقيمين متعامدين وفق أي انسحاب هما ....

تدرّب

① تأمل الشكل المرسوم جانباً:



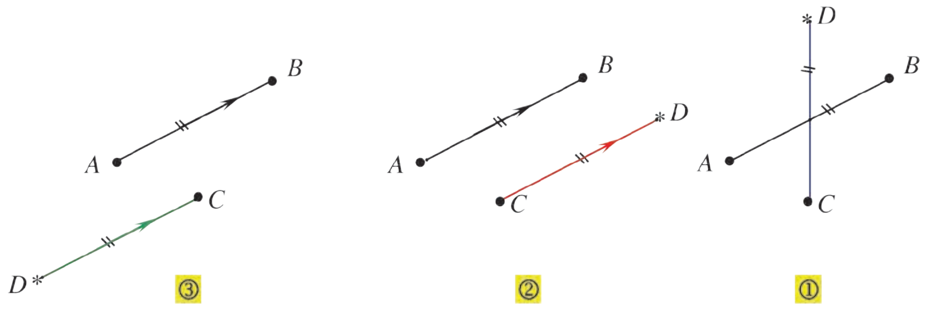
1. انقل الشكل إلى دفترك.
2. استعمل فرجاراً ومسطرةً غير مدرجة لرسم (d') صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.
3. ارسم $(d")$ صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A.
4. ما يمكن قوله بما يتعلق بالمستقيمين (d') و $(d")$؟

② ABC مثلث قائم الزاوية في B، فيه $BA = 4\text{ cm}$ و $BC = 6\text{ cm}$.

1. ارسم هذا المثلث مستعملاً الفرجار ومسطرة غير مدرجة.
2. وضِّعْ النقطة E على الضلع $[BA]$ بحيث يكون $BE = 2\text{ cm}$.
3. ارسم صورة القطعة $[EB]$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى C وسمِّها $[E'B']$.
4. اشرح ما يمكنك قوله بما يتعلق بالمستقيمين (AB) و $(E'B')$.
5. ما طول القطعة $[E'B']$؟ اشرح إجابتك.

③ ارسم مستطيلاً $ABCD$ بعداه $AB = 3\text{ cm}$ و $AD = 2\text{ cm}$، ثم ارسم صورة هذا المستطيل وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A. اشرح خطوات عملك.

④ رسم كل من عدنان وغسان وكنان النقطة D، صورة النقطة C وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A. مستعملين الطول نفسه للقطعة $[CD]$.

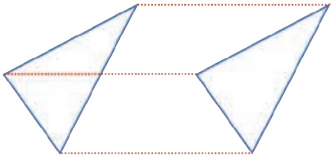


فإذا كان غسان الوحيد الذي رسم D بشكلٍ صحيح:

1. أي الأشكال الثلاثة هو رسمه؟
2. ما الخطأ في كلٍ من الشكلين الآخرين؟

تطابق المثلثات

نشاط « اكتشاف حالات تطابق المثلثات انطلاقاً من الانسحاب»

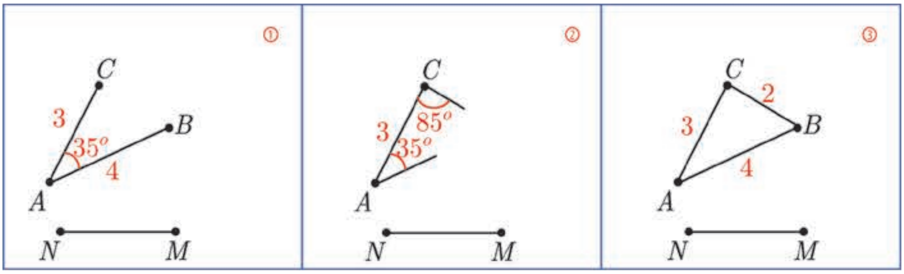


وفق الانسحاب، أي شكل وصورته قابلان للانطباق،

فصورة مثلث هي مثلث يطابقه.

1. حالات تطابق مثلثين.

انقل الأشكال ① و ② و ③ إلى صفحة بيضاء. وفي كل حالة، ارسم صورة الشكل وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة N إلى النقطة M.



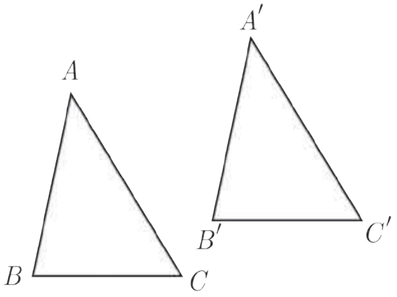
2. في كل من الحالتين ① و ② أكمل الشكل لتحصل على المثلث ABC ثم أكمل صورة هذا المثلث.

3. في كل من الحالات ① و ② و ③ ما صورة المثلث ABC ؟ ولماذا.

4. إذن هل يمكنك ذكر الحالات التي يمكن من خلالها أن تحصل على مثلث يطابق مثلثاً معلوماً؟

تعلّم

تعريف



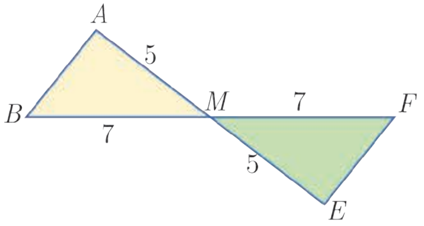
يتطابق مثلثان إذا تساوت عناصر أحدهما مع العناصر المقابلة لها في المثلث الآخر.

عناصر المثلث هي أضلاعه وزواياه.

حالات تطابق مثلثين

① يتطابق مثلثان في حال تساوي طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما من المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.

مثال



في الشكل المجاور:

نلاحظ أن $\widehat{EMF} = \widehat{AMB}$ للتقابل بالرأس

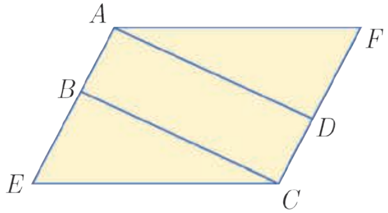
وكذلك $BM = MF = 7$ و $AM = ME = 5$

فالمثلثان AMB , EMF طبوقان لتساوي طولي ضلعين

وقياس الزاوية المحصورة بينهما من المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.

② **يتطابق مثلثان في حال تساوي طول ضلع وقياسي الزاويتين المجاورتين لها من المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.**

مثال



$AECF$ متوازي أضلاع و $ABCD$ مستطيل.

$AB = DC$ لتساوي كل ضلعين متقابلتين في المستطيل.

$FD = BE$ لأن كلاً منهما هو طول ضلع متوازي أضلاع

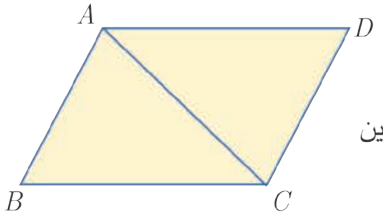
مطروحاً منه طول ضلع مستطيل وهاتان الضلعان متقابلتان.

$\widehat{F} = \widehat{E}$ لتساوي كل زاويتين متقابلتين في متوازي أضلاع.

وكذلك $\widehat{CBE} = \widehat{FDA} = 90^o$. فالمثلثان FDA, BEC طبوقان لتساوي طول ضلع وقياسي الزاويتين المجاورتين لها من المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.

③ **يتطابق مثلثان في حال تساوي أطوال أضلاع أحدهما مع مقابلاتها في المثلث الآخر.**

مثال



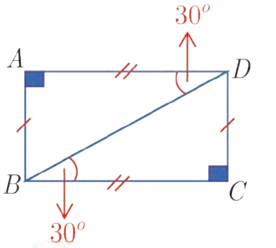
$ABCD$ متوازي أضلاع.

$[AC]$ ضلع مشتركة للمثلثين ACD, ACB.

وكذلك $AB = CD$ و $AD = BC$ لتساوي كل ضلعين متقابلتين في متوازي الأضلاع.

فالمثلثان ACD, ACB طبوقان لتساوي أطوال أضلاع المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.

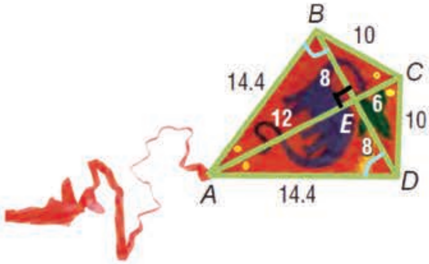
تحقّق من فهمك



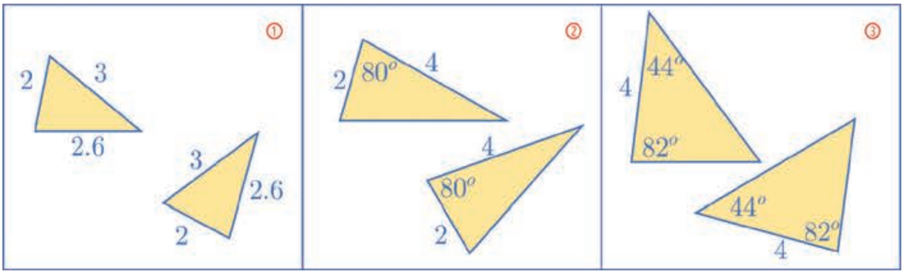
في الشكل المجاور: باستعمال كلّ من حالات التطابق السابقة، برهن أن المثلثين طبوقان.

تدرّب

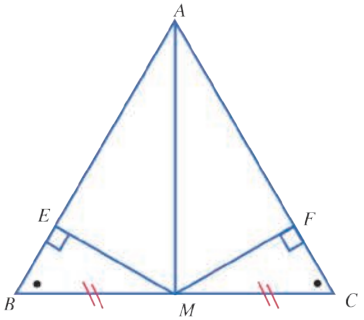
① لاحظ الطائرة الورقية، هل يمكنك تحديد أزواج المثلثات الطبوقة في هذا الشكل.



② في كلّ حالة، علل تطابق المثلثين



③ تأمّل الشّكل المرسوم جانباً. فيه $\widehat{B} = \widehat{C}$ و $BM = MC$



1- أثبت أنَّ المُثلّثين MFC ، MEB طبوقان.

2- أثبت أنَّ المُثلّثين MFA ، MEA طبوقان.

3- استنتج صحة الخاصة "إذا تساوى قياسا زاويتين في مثلث كان المثلث متساوي الساقين".

4- استنتج أن (AM) ارتفاع في المثلث ABC وأن (AM) منصف للزاوية A .

سوف تتعلم في الوحدة الثالثة خواص يتمتع بها الارتفاع المتعلق بالقاعدة في المثلث المتساوي الساقين.

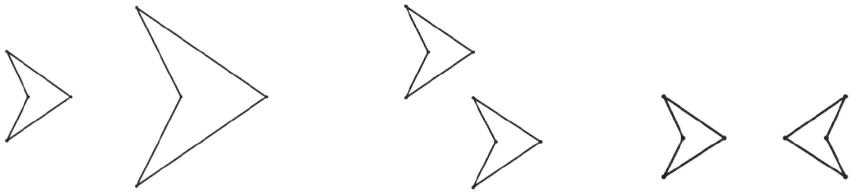
يتطابق مثلثان قائمان في الحالتين الآتيتين:

- إذا تساوى وتر وضلع قائمة من أحدهما مع وتر وضلع قائمة من الآخر.
- إذا تساوى وتر وزاوية حادة من أحدهما مع وتر وزاوية حادة من الآخر.

تمرينات ومسائل

1 لكلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات. أشر إليها.

❶ نجد الشكل وصورته وفق انسحاب في الحالة:



① ② ③

❷ P نقطة غير واقعة على المستقيم (RS)، Q هي صورة P وفق الانسحاب الذي ينقل R إلى S.

إذن:

① $RSPQ$ هو متوازي أضلاع. ② $PQRS$ هو متوازي أضلاع. ③ $RSQP$ هو متوازي أضلاع.

❸ $MNPQ$ متوازي أضلاع، فوفق الانسحاب الذي ينقل M إلى Q:

① P هي صورة Q ② صورة P هي N ③ P هي صورة N.

❹ مساحة شكلٍ F تساوي $15\ \text{cm}^2$، فمساحة F' صورة هذا الشكل وفق انسحابٍ:

① غير معلومة ② تساوي $30\ \text{cm}^2$ ③ تساوي $15\ \text{cm}^2$.

❺ ABC مثلث قائم، فصورته، وفق أي انسحاب، هي:

① مثلث كيفي ② مثلث متساوي الأضلاع ③ مثلث قائم.

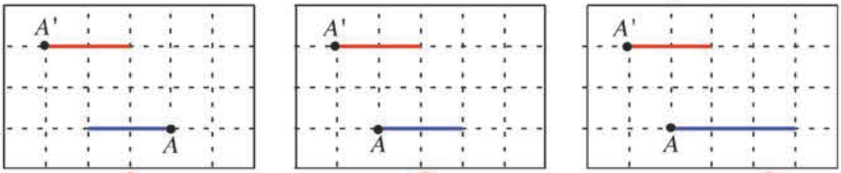
❻ المستقيمان (d) و (AB) غير متوازيين، فصورة (d)، وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، هي مستقيم:

① يوازي (d) ② يوازي (AB) ③ يمر بالنقطة B.

❼ (d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A، وصورتاهما، وفق انسحابٍ r، هما مستقيمان متقاطعان في B، إذن r هو:

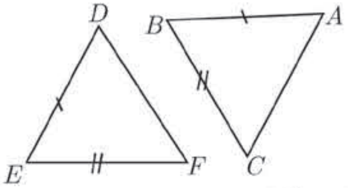
① الانسحاب الذي ينقل A إلى B. ② أي انسحاب ③ الانسحاب الذي ينقل B إلى A.

❽ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى A'، تكون القطعة المستقيمة الملونة باللون الأحمر صورة القطعة الملونة باللون الأزرق في الشكل:



③ ② ①

❾ في الشكل المجاور. ABC , DEF مثلثان طبوقان، عندئذ



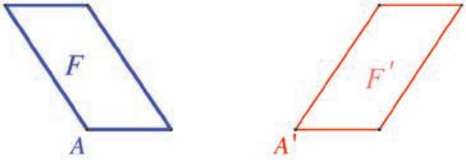
① $\widehat{A}=\widehat{E}$ ② $\widehat{A}=\widehat{F}$ ③ $\widehat{A}=\widehat{D}$.

❿ الدائرة $\mathscr{C}'$ هي صورة الدائرة $\mathscr{C}$ وفق انسحاب، فالدائرتان $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$:

① نصفا قطريهما متساويان ② نصف قطر $\mathscr{C}'$ ضعفي نصف قطر $\mathscr{C}$ ③ نصف قطر $\mathscr{C}$ ضعفي نصف قطر $\mathscr{C}'$

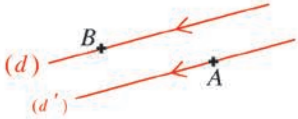
2 هل أنت موافق أم لا على ما يرد في النصوص الآتية؟ اشرح إجابتك.

❶ الشكل F' هو صورة الشكل F وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى A'.



❷ $ABCD$ متوازي أضلاع، إذن: وفق الانسحاب نفسه، تنتقل B إلى A و D إلى C.

❸ في الشكل المرافق، المستقيم (d') هو صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.



❹ (d) و (d') متوازيان. انسحاب واحد فقط ينقل (d) إلى (d').

❺ (d) و (d') مستقيمان متقاطعان. لا يوجد أي انسحاب ينقل (d) إلى (d').

❻ المستقيم (BM') هو صورة المستقيم (AM) وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

إذن M' هي صورة M وفق هذا الانسحاب.

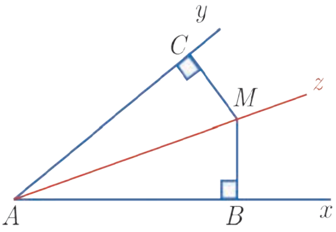
❼ القطعة المستقيمة $[BM']$ هي صورة القطعة $[AM]$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B،

إذن M' هي صورة M وفق هذا الانسحاب.

❽ $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ دائرتان نصفا قطريهما متساويان. انسحاب واحد فقط ينقل $\mathscr{C}$ إلى $\mathscr{C}'$.

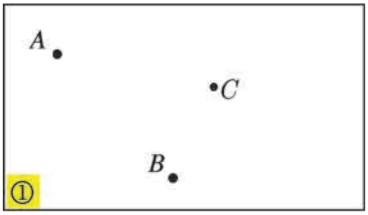
❾ B هي صورة A وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى A، إذن B هي نظيرة C بالنسبة إلى A

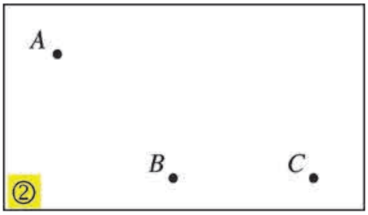
3 في الشكل المجاور، $\widehat{xAz}=\widehat{yAz}$.



1. أثبت أنّ المثلثين AMC, ABM طبوقان.
2. استنتج أنّ $CM = MB$.

4 في كلٍّ من الشكلين ① و ② ثلاث نقاط A و B و C.





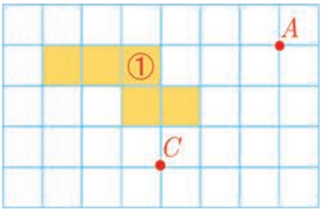
انقل الشكل إلى صفحة بيضاء وأكمل في كل حالة متوازي الأضلاع $ABCD$.

5 AOB مثلث متساوي الساقين في O. والنقطتان C و D هما نظيرتا A و B على التوالي.

1. ارسم شكلاً يحقق معطيات المسألة.
2. أثبت أنَّ الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع.

نقول إنَّ المثلث AOB متساوي الساقين في O، عندما تكون O نقطة تقاطع ضلعيه المتساويتين.

6 تأمَّل الشكل المرسوم جانباً:



1. انقل هذا الشكل إلى صفحة سنتيمترية.
2. ارسم صورة الشكل ① ولتكن الشكل ② وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى C.
3. استعمل الانسحاب ذاته لرسم صورة الشكل ② وارمز لهذه الصورة بالرمز ③.
4. ممَّ تكون قد تحققت؟

7 في معلمٍ متجانس:

1. ضَعْ النقاط $A(-2,0)$ و $B(2,3)$ و $M(4,1)$.
2. ضَعْ صورة النقطة M واكتب إحداثييها:

① وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

② وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A.

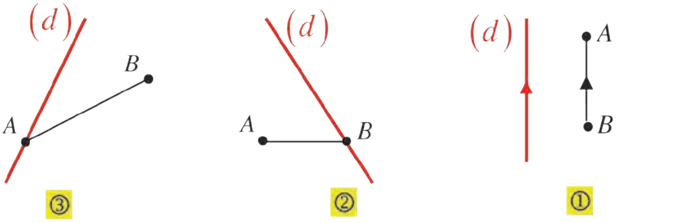
8 REC مثلث قائم الزاوية في R .

النقطة A هي صورة E وفق الانسحاب الذي ينقل R إلى C.

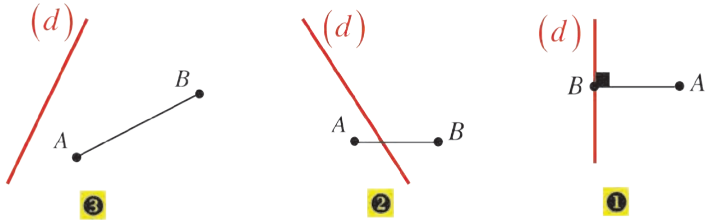
1. ارسم شكلاً متّفقاً مع معطيات المسألة.
2. ما طبيعة الرباعي $REAC$ ؟ اشرح إجابتك.
3. وازن بين طولي $[EC]$ و $[RA]$. اشرح إجابتك.

9 ارسم، في كلّ حالة، صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B .

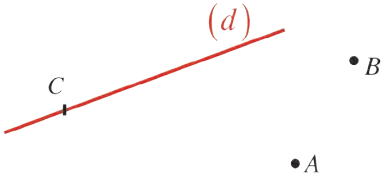
(1



(2

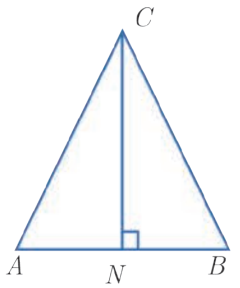


10 في الشكل المرسوم جانباً، C نقطة من المستقيم (d)



1. انقل هذا الشكل إلى دفترك.
2. ارسم C' صورة النقطة C وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A .
3. باستعمال الفرجار والمسطرة، ارسم (d') صورة المستقيم (d) وفق ذلك الانسحاب. اشرح عملك.

11 مع مثلث متساوي الساقين



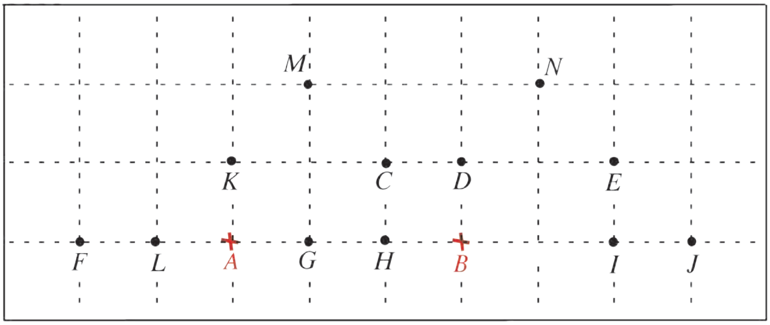
في الشكل المجاور، ABC مثلث متساوي الساقين.

1. أثبت أنّ المثلثين CBN,CNA طبوقان.
2. استنتج أنّ $AN = NB$.
3. هل $\widehat{ACN} = \widehat{NCB}$ ولماذا؟

12 ارسم مستقيماً ماراً بنقطتين U و V ونقطةً J لا تنتمي إليه.

1. ارسم (Δ) صورة المستقيم (UV) وفق الانسحاب الذي ينقل V إلى J.
2. ارسم (d) صورة المستقيم (UV) وفق التناظر الذي مركزه J.
3. هل المستقيمان (Δ) و (d) متوازيان؟ اشرح إجابتك.

13 تأمل الشكل الآتي:



1. وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، ما صورة:

① النقطة C؟ ② النقطة F؟ ③ النقطة H؟ ④ النقطة M؟

2. وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، ما النقطة التي:

① صورتها D؟ ② صورتها I؟ ③ صورها H؟

حدد وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، مثلثين طبوقين

14 1. ارسم، باللون الأسود، مستطيلاً $ABCD$ بعداه $AB = 2\text{ cm}$ و $AD = 4\text{ cm}$.

2. ارسم:

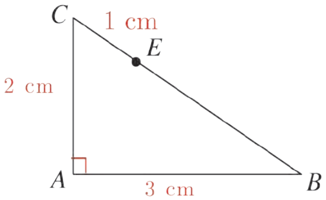
① باللون الأزرق، صورة المستطيل $ABCD$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

② باللون الأحمر، صورة المستطيل $ABCD$ وفق الانسحاب الذي ينقل D إلى A.

③ باللون الأخضر، صورة المستطيل $ABCD$ وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى D.

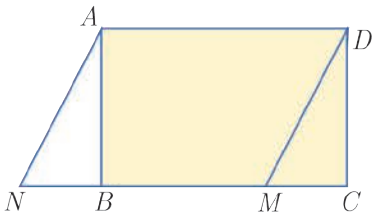
15 المثلث ABC المرسوم جانباً، قائم في A و $AB = 3\text{ cm}$ و $AC = 2\text{ cm}$. E نقطة من وتره $[BC]$، $CE = 1\text{ cm}$.

ارسم هذا المثلث على دفترك، ثم ارسم صورته وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى E.



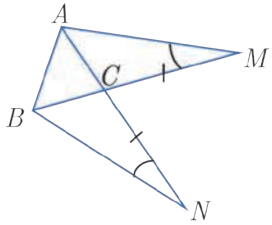
لإحراز تقدّم

16 تطابق مثلثات



① $ANMD$ متوازي أضلاع و $ABCD$ مستطيل.

1. أثبت تطابق المثلثين MCD, ANB.
2. حدد صورة المثلث ANB وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة N إلى النقطة M.
3. استنتج تعليلاً أخر لتطابق المثلثين MCD, ANB.

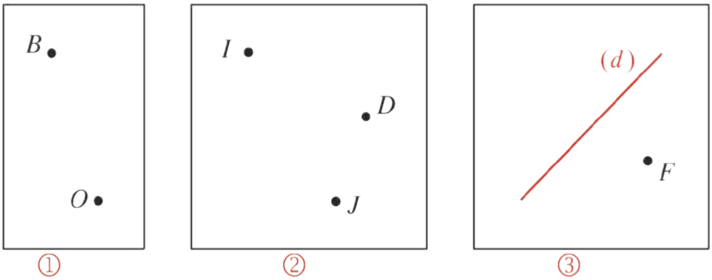


② في الشكل المجاور:

1. أثبت تطابق المثلثين MCA, NCB.
2. أثبت تطابق المثلثين MBA, NAB.
3. استنتج نوع المثلث CBA.

17 تعلُّم تعريفات.

1. تأمل الشكل الآتي، ثم أكمل التعريفات التالية:



① القول إنَّ « النقطة B هي صورة النقطة A وفق التناظر الذي مركزه O » يعني:............

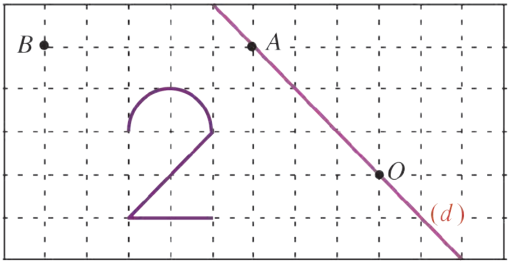
② القول إنَّ « النقطة C هي صورة النقطة D وفق الانسحاب الذي ينقل I إلى J» يعني:............

③ القول إنَّ « النقطة E هي صورة النقطة F وفق التناظر الذي محوره (d) » يعني: ....

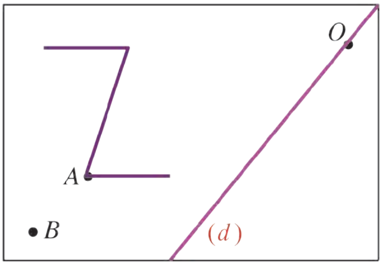
2. انسخ الأشكال السابقة ثم أكمل رسم التحويلات الواردة في الطلب الأول.

18 تعرُّف الصور.

في كلٍ من الحالتين الآتيتين:



①



②

① ارسم باللون الأخضر صورة الشكل وفق التناظر الذي مركزه O.

② ارسم باللون الأزرق صورة الشكل وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

① ارسم باللون الأحمر صورة الشكل وفق التناظر الذي محوره المستقيم (d).

استعمل في الحالة ① صفحة سنتيمترية وفي الحالة② صفحة بيضاء.

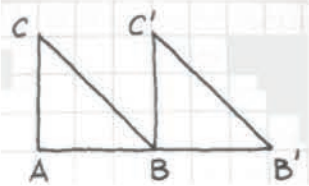
19 تعلَّم التحرير الكتابي.

اقرأ النص والحل المنجز من قبل أحد الطلاب. ثم حرِّر الحل مع الأخذ بمجمل ملاحظات المصحح

النص

1. ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A.
2. ثم ارسم C' و B' صورتي C و B على التوالي وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.
3. ما طبيعة المثلث $BB'C'$؟
4. ما طبيعة الرباعي $ABC'C$؟

حلّ الطالب، مع ملاحظات المصحح



1. رسم المثلث ABC

لا يجب رسم حالة خاصة فمعطيات المسألة لاتوحي أن المثلث متساوي الساقين.

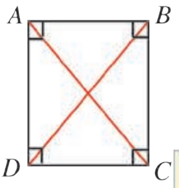
2. الانسحاب يحافظ على قياسات الزوايا، إذن: $\widehat{B'BC'} = 90^\circ$

أوضح: ما الزاوية التي صورتها $\widehat{B'BC'}$

3. $ABC'D$ هو مربع نقص في الرسم، والإجابة بحاجة إلى تحقق

التعمّق

20 كيف نستخدم خاصة؟



وجدنا في الصف السابع الخاصة الآتية: « قطرا المستطيل متساويا الطول»

يمكن تنظيم مخطط استعمال هذه الخاصة على النحو الآتي:

الفرض	الخاصة	النتيجة
$ABCD$ مستطيل	قطرا المستطيل متساويا الطول	$AC = BD$

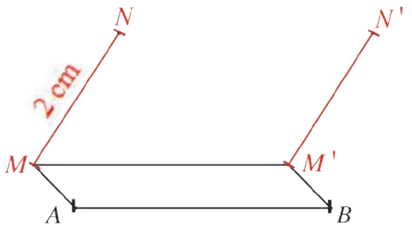
1) $MNPQ$ مستطيل.

الخاصة السابقة تفسح في المجال أن نستوحي نتيجةً من هذا المعطى.

أكمل: $MNPQ$ مستطيل، إذن ...... = ...

2) $ABCD$ شكل رباعي فيه $AC = BD$. هل الخاصة السابقة تفسح في المجال أن نستوحي أنَّ الرباعي $ABCD$ هو مستطيل؟ اشرح إجابتك.

21 خطوة نحو الإثبات



في الشكل المرافق: $MN = 2$ cm

$[M'N']$ هي صورة $[MN]$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B .

أثبت أنَّ $M'N' = 2$ cm .

انسخ الجدول الآتي، ثم املأ الفراغ بنص ملائم.

الفرض	الخاصة	النتيجة
$MN = 2$ cm، و $[M'N']$ صورة $[MN]$ وفق انسحابٍ	....	$M'N' = 2$ cm

22 خطوتان نحو الإثبات

ABC مثلث كيفي. A' هي صورة A وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى B .

1. ارسم شكلاً موافقاً للمعطيات.
2. أثبت أنَّ القطعتين $[AB]$ و $[A'C]$ متناصفتان.

لإنجاز الإثبات، انسخ المخطط الوارد في كلٍّ من الخطوتين الآتيتين واملأ الفراغات بما يلائم.

الخطوة الأولى:

الفرض	التعريف	النتيجة
A' هي صورة A وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى B	تعريف صورة نقطة وفق انسحاب	....

الخطوة الثانية:

الفرض	الخاصة	النتيجة
$ACBA'$ هو متوازي أضلاع	....	القطعتان $[AB]$ و $[A'C]$ متناصفتان.

23 تحرير إثبات

$ABCD$ شكل رباعي، I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[AB]$.

K هي صورة النقطة B وفق الانسحاب الذي ينقل I إلى A.

1. ارسم شكلاً محققاً معطيات النص.
2. أثبت أنَّ J هي منتصف $[IK]$.

إنجاز الإثبات، انسخ المخطط الآتي واملأ الفراغات بما يلائم. ثم صِغْ الإثبات بلغة سليمة.

لدينا من النص: K هي صورة النقطة B وفق الانسحاب الذي ينقل I إلى A

←

إذن، وحسب: صورة نقطة وفق انسحاب

←

.... هو متوازي أضلاع

←

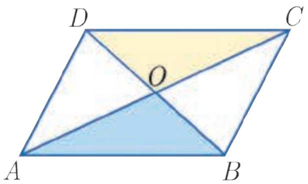
خاصة ....

←

J هي منتصف $[IK]$

J منتصف $[AB]$ (← خاصة ....)

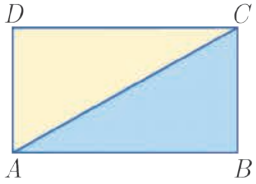
24 إثبات أنّ قطري متوازي الأضلاع متناصفان.



في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي الأضلاع.

1. أثبت أن المثلثين ABO,ODC طبوقان.
2. استنتج أن قطري متوازي الأضلاع متناصفان.

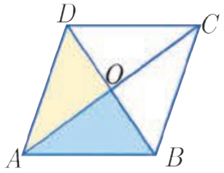
25 إثبات أنّ قطري المستطيل متساويان.



في الشكل المجاور، $ABCD$ مستطيل.

1. أثبت أن المثلثين ABC,ADB طبوقان.
2. استنتج أن قطري هذا المستطيل متساويان.

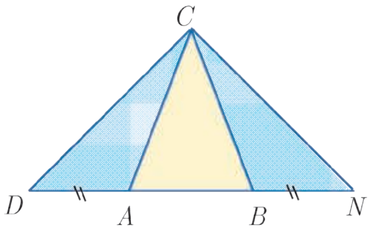
26 إثبات أنّ قطري المعين متعامدان.



في الشكل المجاور، $ABCD$ معين.

1. أثبت أنّ المثلثين ABO,ODA طبوقان.
2. استنتج أنّ قطري المعين متعامدان.

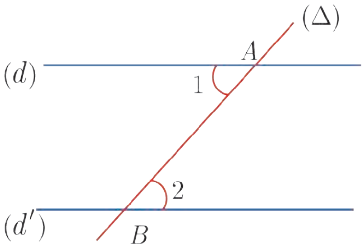
27 مع مثلث متساوي الساقين



في الشكل المجاور، ABC مثلث متساوي الساقين.

1. أثبت أنّ المثلثين CBN,CDA طبوقان.
2. استنتج نوع المثلث DCN.

28 الزاويتان المتبادلتان داخلاً



في الشكل المجاور، $d \parallel d'$. تعلمت في العام الماضي أن $\hat{2} = \hat{1}$. لنثبت ذلك.

ارسم من النقطة O منتصف $[AB]$ مستقيماً يعامد (d) في النقطة M ويقطع (d') في N. استفد من الخاصة: "العمود على أحد مستقيمين متوازيين عمود على الآخر" لتثبت أن المثلثين OMA,ONB طبوقان. ثم استنتج أن $\hat{2} = \hat{1}$.

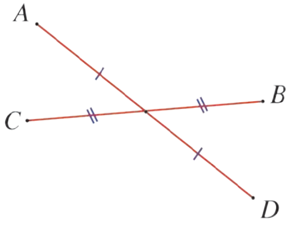
الوحدة الثانية

مثلثات ومنتصفات أضلاع ومستقيمات متوازية

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، أشر إليها:

① انطلاقاً من الشكل المرافق، يمكن القول إن:



① الرباعي $ABDC$ هو معين

② الرباعي $ABDC$ هو متوازي أضلاع

③ الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع

② $EFGH$ متوازي أضلاع وليس مستطيلاً، إذن:

① $(EF) \parallel (GH)$ ② $EG = FH$ ③ $(EG) \parallel (FH)$

③ النقاط A و B و C و D و E على استقامة واحدة بهذا الترتيب وتقسم $[AE]$ الى قطع متساوية. إذن:

① $\frac{AB}{AE} = \frac{1}{5}$ ② $\frac{AB}{AE} = \frac{2}{5}$ ③ $\frac{AB}{AE} = \frac{1}{4}$

④ النقاط الثلاث A و B و C تحقق $(AB) \parallel (AC)$، فيمكن تأكيد أن:

① $C \in (AB)$ ② A هي منتصف $[BC]$ ③ $AB = AC$

⑤ إذا كان الجدول المرافق جدول تناسب، كان:

4	16	y
5	x	30

① $\frac{4}{5} = \frac{x}{16} = \frac{y}{30}$ ② $\frac{5}{4} = \frac{x}{16} = \frac{y}{30}$ ③ $\frac{4}{5} = \frac{16}{x} = \frac{y}{30}$

⑥ إذا كان $\frac{3}{2} = \frac{x}{5}$، كان:

① $x = \frac{3 \times 5}{2}$ ② $x = \frac{2 \times 5}{3}$ ③ $x = \frac{2}{3 \times 5}$

⑦ إذا كان $\frac{7}{x} = \frac{5}{24}$، كان:

① $x = \frac{7 \times 24}{5}$ ② $x = \frac{7 \times 5}{24}$ ③ $x = \frac{5 \times 24}{7}$

1 منتصفا ضلعين في المثلث

نشاط « اكتشاف وإثبات خاصة المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في المثلث »

.1 دراسة تجريبية

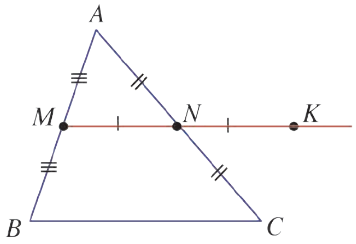
1. ارسم ثلاثة مثلثات ABC ، في أحدها $\widehat{A}$ حادة وفي آخر $\widehat{A}$ منفرجة وفي ثالثها $\widehat{A}$ قائمة.

2. في كل من تلك المثلثات، وضِعْ النقطة M في منتصف $[AB]$ والنقطة N في منتصف $[AC]$، ثم ارسم المستقيم (MN).

كيف يبدو لك المستقيمان (MN) و (BC)؟ والطولان MN و BC؟

.2 إثبات

1. في كلٍّ من الأشكال الثلاثة السابقة، وضِعْ النقطة K نظيرة M بالنسبة إلى N.



2. **دليل للإثبات**

- اكتب في الفراغ المنقط الخاصة التي تستنتج منها أنَّ « $AMCK$ هو متوازي أضلاع » $[AC]$ و $[MK]$ هما قطرا الرباعي $AMCK$، N منتصف كلٍ من $[AC]$ و $[MK]$.
  .... إذن $AMCK$ هو متوازي أضلاع.
- اكتب في الفراغ المنقط الخاصة التي تستنتج منها أنَّ « $(AM) \parallel (CK)$ و $AM = CK$ »
  $AMCK$ متوازي أضلاع، .... إذن $(AM) \parallel (CK)$ و $AM = CK$.
- لماذا إذن نستطيع القول إنَّ « $(MB) \parallel (CK)$ و $MB = CK$ »؟
- اكتب في الفراغ المنقط الخاصة التي تستنتج منها أنَّ « $MBCK$ متوازي أضلاع»
  $(MB) \parallel (CK)$ و $MB = CK$، .... إذن $MBCK$ هو متوازي أضلاع.

3. أيكفي الوصول إلى « $MBCK$ هو متوازي أضلاع » لتأكيد ما بدا لك في الدراسة التجريبية؟
4. صغ إثباتاً، بلغة سليمة وأسلوب شيق لإثبات أنَّ:

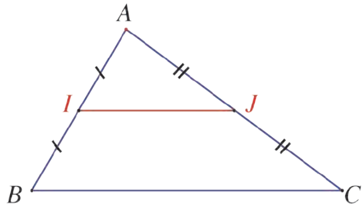
القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصف طولها

تعلّم

المبرهنة الأولى في المنتصفات:

- المستقيم المار بمنتصفي ضلعين من أضلاع مثلث، يوازي ضلعه الثالثة.
- طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين من أضلاع مثلث، يساوي نصف طول الضلع الثالثة.

مثال في الشكل المرافق:



المعطيات: في المثلث ABC، I منتصف $[AB]$

و J منتصف $[AC]$

حسب المبرهنة الأولى في المنتصفات

النتيجة: $(IJ) \parallel (BC)$ و $IJ = \frac{1}{2}BC$.

معنى الكلمات:

في حالة مبرهنة شهيرة وكثيرة الاستعمال، كما في هذه الحالة، عند استعمالها لا ضرورة لسرد نصها.

نكتفي بالقول: حسب المبرهنة في ...

لاستعمال المبرهنة الأولى في المنتصفات، يجب:

- ذكر المثلث الذي نطبق عليه المبرهنة.
- ذكر الضلعين المعنيين ومنتصفيهما.
- الاستنتاج « فالمستقيمان ..... و ..... متوازيان »

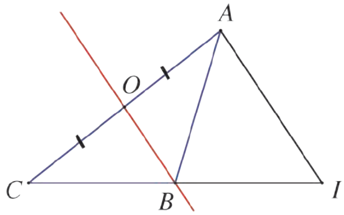
اكتساب معارف

كيف نثبت توازي مستقيمين؟

مثال ABC مثلث، النقطة O هي منتصف $[AC]$.

النقطة I هي نظيرة C بالنسبة إلى B.

أثبت أنَّ المستقيمين (OB) و (AI) متوازيان.



فكِّر في وضع الشكل بحيث يمكن الاستفادة من مبرهنات المنتصفات.

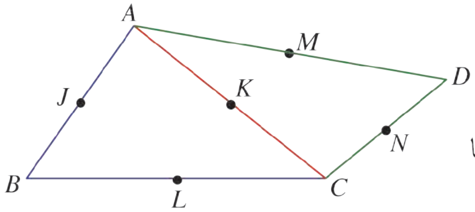
الحلّ

I هي نظيرة C بالنسبة إلى B، إذن B هي منتصف $[CI]$.

ولدينا من النص O منتصف $[AC]$، فبتطبيق المبرهنة الأولى في المنتصفات على المثلث ACI، يكون المستقيم المار بالنقطتين O و B، منتصفي $[AC]$ و $[CI]$، موازياً $[AI]$ الضلع الثالثة.

أي إنَّ المستقيمين (OB) و (AI) متوازيان.

تحقّق من فهمك



في الشكل المرافق، ABC و ADC مثلثان.

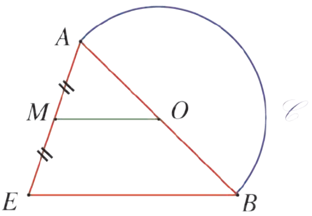
J و K و L و M و N منتصفات أضلاعهما حسب ما ترى على الشكل.

1. في كل حالة، اذكر المستقيم الذي يوازيه المستقيم المعطى؟ اشرح إجابتك كتابةً.

① (JK) ② (KN) ③ (LN) ④ (JM)

2. ما الوضع النسبي للمستقيمين (LN) و (JM)؟ علِّلْ إجابتك.

تدرّب



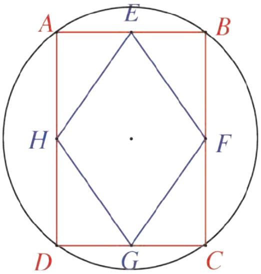
① $\mathscr{C}$ نصف دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$.

M هي منتصف القطعة المستقيمة $[AE]$.

أثبت أنَّ المستقيمين (OM) و (BE) متوازيان.

② ABC مثلث. B' نظيرة A بالنسبة إلى B، و C' نظيرة A بالنسبة إلى C.

أثبت أنَّ المستقيمين (CB) و $(C'B')$ متوازيان.



③ $ABCD$ مستطيل مرسوم في دائرة نصف قطرها 3cm.

E و F و G و H منتصفات أضلاعه.

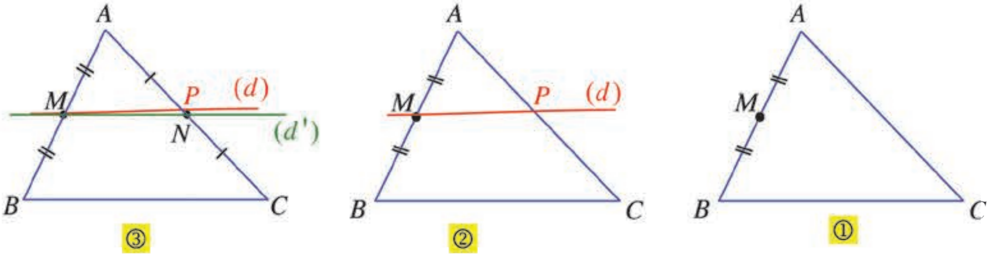
ما نوع الرباعي $EFGH$؟ احسب محيطه.

② موازٍ لضلع من منتصف ضلع آخر

نشاط « تمهيد خاصة المستقيم المار بمنتصف ضلع في المثلث موازياً ضلعاً آخر منه »

- في الشكل ① ، ABC مثلث، M منتصف الضلع $[AB]$.

رسم سليم **يدوياً** المستقيم (d) ماراً بالنقطة M وموازياً ضلعه $[BC]$، فقطع $[AC]$ في P. وحصل على الشكل ② .



- وضَّع النقطة N في منتصف $[AC]$ ورسم المستقيم (d') ماراً بالنقطتين M و N، فحصل على الشكل ③ ، واتضح أنَّ المستقيمين (d') و (d) غير منطبقين.

1. اشرح لماذا أخطأ سليم في رسم المستقيم (d).

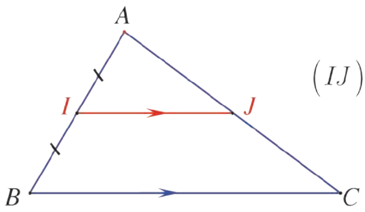
2. صغ إثباتاً، بلغة سليمة وأسلوب شيق لإثبات أنَّ:

المستقيم المار بمنتصف ضلع في المثلث موازياً ضلعاً آخر، يقطع الضلع الثالثة في منتصفه.

تعلّم

المبرهنة الثانية في المنتصفات:

المستقيم المار بمنتصف أحد أضلاع مثلث موازياً ضلعاً آخر، يقطع الضلع الثالثة في منتصفه.



مثال في الشكل المرافق:

المعطيات: في المثلث ABC، I منتصف $[AB]$ و $(IJ) \parallel (BC)$

حسب المبرهنة الثانية في المنتصفات

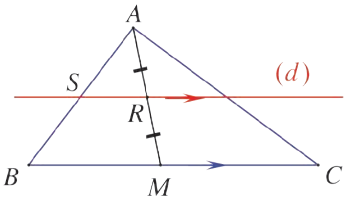
النتيجة: J منتصف $[AC]$.

لاستعمال المبرهنة الثانية في المنتصفات، يجب:

- تحديد المثلث الذي نطبق عليه المبرهنة.
- تحديد منتصف أحد أضلاعه والمستقيم المار بهذا المنتصف موازياً ضلعاً آخر.
- استنتاج « إذن النقطة .... هي منتصف الضلع الثالث .... »

اكتســاب معــارف

كيف نثبت وقوع نقطة في منتصف قطعة مستقيمة ؟



مثال ABC مثلث، M نقطة من $[BC]$ و R منتصف $[AM]$ و (d) هو المستقيم المار بالنقطة R موازياً (BC) وقاطعاً $[AB]$ في S. أثبت أنَّ S هي منتصف $[AB]$.

لإثبات أنَّ نقطةً هي منتصف قطعة مستقيمة، فكِّرْ باستعمال قطري متوازي الأضلاع.

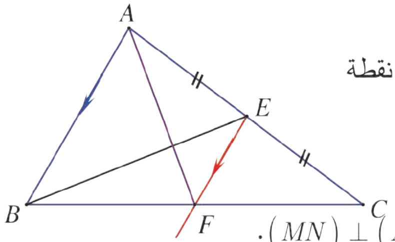
في حالة المثال الذي نحن بصدده، معطيات النص توجهنا إلى التفكير بمبرهنة المنتصفات الثانية.

الحل

في المثلث AMB، المستقيم (SR) يمر بالنقطة R منتصف ضلعه $[AM]$ ويوازي ضلعاً آخر $[BM]$ فهو، حسب المبرهنة الثانية للمنتصفات، يقطع ضلعه الثالث $[AB]$ في منتصفه.

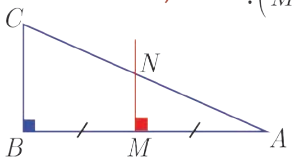
أي إنَّ النقطة S هي منتصف $[AB]$. فالمستقيمان (OB) و (AI) متوازيان.

تحقّق من فهمك



① ABC مثلث. E منتصف $[AC]$ في هذا المثلث، F نقطة من $[BC]$ تحقق $(AB) \parallel (EF)$.

أثبت أنَّ F منتصف $[BC]$.



② ABC مثلث قائم في B ، M منتصف $[AB]$ و $(AB) \perp (MN)$.

أثبت أنَّ N منتصف $[AC]$

تذكر : العمودان على مستقيم واحد متوازيان.

تدرّب

① IJK مثلث. S هي صورة النقطة I وفق التناظر الذي مركزه J.

المستقيم المار بالنقطة S موازياً (JK) يلاقي المستقيم (IK) في T.

1. ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص.
2. أثبت أنَّ K هي منتصف القطعة $[IT]$.

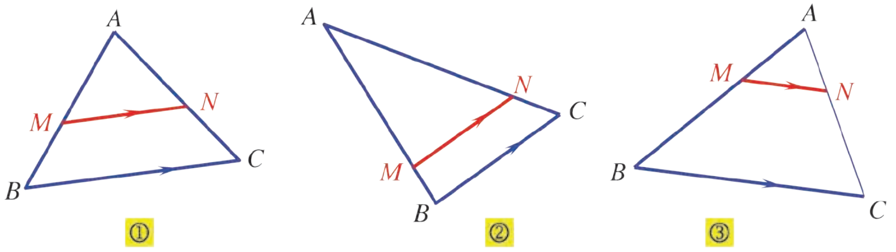
② AJP مثلث و C منتصف $[AJ]$. نرسم من النقطة A المستقيم الموازي للمستقيم (CP) فيقطع المستقيم (JP) في M.

ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص، ثم أثبت أنَّ P هي منتصف $[MJ]$.

3 مستقيمات متوازية وقاطعان

نشاط « اكتشاف التناسب بين أطوال أضلاع مثلثين »

ABC و AMN مثلثان، $M \in [AB]$ و $N \in [AC]$ و $(MN) \parallel (BC)$.



1. في كلٍّ من الأشكال السابقة، قس أطوال أضلاع كلٍ من المثلثين ABC و AMN، ثم نظِّم جدولاً بالنتائج لكلّ حالة كالجدول الآتي:

أطوال أضلاع المثلث AMN	$AM = \cdots\cdots$	$AN = \cdots\cdots$	$MN = \cdots\cdots$
أطوال أضلاع المثلث ABC	$AB = \cdots\cdots$	$AC = \cdots\cdots$	$BC = \cdots\cdots$

2. هل كل جدول من الجداول الثلاثة هو جدول تناسب؟

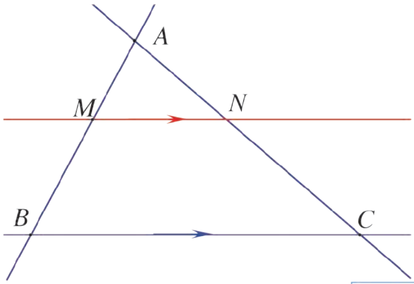
من المعلوم أنَّ النتيجة التي توصلنا إليها في العمل السابق لا يعد إثباتاً للحقيقة التالية:

«المثلثان المحققان لمعطيات النشاط السابق، أطوال أضلاع أحدهما متناسبة مع أطوال أضلاع الآخر »

وسوف نقبل هذه الخاصة في دراستنا اللاحقة دون إثبات، كما أننا سنعرض إثباتاً في حالة خاصة في نشاط الدرس الرابع (تساوي ثلاث نسب).

تعلّم

مستقيمان متوازيان وقاطعان



مثال ABC و AMN مثلثان مكونان من مستقيمين متوازيين (MN) و (BC) يقطعهما قاطعان (MB) و (AC). في هذه الحالة، الجدول الآتي **هو جدول تناسب**.

أطوال أضلاع المثلث AMN	AM	AN	MN
أطوال أضلاع المثلث ABC	AB	AC	BC

خاصة

إذا قطع مستقيمٌ ضلعي المثلث ABC، $[AB]$ في M و $[AC]$ في N وكان $(AB) \parallel (MN)$،
كانت أطوال أضلاع المثلث AMN متناسبة مع أطوال أضلاع المثلث ABC.

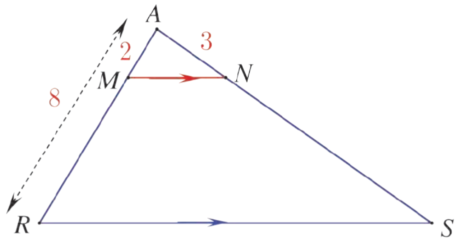
اكتســاب معــارف

كيف نحسب طول قطعة مستقيمة باستعمال مبرهنة النسب المتساوية ؟

مثال في كلٍ من الحالتين الآتيتين ① و ② احسب AS.

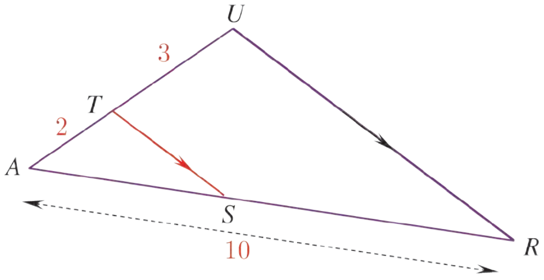
①

$M \in [AR]$ و $N \in [AS]$ و $(MN) \parallel (RS)$



②

$S \in [AR]$ و $T \in [AU]$ و $(RU) \parallel (ST)$



الحلّ

لحساب الأطوال نستعمل مبرهنة النسب المتساوية.

① المستقيم (MN) يقطع $[AR]$ و $[AS]$ ضلعي المثلث ARS ويوازي ضلعه الثالث $[RS]$،

فيكون، حسب مبرهنة النسب المتساوية: $\dfrac{AN}{AS} = \dfrac{AM}{AR}$.

وحسب الأطوال المعطاة في الشكل $\dfrac{3}{AS} = \dfrac{2}{8}$ ومنها

$$AS = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

② المستقيم (TS) بقطع $[AR]$ و $[AU]$ ضلعي المثلث ARU على التوالي في T و S ويوازي

ضلعه الثالث $[RU]$، فيكون، حسب مبرهنة النسب المتساوية: $\dfrac{AS}{AR} = \dfrac{AT}{AU}$.

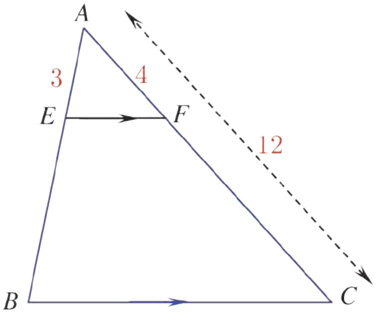
وحسب الأطوال المعطاة في الشكل: $\dfrac{AS}{10} = \dfrac{2}{5}$، ومنها $AS = \dfrac{10 \times 2}{5} = 4$.

تحقّق من فهمك

في الشكل المرافق، ABC و AEF مثلثان.

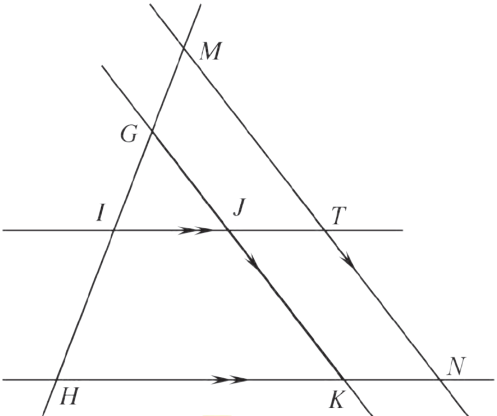
$(BC) \parallel (EF)$ و $AC = 12$ و $AE = 3$ و $AF = 4$.

احسب الطول AB واستنتج الطول EB .

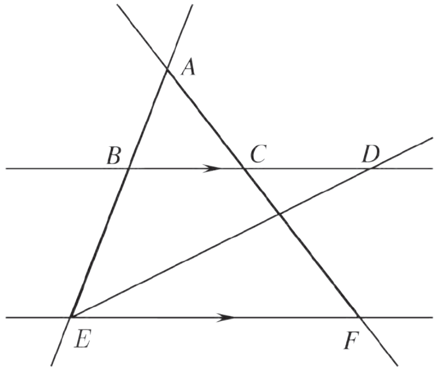


تدرّب

① في كلٍ من الشكلين ① و ② خمسة مستقيمات.



②



①

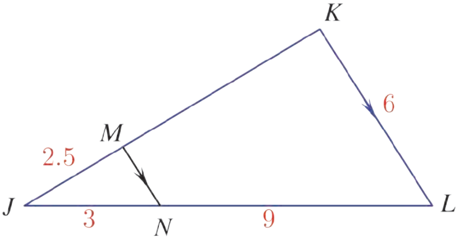
في كل شكل، أشر إلى كل مثلثين محدّدين بمستقيمين متوازيين ومستقيمين قاطعين لهما.

② في الشكل المرافق، JKL و JMN مثلثان.

$(KL) \parallel (MN)$ و $KL = 6$ و $JN = 3$

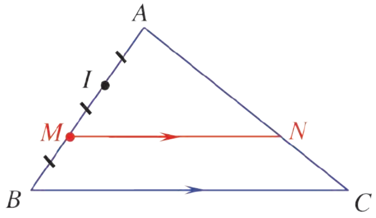
و $JM = 2.5$ و $NL = 9$.

احسب كل من الطولين JK ، MN .



4 تساوي ثلاث نسب

نشاط « إثبات الخاصة السابقة في حالة خاصة »



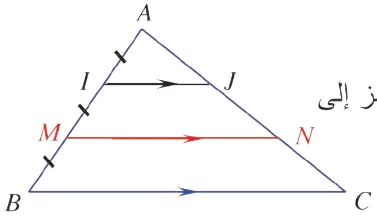
ABC مثلث. I و M نقطتان من ضلعه $[AB]$ تحققان.

N نقطة من الضلع $[AC]$ تحقق $(BC) \parallel (MN)$.

نسعى إلى إثبات أنّ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

1. النسبة $\frac{AM}{AB}$، حسب معطيات النص $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$

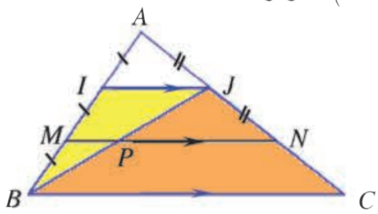
2. النسبة $\frac{AN}{AC}$



① نرسم من النقطة I المستقيم الموازي للمستقيم (MN)ونرمز إلى نقطة تقاطعه مع (AC) بالرمز J.

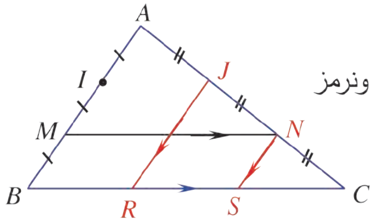
أثبت أنَّ J هي منتصف $[AN]$.

② نرسم المستقيم (BJ) ونرمز إلى نقطة تقاطعه مع (MN) بالرمز P.



- أثبت أنَّ P هي منتصف $[BJ]$.
- استنتج أنَّ N هي منتصف $[CJ]$.
- اشرح لماذا $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$؟

3. النسبة $\frac{MN}{BC}$



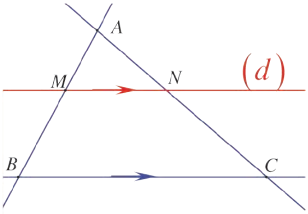
- نرسم من النقطة J المستقيم الموازي للمستقيم (AB) ونرمز إلى نقطة تقاطعه مع (BC) بالرمز R.
- نرسم من النقطة N المستقيم الموازي للمستقيم (AB)ونرمز إلى نقطة تقاطعه مع (BC) بالرمز S.

① اشرح لماذا $RB = SR = CS$. استنتج قيمة النسبة $\frac{BS}{BC}$.

② ما طبيعة الرباعي $BSNM$ ؟ علِّلْ إجابتك. استنتج أنّ $\frac{2}{3} = \frac{MN}{BC}$.

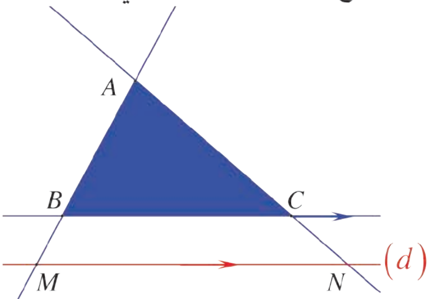
تعلّم

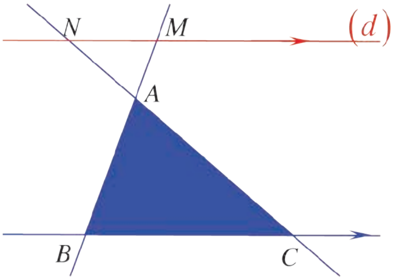
مبرهنة النسب الثلاث المتساوية:



إذا قطع مستقيمٌ (d) ضلعي المثلث ABC، $[AB]$ في M و (AC) في N وكان $(AB) \parallel (MN)$، كان $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$

تصح هذه المبرهنة أيضاً في حالة كون المستقيم (d) قاطعاً امتدادي $[AB]$ و $[AC]$.



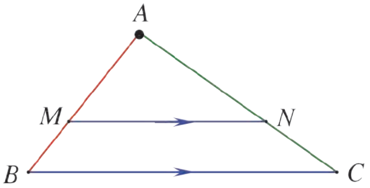


لكتابة المساواة المبنية على مبرهنة النسب المتساوية الثلاث والمتعلقة بمثلثين متشابهين:

- نكتب في البسوط أضلاع أحد المثلثين.
- نكتب في المقامات أضلاع المثلث الآخر الموافقة بالترتيب مع أضلاع المثلث الأول.

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$$

ضلعان متوازيان	ضلعان على (AC)	ضلعان على (AB)

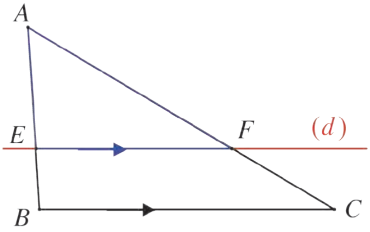


مثال ABC مثلث أطوال أضلاعه $AB = 3$ و $AC = 6$ و $BC = 5$.

المستقيم (d) يوازي (BC) ويقطع $[AB]$ في E و $[AC]$ في F. فإذا علمت أن $AE = 2$.

احسب أطوال أضلاع المثلث AEF.

الحلّ



نرسم شكلاً يتفق مع معطيات النص. ولحساب أطوال أضلاع المثلث AEF، نستعمل مبرهنة النسب المتساوية.

المستقيم (d) يقطع $[AB]$ و $[AC]$ ضلعي المثلث ABC على التوالي في E و F ويوازي ضلعه الثالث $[BC]$،

فيكون، حسب مبرهنة النسب المتساوية: $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$.

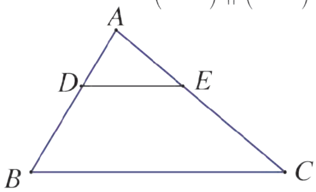
وحسب الأطوال المعطاة في الشكل: $\frac{EF}{5}=\frac{AF}{6}=\frac{2}{3}$ ($AE=2$ حسب النص)

من التناسب $\frac{AF}{6}=\frac{2}{3}$، نجد $AF=\frac{6\times 2}{3}=4$. ومن $\frac{EF}{5}=\frac{2}{3}$، نجد $EF=\frac{5\times 2}{3}=\frac{10}{3}$.

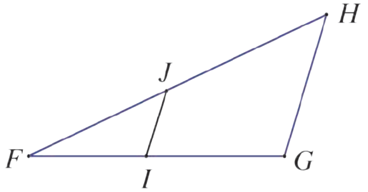
تحقّق من فهمك

في كلٍ من الحالتين ① و ② اكتب ثلاث نسب متساوية.

① $D\in[AB]$ ؛ $E\in[AC]$ ؛ $(DE)\parallel(BC)$



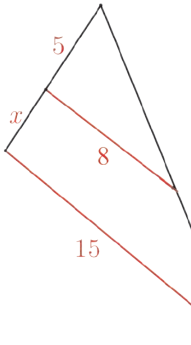
② $I\in[FG]$ ؛ $J\in[FH]$ ؛ $(IJ)\parallel(GH)$



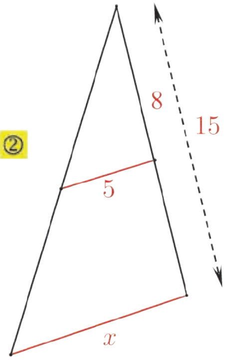
تدرّب

① في كلٍ من الحالات الآتية، المستقيمان الملونان بالأحمر متوازيان.

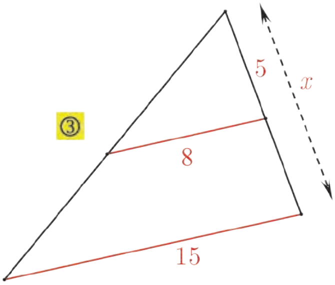
①



②

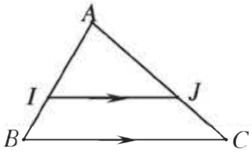


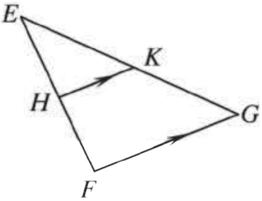
③

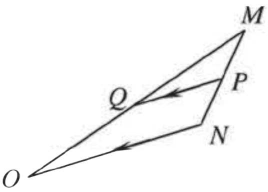


بين إن كانت المساواة $\frac{8}{15}=\frac{5}{x}$ صحيحة أم لا.

② في كلٍ من الأشكال الثلاث الآتية، اكتب النسب المتساوية الثلاث.







تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات. أشر إليها.

❶ ABC مثلث. M منتصف $[AB]$ و N منتصف $[BC]$، إذن

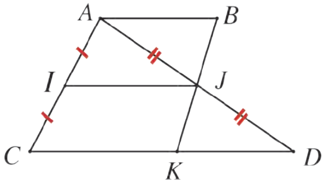
① $(MN) \parallel (BC)$ و $BC = 2MN$.

② $(MN) \parallel (AC)$ و $AC = 2MN$.

③ $(MN) \parallel (AC)$ و $MN = 2AC$.

❷ $I \in [AC]$ و $J \in [AD]$ و $K \in [CD]$.

مع المعطيات المتوفرة على الشكل، يمكن تأكيد أنَّ:



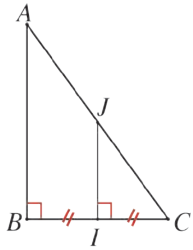
① K هي منتصف $[CD]$.

② $(CD) \parallel (AB)$.

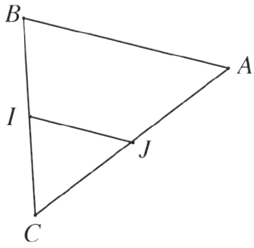
③ $(IJ) \parallel (CD)$.

❸ B و I و C ثلاث نقاط على استقامة واحدة، كذلك النقاط A و J و C.

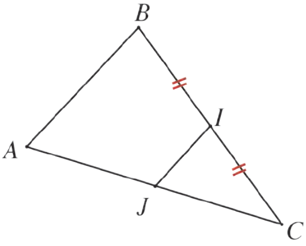
يمكن تأكيد أنَّ J هي منتصف $[AC]$، فالشكل المعبر عن هذه المعطيات هو:



①



②



③

❹ في الشكل المرافق:

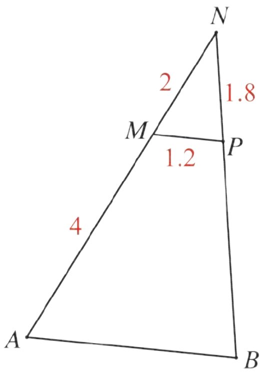
$M \in [AN]$ و $P \in [BN]$ و $(MP) \parallel (AB)$، إذن:

① $NB = 5.8$ ② $NB = 5.4$ ③ $NB = 3.6$

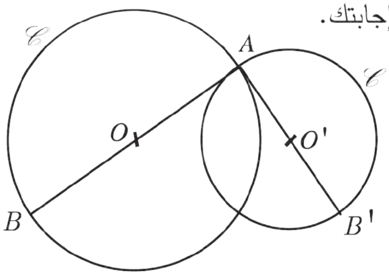
❺ في الشكل السابق:

$M \in [AN]$ و $P \in [BN]$ و $(MP) \parallel (AB)$، إذن:

① $AB = 2.4$ ② $AB = 3.6$ ③ $AB = 5.2$



2 تمعَّنْ العبارات الآتية. أيها صحيحة وأيها خطأ ؟ علِّلْ إجابتك.

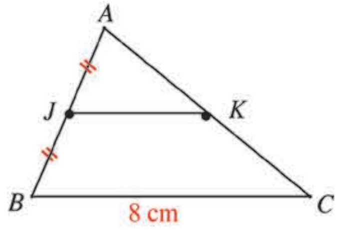


❶ $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ دائرتان مركزاهما على التوالي O و O'.

A هي إحدى نقطتي تقاطعهما.

(AO) يقطع $\mathscr{C}$ في B و (AO') يقطع $\mathscr{C}'$ في B'.

فالمستقيمان (OO') و (BB') متقاطعان.



❷ في المثلث ABC:

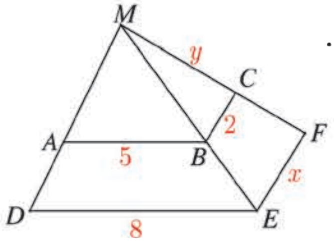
J منتصف $[AB]$ و K منتصف $[AC]$.

و $BC = 8\text{ cm}$.

إذن $JK = 4\text{ cm}$

❸ AEF مثلث. I نقطة من $[AE]$ تحقق $AI = \frac{1}{3}AE$. المستقيم المرسوم من I موازياً (EF) يقطع $[AF]$ في J، كما إنَّ $JI = 4\text{ cm}$ و $EF = 8\text{ cm}$.

محيط المثلث AEF يساوي ثلاثة أمثال محيط المثلث AIJ.

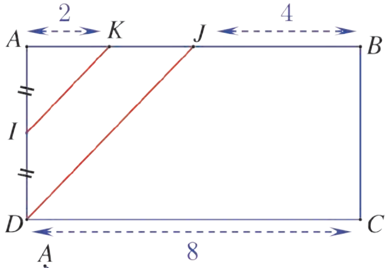


❹ في الشكل المرافق: $A \in [MD]$ و $B \in [ME]$ و $C \in [MF]$.

أطوال بعض القطع في الشكل مشار إليها عددياً أو بالرموز x و y.

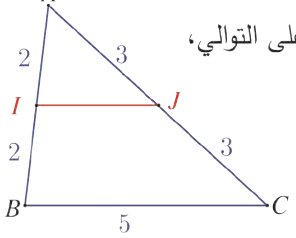
يمكن حساب $x = 3.2$ ولا يمكن حساب قيمة y.

3 $ABCD$ مستطيل. $CD = 8$، والنقطة I هي منتصف $[AD]$. K و J نقطتان من $[AB]$ تحققان $AK = 2$ و $BJ = 4$



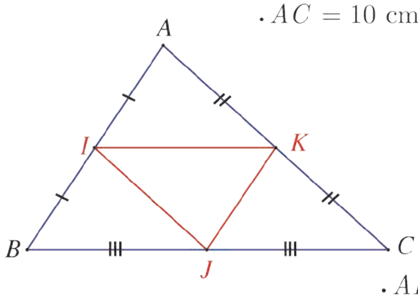
1. أثبت أنَّ النقطة K هي منتصف $[AJ]$.
2. استنتج أنَّ المستقيم (IK) يوازي المستقيم (DJ).

4 ABC مثلث. I و J نقطتان من ضلعيه $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي، وتحققان الأطوال المشار إليها على الشكل.



1. أثبت أنَّ المستقيمين (IJ) و (BC) متوازيان.
2. احسب طول القطعة $[IJ]$.

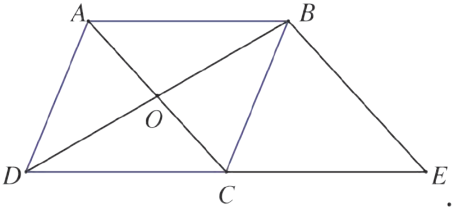
5 ABC مثلث. $BC = 12\text{ cm}$ و $AB = 8\text{ cm}$ و $AC = 10\text{ cm}$.



I و J و K هي منتصفات أضلاعه حسب توضعها على الشكل المرافق.

1. حدد معللاً كل مستقيمين متوازيين في في الشكل.
2. ما عدد متوازيات الأضلاع في الشكل؟
3. احسب محيط المثلث IJK، ووازنه بمحيط المثلث ABC.

6 $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O.



$OB = 3\text{ cm}$ و $OC = 2\text{ cm}$.

E هي نظيرة النقطة D بالنسبة إلى C.

1. أثبت أنَّ المستقيمين (OC) و (BE) متوازيان.
2. احسب الطول BE.
3. ارسم شكلاً في حالة $\widehat{COB} = 60^\circ$.

7 C و 'C دائرتان متمركزتان في O، ونصفا قطريهما على التوالي 2.5 cm و 5 cm.

A و B نقطتان من الدائرة C تحققان $AB = 4\text{ cm}$. المستقيمتان (OA) و (OB) تقطعان الدائرة 'C على التوالي في A' و B'.

1. ارسم شكلاً يحقق معطيات النص.
2. ما الوضع النسبي للمستقيمين (AB) و $(A'B')$؟
3. احسب طول القطعة $[A'B']$.

8 $ABCD$ مربع طول ضلعه 3 cm.

E هي صورة النقطة B وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

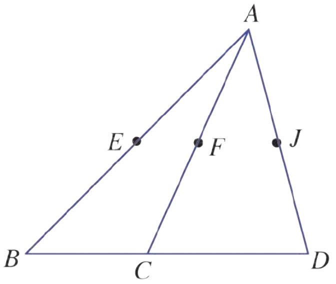
F هي صورة النقطة A وفق التناظر الذي مركزه C.

1. ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص.
2. أثبت أنَّ (BC) و (EF) متوازيان.
3. ما نوع المثلث AEF؟ اشرح إجابتك.

9 B و C و D ثلاث نقاط على استقامة واحدة،

A نقطة خارج المستقيم المار بها. E و F و J هي على التوالي منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$.

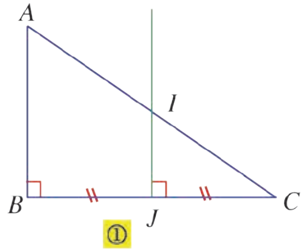
أثبت أنَّ النقاط E و F و J هي على استقامة واحدة.

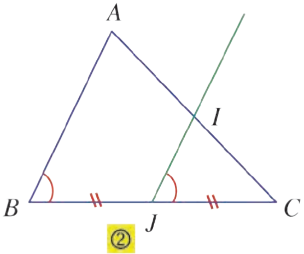


تذكَّر:

- المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان.
- المستقيمان المتوازيان ينطبقان إذا اشتركا بنقطة.

10 ABC مثلث. تنتمي I إلى $[AC]$ وتنتمي J إلى $[BC]$. في كلٍ من الشكلين ① و ② الآتيين، تقرأ معطيات عبر إشارات ملونة بالأحمر. استعمل هذه المعطيات في إثبات أنَّ I هي منتصف $[AC]$.





11 C و C' دائرتان متمركزتان في O، نصفا قطريهما على التوالي 2 cm و 4 cm.

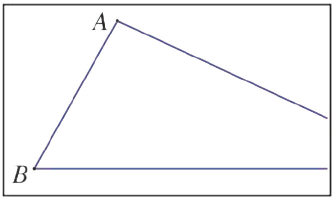
I و J نقطتان من C' تحققان $IJ = 5\text{ cm}$. القطعة $[OI]$ تقطع C في S، والمستقيم المار بالنقطة S موازياً (IJ) يقطع القطعة المستقيمة $[OJ]$ في T.

1. ارسم شكلاً حسب معطيات النص.
2. أثبت أنَّ T هي منتصف $[OJ]$.
3. استنتج أنَّ T تنتمي إلى الدائرة C.

12 MNP مثلث. B و C نقطتان من نصف المستقيم $[MN)$ تحققان $MB = \frac{3}{2}MN$ و $MC = \frac{1}{2}MB$. النقطة A هي منتصف $[MP]$.

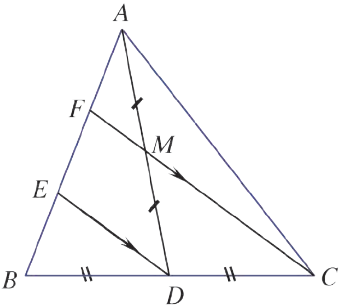
1. ارسم شكلاً متفقاً ومعطيات النص.
2. أثبت أنَّ المستقيمين (AC) و (BP) متوازيان.

13 في الشكل المرافق، ABC مثلث، والنقطة C مخفية!



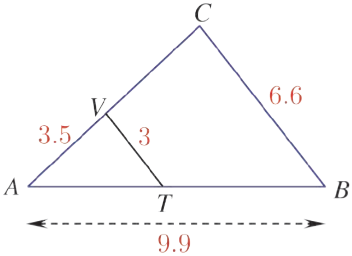
دون أن ترسم خارج الإطار، استخدم المسطرة والفرجار لرسم النقطة M منتصف $[AC]$ والنقطة N منتصف $[BC]$.

14 ABC مثلث. D منتصف $[BC]$ و M منتصف $[AD]$. المستقيم (CM) يقطع $[AB]$ في F. نرسم من D المستقيم الموازي للمستقيم (CF)، فيقطع (AB) في E.



1. أثبت أنَّ F هي منتصف $[AE]$.
2. أثبت أنَّ E هي منتصف $[BF]$.

15 في الشكل المرافق، ABC و ATV مثلثان.

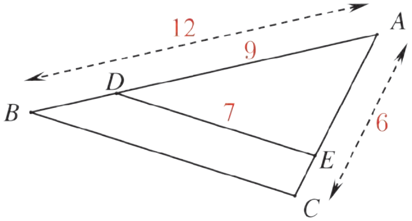


(TV) و (BC) متوازيان.

انسخ الجدول الآتي وأكمله.

أطوال أضلاع المثلث ATV	$AV = 3.5$	$AT = \cdots\cdots$	$TV = 3$
أطوال أضلاع المثلث ABC	$AC = \cdots\cdots$	$AB = 9.9$	$BC = 6.6$

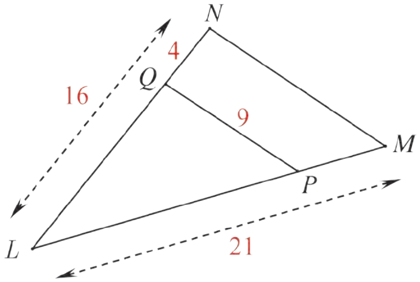
16 في الشكل المرافق:



$D \in [AB]$ و $E \in [AC]$ و $(DE) \parallel (BC)$.

1. احسب طول القطعة $[AE]$.
2. احسب BC مقرباً الجواب لرقم عشري واحد.

17 في الشكل المرافق:



$P \in [LM]$ و $Q \in [LN]$ و $(PQ) \parallel (MN)$.

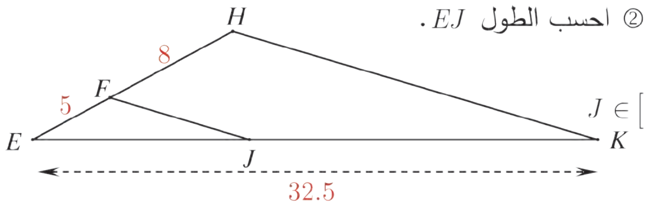
احسب كلاً من الطولين LP و MN.

لإحراز تقدّم

18 في كلٍّ من الحالتين ① و ② احسب الطول EJ.

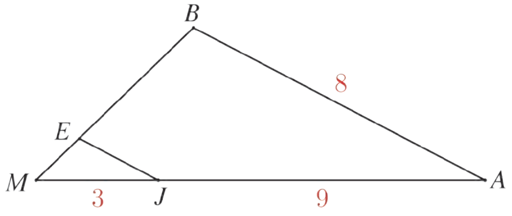
① $F \in [EH]$ و $J \in [EK]$

و $(FJ) \parallel (HK)$



② $E \in [MB]$ و $J \in [MA]$

و $(EJ) \parallel (BA)$

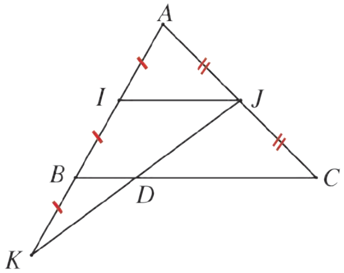


19 تعلّم تحرير إثبات

اقرأ النص والحل المنجز من قبل أحد الطلاب. ثم حرِّرْ الحل مع الأخذ بمجمل ملاحظات المصحح.

خذْ بالاعتبار المعلومات المعبر عنها بالرموز على الشكل المرافق،

ثم أثبت أنَّ النقطة D هي منتصف القطعة $[JK]$.



حل الطالب، مع ملاحظات المصحح

- $(IJ) \parallel (BC)$، إذن $(IJ) \parallel (BD)$

هذا ليس من معطيات النص

- B هي منتصف $[IK]$ و $(IJ) \parallel (BD)$، إذن D هي منتصف $[JK]$

جيد، ولكن عليك أن تذكر في أي مثلث تعمل.

20 تحليل مخطط الإثبات

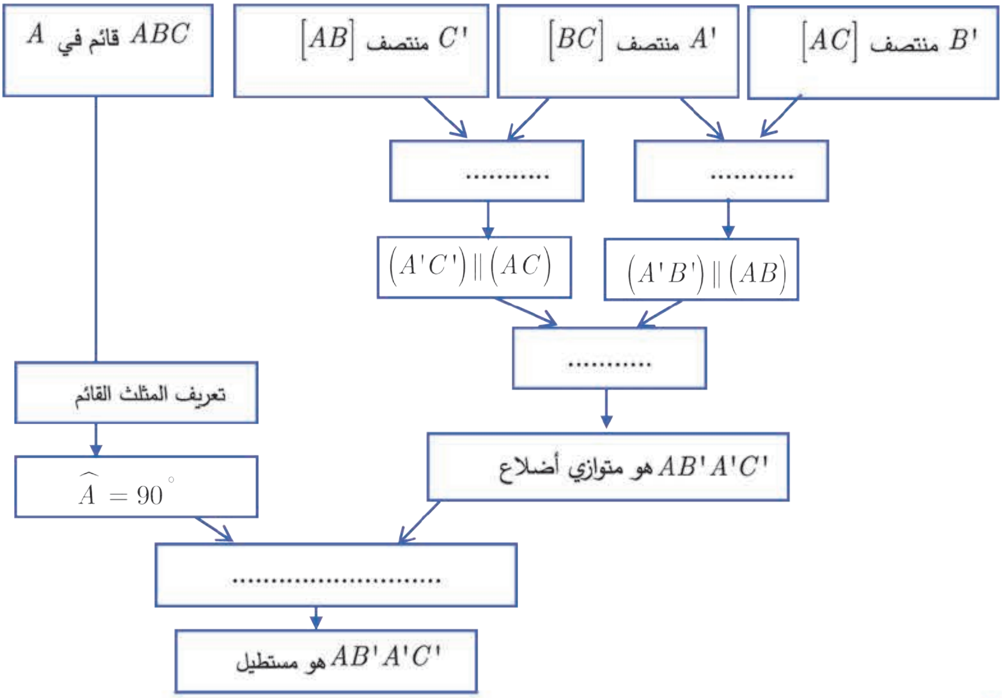
ABC مثلث قائم في A. النقطة A' هي منتصف $[BC]$ والنقطة B' هي منتصف $[AC]$ و C' هي منتصف $[AB]$. ما نوع الرباعي $AB'A'C'$؟ حقِّقْ إجابتك.

1. ما هي معطيات هذا النص؟

2. ارسم شكلاً يتفق مع النص وثبت عليه رموزاً دالة على معطيات النص.

3. إجابة من النمط « $AB'A'C'$ هو مستطيل » هل هي مرضية بالنسبة لما هو مطلوب؟

4. إليك طريقة للتحقق من إجابتك:



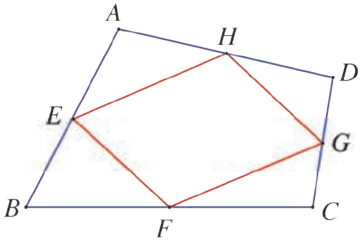
① أعد كتابة المخطط السابق وأكمله بملء الأطر المنقطة بما يناسب.

② أين تتوضع معطيات النص؟ وأين تتوضع النتيجة النهائية؟

③ صغْ إثباتاً بلغة سليمة.

21 في شكلٍ رباعي

E و F و G و H هي منتصفات أضلاع $ABCD$. أثبت أنَّ $EFGH$ هو متوازي أضلاع.



22 استعمال للمنتصف

ABC مثلث. M نقطة من الضلع $[AB]$، والمستقيم المرسوم من M موازياً (BC) يقطع الضلع AC في N. النقطة K هي صورة النقطة M وفق التناظر الذي مركزه B. L هي نقطة تقاطع القطعتين $[BC]$ و $[KN]$. أثبت أنَّ النقطة L هي منتصف القطعة $[KN]$.

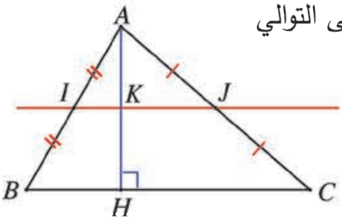
توجيه:

- ارسم شكلاً يتفق ومعطيات النص.
- رمِّزْ القطع المستقيمة المتساوية، ولوّنْ مستقيمين متوازيين.
- لماذا يمكن استعمال مبرهنة المنتصفات الثانية؟ وفي أي مثلث؟
- أنجز الحل بلغة سليمة.

23 محور قطعة مستقيمة

1. ارسم قطعة مستقيمة $[AB]$ طولها 6 cm، ثم ارسم محورها (d).
2. ارسم المستقيم (d') ماراً بالنقطة B وموازياً المستقيم (d).
3. وضِّعْ النقطة E على المستقيم (d') بحيث يكون $BE = 7\text{ cm}$.
4. ارمز إلى نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (AE) بالرمز M.
5. أثبت أنَّ M هي منتصف القطعة المستقيمة $[AE]$.
6. لتكن N منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. احسب مساحة المثلث AMN.

24 ارتفاع ومحور



في الشكل المرافق: $[AH]$ ارتفاع للمثلث ABC، I و J هما على التوالي منتصفا $[AB]$ و $[AC]$، والمستقيم (IJ) يقطع $[AH]$ في K.

1. أثبت أنَّ K هي منتصف $[AH]$.

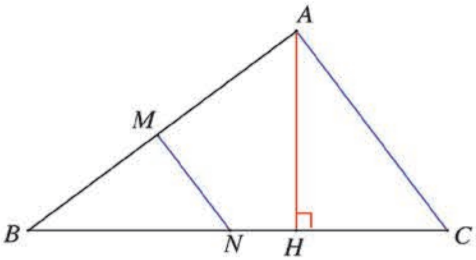
2. أثبت أنَّ المستقيم (IJ) هو محور القطعة المستقيمة $[AH]$.

25 انطلاقاً من معين

$ABCD$ معين مركزه O، والنقطة E هي نظيرة النقطة A بالنسبة إلى B.

1. ارسم شكلاً يتفق ومعطيات النص.
2. أثبت أنَّ المستقيمين (EC) و (OB) متوازيان.
3. ما نوع المثلث ACE؟ علِّلْ إجابتك.

26 محيط ومساحة مثلث



في الشكل المرافق:

(MN) و (AC) متوازيان و $[AH]\perp[BC]$.

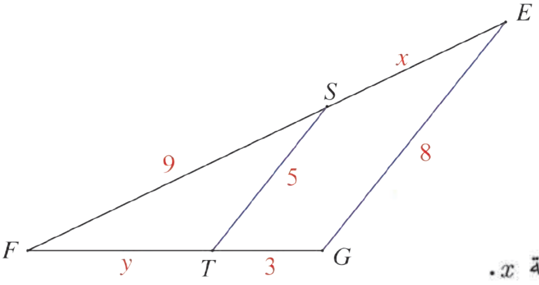
$BN = 3 \text{ cm}$ و $BM = 2.4 \text{ cm}$

و $AB = 5 \text{ cm}$ و $MN = 1.8 \text{ cm}$.

1. احسب محيط المثلث ABC.

2. $AH = 3 \text{ cm}$، احسب مساحة المثلث ABC، ثم مساحة المثلث BMN.

27 استعمال مجاهيل



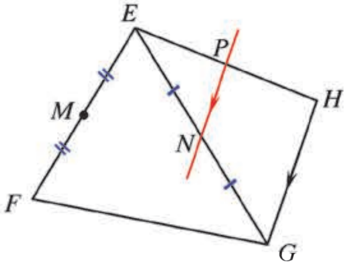
1. احسب FE بدلالة x و FG بدلالة y.

2. طبق مبرهنة « النسب المتساوية الثلاث » على المثلثين FTS و FGE.

3. استنتج أنَّ $5(9+x)=72$، ثم احسب قيمة x.

4. احسب قيمة y، ثم استنتج أنَّ المثلث FGE هو متساوي الساقين.

28 من توازٍ إلى تواز



في الشكل المرافق:

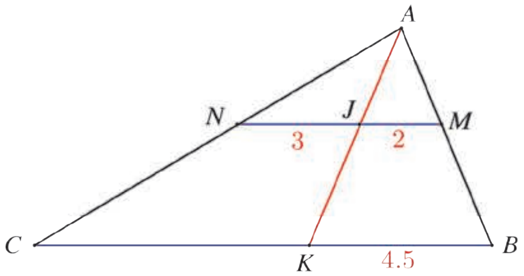
M منتصف القطعة $[EF]$ و N منتصف $[EG]$.

المستقيم (NP) يوازي (GH).

1. ما الموقع الخاص بالنقطة P. اشرح إجابتك.

2. أثبت أنَّ المستقيم (MP) يوازي المستقيم (FH).

29 نسب متساوية

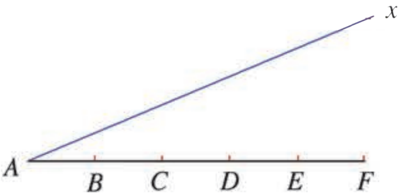


في الشكل المرافق، تجد أطوال بعض القطع.

وعُلم أنَّ $(BC)\parallel(MN)$.

احسب BC.

30 تقسيم قطعة مستقيمة



• تأمل الشكل المرافق، ووضعْ نقطةً M على نصف المستقيم $[Ax)$.

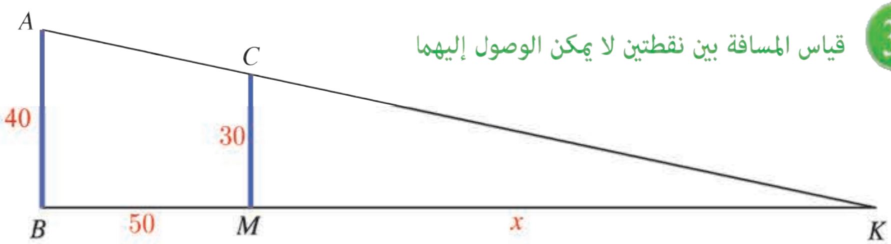
• دون استعمال مسطرة مدرجة، قسِّمْ القطعة المستقيمة $[AM]$ إلى خمس قطع متساوية.

31 قياس ارتفاع برج

لقياس ارتفاع البرج الذي تشاهد تصويراً له، وقفت جوري، التي طولها $1.70\ \mathrm{m}$، على بعد $1\ \mathrm{m}$ من جدار ارتفاعه $2\ \mathrm{m}$ ويبعد عن البرج مسافة $57\ \mathrm{m}$، فرأت من البرج قمته.

1. ارسم شكلاً معبراً وارمز إلى النقاط المميزة ووضِّعْ الأطوال على القطع المعلومة.
2. احسب ارتفاع البرج.

32 قياس المسافة بين نقطتين لا يمكن الوصول إليهما



$[MC]$ و $[BA]$ برجا مراقبة، ارتفاعاهما $MC = 30\ \mathrm{m}$ و $BA = 40\ \mathrm{m}$، $[MC]$ على شاطئ البحر و $[BA]$ على بعد $50\ \mathrm{m}$ عن الشاطئ. K قارب في البحر على مسافة x عن البرج $[MC]$، بحيث يشاهد من A و C كما في المخطط المرسوم أعلاه.

1. اشرح لماذا $\dfrac{AB}{CM} = \dfrac{KB}{KM}$.

2. لاحظ أنَّ $KB = x + 50$. استفد من هذه الملاحظة لبيان أنَّ $x + 50 = \dfrac{4}{3}x$.

3. احسب بعد القارب عن الشاطئ.

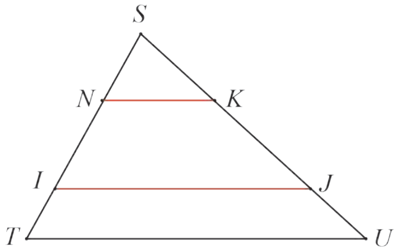
33 في كلٍّ من الحالتين ① و ② اكتب كل تساوي ثلاث نسب، مع ذكر المثلثين المعنيين:

① S و N و I و T على استقامة واحدة

S و K و J و U على استقامة واحدة

$(NK) \parallel (IJ)$

و $(IJ) \parallel (TU)$



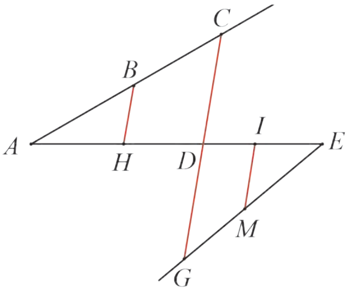
② A و B و C على استقامة واحدة

A و H و D و I و E على استقامة واحدة

C و D و G على استقامة واحدة

$(BH) \parallel (CG)$ و $(CG) \parallel (IF)$

E و M و G على استقامة واحدة



34 **التعرف، من جديد، بمنتصف قطعة مستقيمة**

في كلٍّ من الحالات الآتية، ارسم شكلاً متفقاً مع النص، ثم دل على منتصف كل قطعة مستقيمة.

① $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O.

② A هي صورة B بالنسبة إلى التناظر الذي مركزه M.

③ $AB = 8 \text{ cm}$. J نقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$ تحقق $JB = 4 \text{ cm}$.

④ A و B و C و D أربع نقاط، بهذا الترتيب، على استقامة واحدة وتحقق:

$AB = 5 \text{ cm}$ و $BC = 2.5 \text{ cm}$ و $CD = 2.5 \text{ cm}$.

⑤ محور القطعة المستقيمة $[MN]$ يقطعها في M.

تذكَّر

القول « M منتصف $[AB]$ » يعني، بالتعريف:

- A و M و B على استقامة واحدة.
- $MA = MB$.

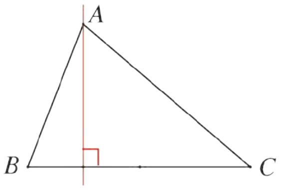
الوحدة الثالثة

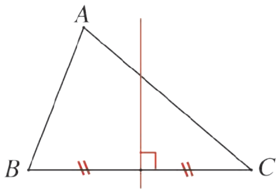
مستقيمات مميزة في المثلث

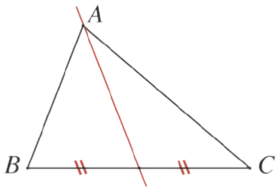
انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، أشر إليها:

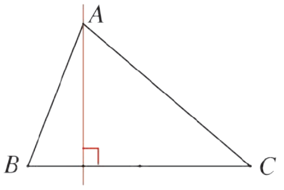
① محور الضلع $[BC]$ في المثلث ABC هو في الشكل .....

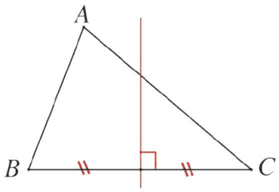

①

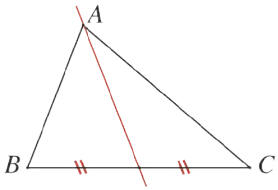

②


③

② الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC هو في الشكل .....


①

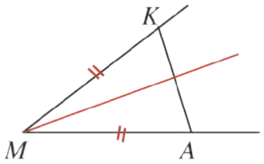

②

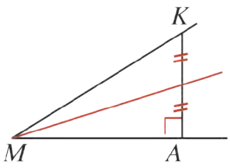

③

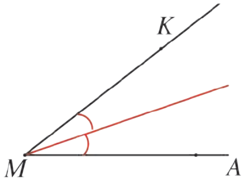
③ (d) هو محور القطعة $[JK]$ و M تنتمي إلى (d).

① $MJ > MK$ ② $MJ < MK$ ③ $MJ = MK$

④ منصف الزاوية $\widehat{AMK}$ مرسوم في الشكل .....


①


②

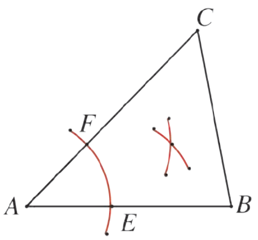

③

⑤ الأقواس الدائرية التي مراكزها E و F و A وأنصاف أقطارها متساوية تفيد في رسم:

① الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

② محور الضلع $[BC]$.

③ منصف الزاوية $\widehat{BAC}$.



1 محور ضلع في المثلث

نشاط « محاور أضلاع المثلث متلاقية »

.1 ① ارسم مثلثاً ABC ثم ارسم (d) محور ضلعه $[AB]$ و (d') محور ضلعه $[BC]$.

② ارمز إلى نقطة تقاطع (d) و (d') بالرمز O.

يجب ألّا يُرسم شكل في حالة خاصة. في مثالنا لا يجب رسم مثلث قائم أو متساوي الساقين

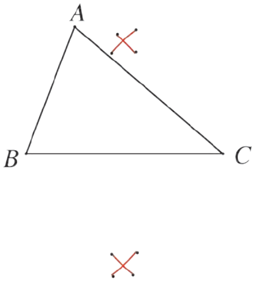
.2 ① ما خاصة المحور التي تسمح بتأكيد كلٍ من المساواتين $OA = OB$ و $OB = OC$؟

② بالاستفادة من الفقرة ①، اشرح لماذا تنتمي O إلى محور $[AC]$.

.3 ① ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O والمارة بالنقطة A.

② تأمل ثم اشرح ما سبق.

③ أعط نقاطاً تمر منها الدائرة $\mathscr{C}$؟



.4 الأقواس الدائرية التي مراكزها B و C وأنصاف أقطارها متساوية

حدد مما يأتي بماذا تفيد هذه الأقواس:

① في رسم الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

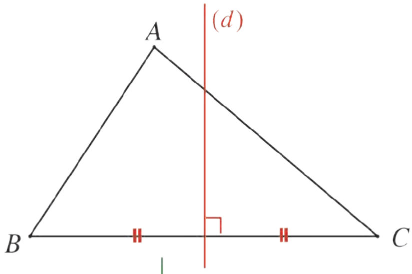
② في رسم محور الضلع $[BC]$.

③ في رسم منصف الزاوية $\widehat{BAC}$.

تعلّم

تعريف

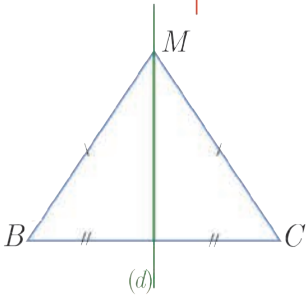
محور ضلع في المثلث هو المستقيم العمودي على هذا الضلع في منتصفه.



خواصّ

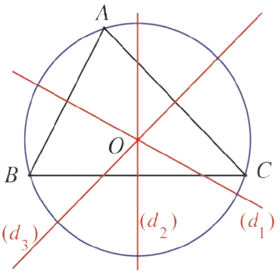
إذا كان (d) محور القطعة المستقيمة $[BC]$، عندئذ:

- أياً كانت M من (d)، كان $MB = MC$.
- إذا كانت النقطة M تحقق $MB = MC$، كانت M نقطةً من (d).

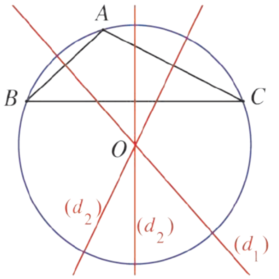


خاصة وتعريف

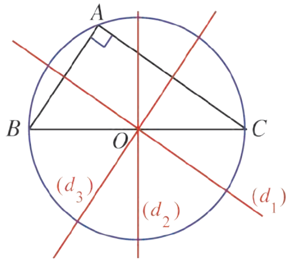
- المحاور الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة O.
- النقطة O هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث.
- $OA = OB = OC$.



المثلث ABC حاد الزوايا



المثلث ABC منفرج في $\widehat{A}$



المثلث ABC قائم في $\widehat{A}$

تحقّق من فهمك

① ارسم دائرة مركزها O وضَعْ عليها ثلاث نقاط A و B و C.

② ارسم مستعيناً بالفرجار المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث ABC.

③ ما الملفت في الشكل الذي رسمته؟

تدرّب

① ارسم مثلثاً ABC وارسم محوري ضلعيه $[AB]$ و $[BC]$. ارمز إلى نقطة تقاطعهما بالرمز M.
أثبت أنَّ المثلث MAC متساوي الساقين.

② المثلثان ABC و ABD متساويا الساقين في A.
① ارسم شكلاً.
② ما مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث BCD؟

② ① ارسم مثلثاً ABC أطوال أضلاعه $AB = 5\text{ cm}$ و $BC = 7.5\text{ cm}$ و $CA = 8\text{ cm}$.
② ارسم ثلاث دوائر مراكزها رؤوس المثلث ABC ونصف قطر كلٍ منها أكبر من 5 cm.
③ ارسم المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث ABC.
④ ما الملفت فيما يتعلق بالدوائر الثلاث والمحاور الثلاثة؟

2 ارتفاع مثلث.

نشاط « ملاحظة ثم تأكيد أنّ ارتفاعات المثلث متلاقية »

1. تعبير

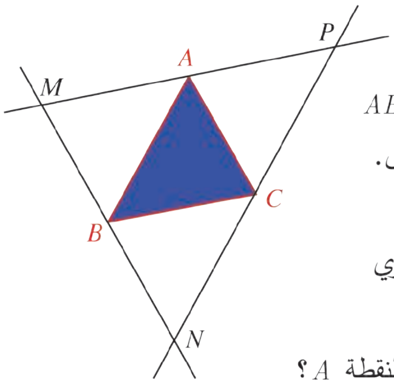
في كل من الحالات الآتية، ارسم مثلثاً ABC وارسم ارتفاعاته المتعلقة بأضلاعه الثلاثة. ماذا تلاحظ؟

1. المثلث ABC حاد الزوايا.

2. في المثلث ABC زاوية منفرجة.

3. في المثلث ABC زاوية قائمة.

2. إثبات



في الشكل المرافق ثلاثة مستقيمات مارة برؤوس المثلث ABC متلاقية في M و N و P وكل منها يوازي الضلع المقابل.

1. ارسم الشكل لديك.

2. لماذا كلّ من الرباعيين $MACB$ و $BACN$ هو متوازي أضلاع؟

اشرح، إذن، لماذا $MA = AP$؟ ماذا تستنتج فيما يتعلق بالنقطة A؟

3. بطريقة مماثلة، ماذا تستنتج فيما يتعلق بكل من النقطتين B و C؟

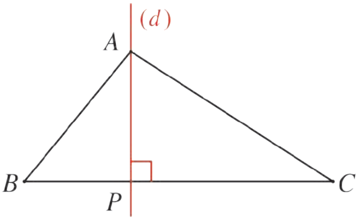
4. ارسم محاور أضلاع المثلث MNP. ارمز إلى نقطة تلاقيها بالرمز H.

5. ماذا تعني تلك المحاور بالنسبة إلى المثلث ABC؟

اشرح إجابتك، ثم اكتب نصاً، لخاصة متعلقة بارتفاعات مثلث.

تعلّم

تعريف ارتفاع المثلث



هو المستقيم المار بأحد رؤوسه والعمودي على الضلع المقابل لهذا الرأس.

في الشكل المرسوم جانباً:

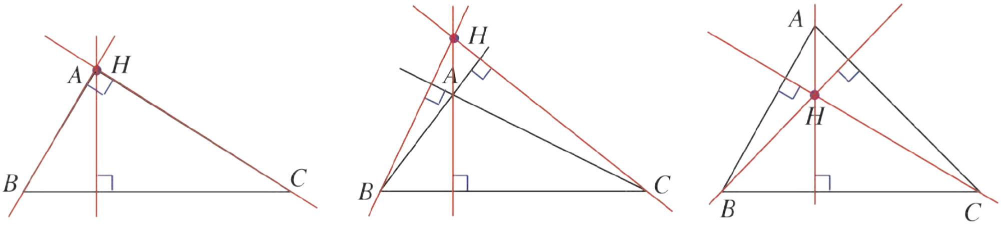
نقول إنّ النقطة P هي موقع الارتفاع (d) المرسوم من A،

وهي مسقط A على (BC).

ونقول أحياناً إنّ القطعة المستقيمة $[AP]$ هي الارتفاع المرسوم من A للمثلث ABC.

خاصة وتعريف

الارتفاعات الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة H .



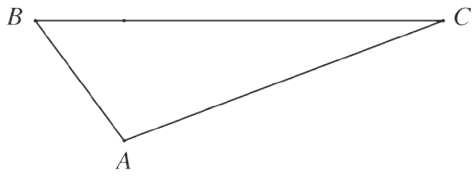
المثلث ABC حاد الزوايا — المثلث ABC منفرج في $\widehat{A}$ — المثلث ABC قائم في $\widehat{A}$

اكتســاب معــارف

كيف نحدد نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث (مركز تعامد المثلّث)؟

- لتحديد نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث، يكفي رسم ارتفاعين له. فتكون نقطة تقاطعهما هي نقطة تلاقي ارتفاعات هذا المثلث.

مثال ارسم مثلثاً ABC زاويته $\widehat{A}$ منفرجة، مثل المثلث المرسوم جانباً. ارسم نقطة تلاقي الارتفاعات H .



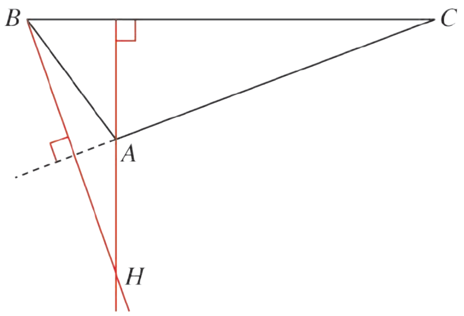
لرسم الارتفاع من الرأس B ، نمدِّد نصف المستقيم $[CA)$.

الحلّ

نرسم ارتفاعي المثلث من A و B

فيتقاطعان في نقطةٍ H ، هي نقطة تلاقي الارتفاعات.

(لاحظ أنَّ H تقع خارج المثلث ABC)



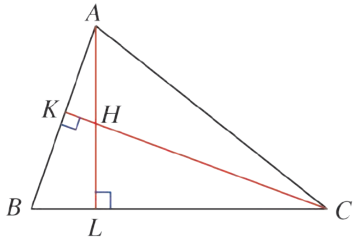
مثال $[AL]$ و $[CK]$ ارتفاعان في المثلث ABC .

H هي نقطة تلاقي الارتفاعات هذا المثلث.

أين تقع نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث AHC . اشرح إجابتك.

لتحديد نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث AHC نبحث عن ارتفاعين لهذا المثلث.

الحلّ



في المثلث AHC:

(CH) و (AB) متعامدان، إذن $[AB]$ هو الارتفاع المرسوم من A.

(AH) و (CB) متعامدان، إذن $[CB]$ هو الارتفاع المرسوم من C.

هذان الارتفاعان متقاطعان في B، فنقطة تلاقي ارتفاعات المثلث AHC هي النقطة B.

تحقّق من فهمك

ارسم مثلثاً ABC بحيث يكون $\widehat{B} = 120^\circ$ و $BA = 5 \text{ cm}$ و $BC = 4 \text{ cm}$.

ثم عين على الرسم نقطة تلاقي ارتفاعات هذا المثلث.

تدرّب

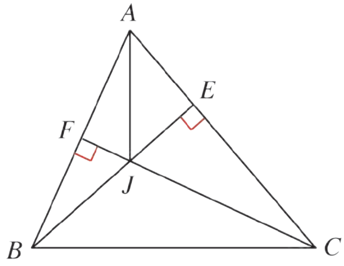
① ارسم مثلثاً ABC وارسم نقطة تلاقي ارتفاعاته H.

ما نقطة تلاقي ارتفاعات كلٍ من المثلثات AHB و AHC و BHC.

② في الشكل المجاور، $[BE]$ و $[CF]$ ارتفاعان في المثلث ABC.

النقطة J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

ما نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث AJB. اشرح إجابتك.

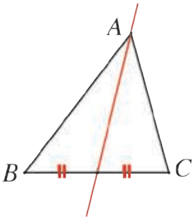


④ $ABCD$ مستطيل مركزه O. العمود المرسوم من O على (AC) يلاقي (DC) في N و (AD) في M.

1. ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات النص.
2. ما نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث AMC؟
3. ارسم الارتفاع الثالث لهذا المثلث.

3 المتوسط في المثلث.

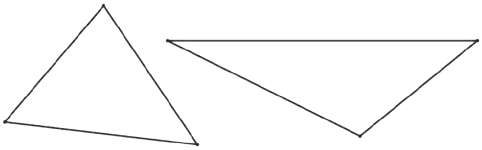
نشاط « ملاحظة ثم تأكيد أنَّ متوسطات المثلث متلاقية »



معنى الكلمات

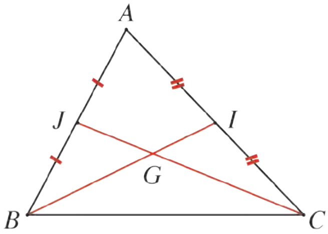
المتوسط المرسوم من A في المثلث ABC، هو المستقيم المار بالنقطة A ومنتصف الضلع المقابل $[BC]$

1. اختبار



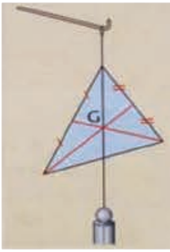
1. ارسم المثلثين ABC و EFJ.
2. ارسم المتوسطات الثلاثة لكلٍ منهما.
3. ماذا تلاحظ؟

2. إثبات



ABC مثلث، I و J منتصفا ضلعيه $[AC]$ و $[AB]$.
نرمز إلى نقطة تقاطع متوسطيه (BI) و (CJ) بالرمز G.
سنستعرض إثباتاً لكون (AG) هو المتوسط الثالث لهذا المثلث.

1. ارسم الشكل المرافق.
2. ارسم النقطة D صورة A وفق التناظر الذي مركزه G.
   ارمز إلى نقطة تقاطع (AD) و (BC) بالرمز K.
3. في المثلث ABD، لماذا يمكن تأكيد أنَّ $(BD) \parallel (JG)$؟ وتأكيد أنَّ $BD = 2JG$؟
4. ما القضايا التي يمكن تأكيدها في المثلث (ACD) بمثل ما أكدت في المثلث ABD؟
5. ما طبيعة الرباعي $BGCD$؟
   اشرح إجابتك، ثم استنتج أنَّ (AK) هو المتوسط الثالث في المثلث ABC.
6. اشرح لماذا: $BG = 2GI$ و $CG = 2GJ$ و $AG = 2GK$.
7. اكتب الخواص التي اكتشفتها والمتعلقة بمتوسطات المثلث ونقطة تلاقيها.

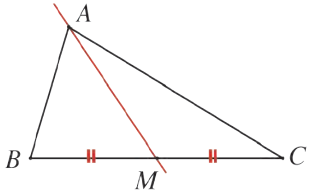


معنى الكلمات

في الفيزياء تسمى G نقطة تلاقي متوسطات المثلث « مركز ثقل المثلث ».
إذا علقت صفيحة مثلثية متجانسة، من نقطة منها فإنَّ الشاقول المار بنقطة التعليق يمر بالنقطة G.

تعلّم

تعريف المتوسط



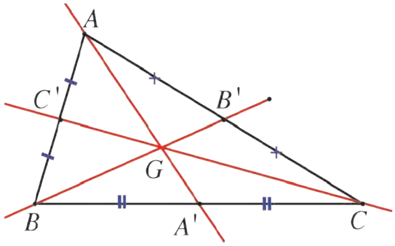
هو المستقيم المار بأحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابلة لهذا الرأس.

في الشكل المرسوم جانباً، نقول إنَّ القطعة المستقيمة $[AM]$ هي المتوسط المرسوم من A في المثلث ABC.

خاصة وتعريف

المتوسطات الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة G. تسمى هذه النقطة **مركز ثقل** المثلث.

خواص



نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC، ولتكن G، تقع في نهاية الثلث الثاني لكل من المتوسطات

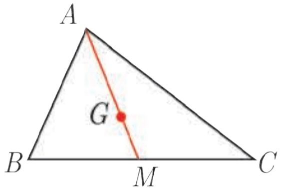
$[AA']$ و $[BB']$ و $[CC']$، أي إنَّ:

$AG = \frac{2}{3}AA'$ و $BG = \frac{2}{3}BB'$ و $CG = \frac{2}{3}CC'$.

اكتساب معارف

كيف نرسم مركز ثقل مثلث؟

لرسم مركز ثقل مثلث، يكفي رسم متوسطين فيه. نقطة تقاطعهما هي مركز الثقل.



مثال في المثلث ABC المرسوم جانباً:

النقطة M هي منتصف $[BC]$، $G \in [AM]$

$AG = 2.4$ cm و $GM = 1.2$ cm.

اشرح لماذا G هي مركز ثقل المثلث ABC.

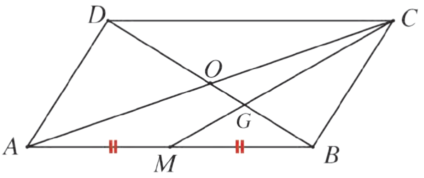
مركز ثقل المثلث هو النقطة الواقعة في نهاية الثلث الثاني من أحد المتوسطات بدءاً من رأس المثلث.

الحلّ

M هي منتصف $[BC]$، إذن $[AM]$ هو متوسط في المثلث ABC.

$AG = 2.4 = 2\times 1.2 = 2GM$، أي إنَّ $AG = \frac{2}{3}AM$. وبهذا تكون G مركز ثقل المثلث.

مثال



$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. النقطة M هي منتصف $[AB]$، و G هي نقطة تقاطع (CM) و (BD). اشرح لماذا G هي مركز ثقل المثلث ABC.

مركز ثقل المثلث هو نقطة تقاطع إثنين من متوسطاته.

الحلّ

في المثلث ABC: M هي منتصف $[AB]$، إذن $[CM]$ متوسط في هذا المثلث.

O هي منتصف $[AC]$، لأنَّ قطري متوازي الأضلاع $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان في O، إذن $[BO]$ متوسط آخر في هذا المثلث.

G هي نقطة تقاطع المتوسطين $[CM]$ و $[BO]$ في المثلث ABC، فهو مركز ثقله.

تحقّق من فهمك

ارسم مثلثاً ABC فيه $AB = 7\text{ cm}$ و $\widehat{A} = 70^\circ$ و $AC = 8\text{ cm}$.

ثم ارسم مركز ثقل هذا المثلث.

تدرّب

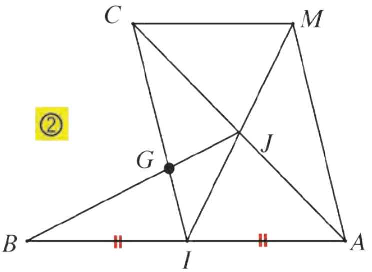
① في كلٍ من الحالتين ① و ② الآتيتين اشرح لماذا G هي مركز ثقل المثلث ABC.

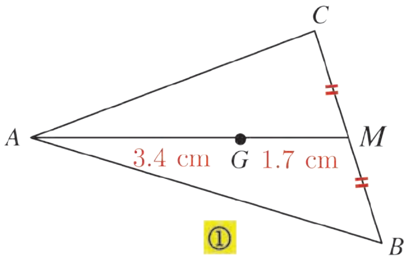
① النقطة M هي منتصف الضلع $[BC]$ في المثلث ABC. $G \in [AM]$ وتحقق $AG = 3.4\text{ cm}$ و $GM = 1.7\text{ cm}$.

② $AMCI$ متوازي أضلاع مركزه J.

النقطة I هي منتصف القطعة $[AB]$ و G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (BJ).

②

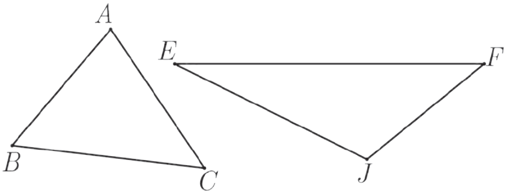




①

4 منصّف زاوية مثلث.

نشاط « ملاحظة ثم تأكيد أنَّ منصفات زوايا المثلث متلاقية »

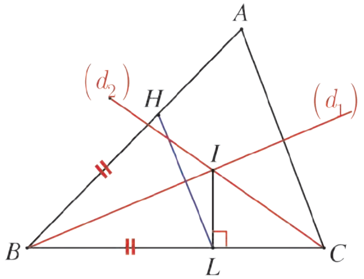


1. اختبار

1. ارسم المثلثين ABC و EFJ.

2. ارسم منصفات الزوايا الثلاث في كلّ منهما. ماذا تلاحظ؟

2. إثبات:



ABC مثلث، (d_1) و (d_2) منصفا زاويتيه $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$.

نرمز إلى نقطة تقاطع (d_1) و (d_2) بالرمز I.

سنستعرض إثباتاً لكون (AI) هو منصف الزاوية $\widehat{A}$.

1. ارسم الشكل المرافق.

2. ارسم النقطة L مسقط I على (BC). وضَعْ على $[BA]$ نقطة H تحقق $BH = BL$.

3. لماذا (BI) هو محور تناظر للمثلث BHL؟ ولماذا هو محور ضلعه $[HL]$؟

استنتج أنَّ $IH = IL$ وأنَّ $\widehat{IHB} = 90^\circ$.

4. وضَعْ على $[AC]$ نقطة K تحقق $CK = CL$. أثبت أنَّ $IK = IL$ وأنَّ $\widehat{IKC} = 90^\circ$.

5. ما صفة النقطة I في المثلث HKL؟

(سنقبل أنَّ $AH = AK$، وإثبات ذلك هو حسب مبرهنة سترد في الفصل التالي)

بعد هذا، بما يمكن أن تصف المستقيم (AI) بالنسبة إلى القطعة المستقيمة $[HK]$؟

6. اشرح إذن، لماذا (AI) هو منصف الزاوية $\widehat{A}$؟

7. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها I، والمارة بالنقطة L.

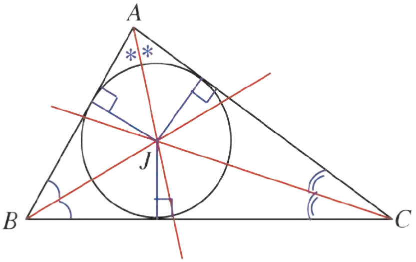
سنجد في وحدة قادمة، أنَّ الدائرة $\mathscr{C}$ تمس داخلاً أضلاع المثلث ABC في النقاط L و H و K وتسمى الدائرة الماسة لأضلاع المثلث داخلاً.

تعلّم

تعريف

منصف الزاوية $\widehat{A}$ هو المستقيم المار بالنقطة A ويقسم هذه الزاوية إلى زاويتين قياساهما متساويان.

خاصة وتعريف



المنصفات الثلاثة لزوايا المثلث تلتقي في نقطة واحدة J.

النقطة J هي **مركز الدائرة** الماسة لأضلاع المثلث داخلاً.

لرسم الدائرة المارة برؤوس مثلث، يكفي رسم محوري إثنين من أضلاعه. نقطة تقاطعهما هي مركز تلك الدائرة.

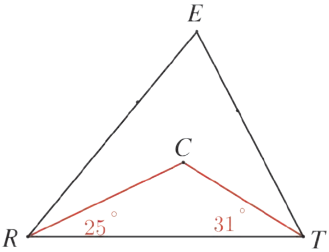
لرسم الدائرة الماسة لأضلاع المثلث داخلاً ، يكفي رسم منصفي إثنتين من زواياه. نقطة تقاطعهما هي مركز تلك الدائرة.

تحقّق من فهمك

ABC مثلث فيه $BC = 7\text{ cm}$ و $\widehat{CBA} = 36^\circ$ و $\widehat{BCA} = 64^\circ$.

ارسم هذا المثلث وارسم منصفات زواياه الثلاث.

تدرّب



① في الشكل المرسوم جانباً:

النقطة C هي مركز الدائرة المرسومة في المثلث ERT.

احسب قياس الزاوية $\widehat{RET}$. علّلْ إجابتك.

② ABC مثلث فيه $\widehat{ABC} = 84^\circ$ و $\widehat{ACB} = 62^\circ$. J هي نقطة تقاطع منصفي هاتين الزاويتين.

1. ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات النص.
2. احسب قياس الزاوية $\widehat{BAC}$.
3. احسب قياسات زوايا كلٍ من المثلثات JAB و JBC و JCA.

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات. أشر إليها.

❶ في مثلث ABC، Δ محور $[BC]$ و الارتفاع المرسوم من A

① يتقاطعان في منتصف $[AB]$. ② يتقاطعان في A. ③ متوازيان.

❷ مركز ثقل المثلث هو نقطة تلاقي

① محاور أضلاعه. ② متوسطاته. ③ منصفات زواياه.

❸ مركز الدائرة الماسة لأضلاع المثلث داخلاً هو نقطة تلاقي ...

① محاور أضلاعه. ② متوسطاته. ③ منصفات زواياه.

❹ مركز الدائرة المارة برؤوس مثلث هو نقطة تلاقي

① محاور أضلاعه. ② متوسطاته. ③ منصفات زواياه.

❺ إذا كان المثلثُ منفرج الزاوية، كانت نقطة تلاقي ارتفاعاته

① داخل المثلث. ② خارج المثلث. ③ لا يمكن التكهن بموقعها.

❻ G هي مركز ثقل المثلث ABC، J هي منتصف $[BC]$، إذن

① $AG = \frac{1}{3}AJ$. ② $GJ = \frac{1}{2}AG$. ③ $AJ = 3AG$.

❼ إذا كان المثلثُ حاد الزاويا، كان مركز ثقل المثلث

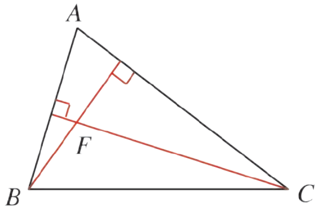
① داخل المثلث. ② خارج المثلث. ③ لا يمكن التكهن بموقعه.

❽ في الشكل المجاور، المستقيم (AF) هو

① متوسط في المثلث.

② ارتفاع في المثلث.

③ محور أحد أضلاعه.

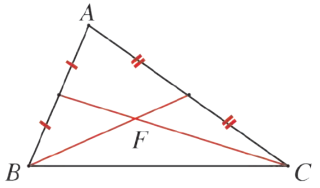


❾ في هذا الشكل المجاور، المستقيم (AF) هو

① متوسط في المثلث.

② ارتفاع في المثلث.

③ محور أحد أضلاعه.



2 قلْ إن كنت موافقاً أم لا على التأكيدات الآتية:

❶ مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث يقع دوماً داخل المثلث.

❷ نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث يمكن أن تقع على أحد أضلاعه دون أن تقع على أحد رؤوسه.

❸ في المثلث القائم، تقع نقطة تلاقي الارتفاعات في رأس الزاوية القائمة لهذا المثلث.

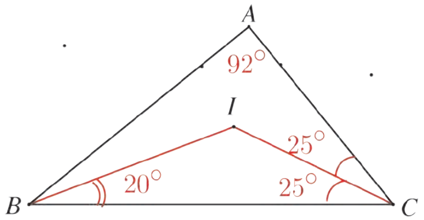
❹ في المثلث المتساوي الأضلاع، نقطة تلاقي الارتفاعات ومركزا الدائرتين المارة برؤوسه والماسة لأضلاعه داخلاً ومركز الثقل، جميع هذه النقاط منطبقة.

❺ في مثلث متساوي الساقين المتوسطات هي أيضاً ارتفاعات ومحاور ومنصفات زوايا المثلث.

❻ $[AI]$ متوسط في مثلثٍ ABC. النقطة J هي منتصف $[AB]$ والنقطة K هي منتصف $[AC]$.
إذن، المستقيمان (JK) و (AI) متقاطعان في مركز ثقل المثلث ABC.

❼ في الشكل المرافق:

I هي نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث.



3 SRT مثلث متساوي الساقين في S، والنقطة M منتصف ضلعه $[RT]$.

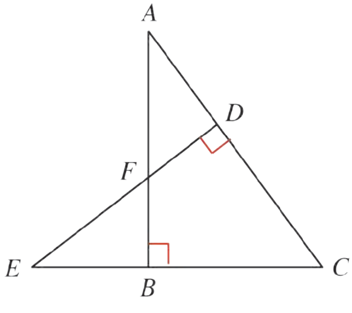
① ارسم شكلاً يناسب النص.

② لماذا تنتمي النقطة O، مركز الدائرة $\mathscr{C}$ المرسومة على المثلث SRT، إلى المستقيم (SM)؟

③ ارسم النقطة O والدائرة $\mathscr{C}$.

4 تشارك ثلاثة مزارعين في حفر بئر تملأ خزاناتهم، على أن تقع البئر على مسافات متساوية عن تلك الخزانات التي تبعد عن بعضها المسافات الآتية 30 m و 19.5 m و 21 m. ارسم مثلثاً ABC يمثل الخزانات الثلاث وأشر بنقطةٍ P إلى موقع البئر.

5 المثلثان ABC و ADE قائمان على التوالي في B و D.
النقاط A و D و C على استقامة واحدة، كذلك النقاط C و B و E. ولتكن F نقطة تقاطع (BA) و (ED).
أثبت أنَّ المستقيمين (AE) و (CF) متعامدان.



6 ABC مثلث فيه $AB = 5\text{ cm}$ و $BC = 6\text{ cm}$
و $CA = 7\text{ cm}$. ارسم هذا المثلث وارسم منصفات زواياه الثلاث.

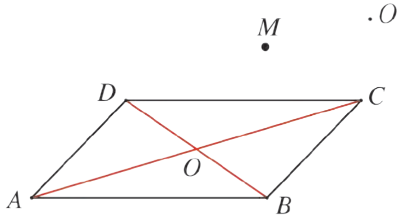
7 ① ارسم مثلثاً ABC متساوي الأضلاع، ثم ارسم الدائرة المارة برؤوسه ورمز مركزها بالرمز O

② ما مركز ثقل المثلث ABC ؟ علِّلْ إجابتك

9 ①ارسم مثلثاً ABC. وضِعْ النقطة D نظيرة A بالنسبة إلى B، والنقطة E نظيرة A بالنسبة إلى C. ارمز إلى نقطة تقاطع المستقيمين (DC) و (BE) بالرمز G.

② اشرح لماذا G هي مركز ثقل المثلث ADE.

10 M نقطة خارج متوازي الأضلاع $ABCD$ الذي مركزه O.



1. ارسم هذا الشكل.
2. لماذا $[MO]$ هو متوسط في المثلث MAC ؟
3. ضع على المتوسط $[MO]$ مركز ثقل المثلث MAC.
4. ما مركز ثقل المثلث MBD ؟ اشرح إجابتك.

11 $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O.

النقطة E هي مركز ثقل المثلث ABD والنقطة F هي مركز ثقل المثلث CBD.

1. ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات النص.
2. اشرح: لماذا $OA = OC$ ؟ ولماذا $OE = OF$ ؟
3. استنتج أنَّ $AE = EF = FC$.

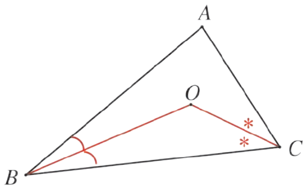
12 ABC مثلث، مركز ثقله G. النقاط I و J و K هي على التوالي منتصفات القطع المستقيمة $[BC]$ و $[BI]$ و $[IC]$.

1. ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات النص.
2. ما مركز ثقل المثلث AJK ؟ اشرح إجابتك.

13 ارسم مثلثاً ABC، وتابع رسم: • محور ضلعه $[BC]$.

• المتوسط المرسوم من A. • منصف الزاوية $\widehat{A}$. • الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

14 تأمل الشكل المرسوم جانباً.

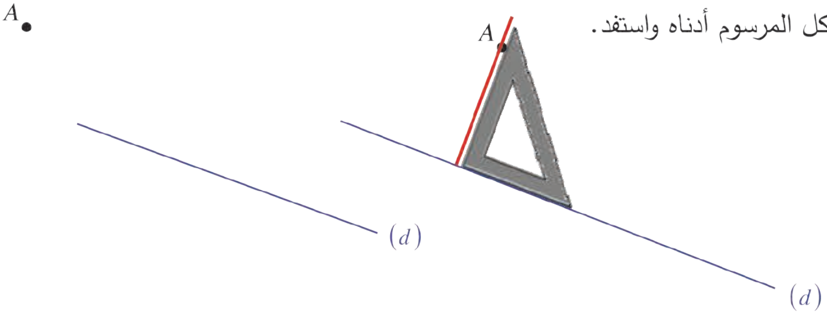


1. بما توحي النقطة O؟
2. ماذا تقول إذن عن المستقيم (OA).

لإحراز تقدّم

15 رسم الارتفاعات

لرسم العمود من النقطة A على المستقيم (d)، في بعض الحالات، علينا أن نمدد المستقيم.
انظر إلى الشكل المرسوم أدناه واستفد.



1. ارسم مثلثاً ABC منفرج الزاوية في B.
2. باستعمال الكوس ارسم كلاً من:
   ① ارتفاع المثلث المار بالرأس A.
   ② ارتفاع المثلث المار بالرأس B.
3. ارسم باستعمال المسطرة فقط، الارتفاع المار بالنقطة C.

16 رسم منصفات الزوايا

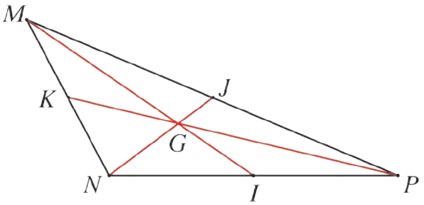
1. ارسم مثلثاً ABC منفرج الزاوية في B.
2. ارسم، باستعمال المنقلة والمسطرة، منصّف الزاوية $\widehat{BAC}$.
3. ارسم، باستعمال الفرجار والمسطرة، منصّف $\widehat{CBA}$.
4. ارسم، باستعمال المسطرة فقط، منصّف الزاوية $\widehat{ACB}$.

17 استعمال مركز ثقل مثلث

في الشكل المرافق، تجد مثلثاً MNP ومتوسطاته الثلاثة. إذا علمت أنَّ:

$MI = 5.4\ \text{cm}$ و $NI = 2.4\ \text{cm}$

و $PK = 5.8\ \text{cm}$:



① احسب الأطوال MG و NG و PG مقرباً النواتج إلى أقرب جزء من مئة (عند الحاجة)

② أكمل بملء الفراغات بعدد مناسب: $GI = \cdots MI$ و $MG = \cdots GI$ و $GI = \cdots MG$.

18 مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث

① ارسم مثلثاً ABC بمقاس كبير نسبياً ولا يكون متساوي الساقين.

② ارسم مركز تعامده H ومركز الدائرة المرسومة عليه O، ثم ارسم تلك الدائرة $\mathscr{C}$.

③ ارسم H_1 و H_2 و H_3 نظيرات النقطة H على التوالي بالنسبة إلى المستقيمات (AB) و (BC) و (CA).

④ ارسم J_1 و J_2 و J_3 نظيرات النقطة H على التوالي بالنسبة إلى النقاط I_1 و I_2 و I_3 منتصفات أضلاع المثلث ABC.

⑤ ما الخواص التي تستخلصها من الشكل الذي رسمته؟

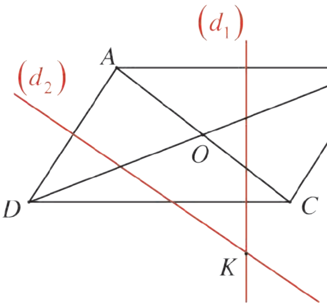
19 تعلّم صياغة نص

اقرأ النص والحلّ المنجز من قبل أحد الطلاب. ثم حرِّرْ الحل مع الأخذ بمجمل ملاحظات المصحح.

النص

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. (d_1) و (d_2) محورا $[AB]$ و $[AD]$ ، على التوالي، متقاطعان في K.

1. ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات النص.
2. أثبت أنَّ $(BD) \perp (OK)$.



حلّ الطالب، مع ملاحظات المصحّح

1. الرسم
2.

- K هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABD

هذا ليس من معطيات النص، عليك أن تشرح لماذا.

- إذن (OK) هو محور $[BD]$

جيد، لكنك نسيت تأكيد أنَّ O هي منتصف $[BD]$ ولماذا.

- إذن (OK) و (BD) متعامدان.

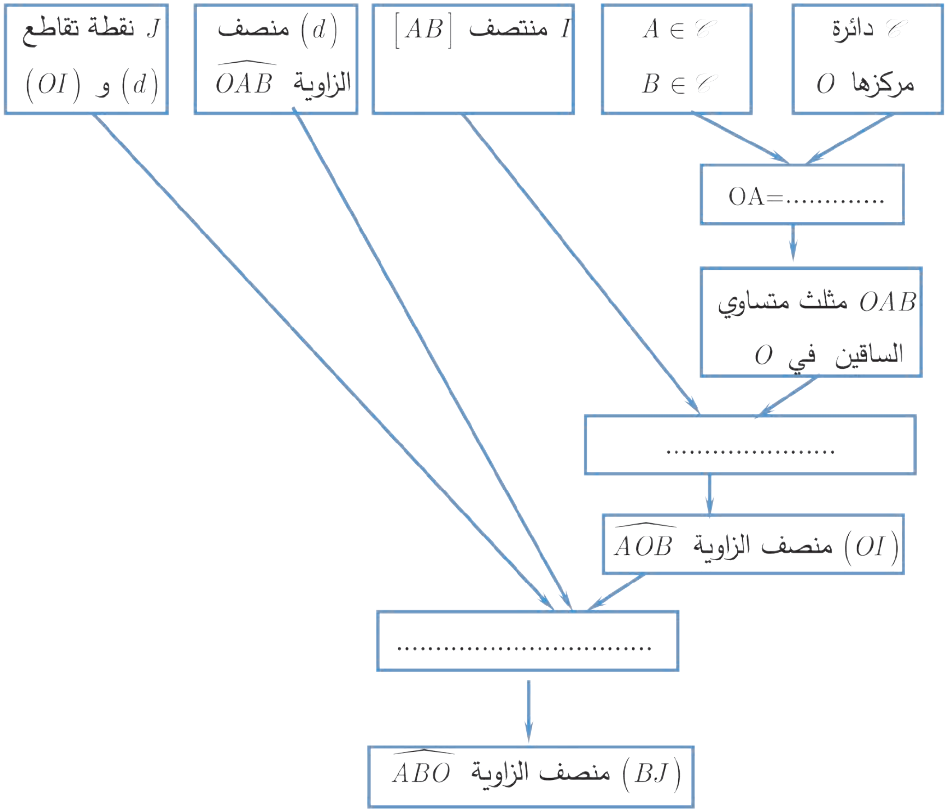
التعمّق

20 تعرف منصف زاوية

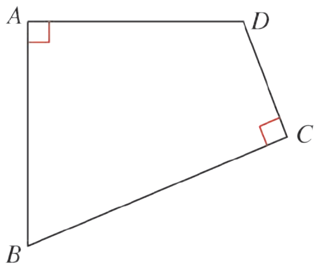
$\mathscr{C}$ دائرة مركزها O. A و B نقطتان من الدائرة $\mathscr{C}$، والنقطة I هي منتصف الوتر $[AB]$.
المستقيم (d) منصف الزاوية $\widehat{OAB}$ يقطع القطعة $[OI]$ في J.
أثبت أنَّ المستقيم (BJ) هو منصف الزاوية $\widehat{ABO}$.

توجيه

- ارسم شكلاً يتفق ومعطيات النص.
- استعمل المخطط الآتي وأكمله باستعمال التعاريف أو الخواص ثم صغْ، بعناية وبلغة سليمة، الإثبات.



21 مستقيمات متعامدة



$ABCD$ شكل رباعي، زاويتاه $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ قائمتان

كما تشاهد في الشكل المرسوم جانباً.

المستقيمان (BA) و (CD) يتقاطعان في M،

والمستقيمان (AD) و (BC) يتقاطعان في N.

1. أكمل الشكل حسب معطيات النص.
2. أثبت أنَّ المستقيمين (BD) و (MN) متعامدان.

توجيه

- علِّمْ ارتفاعين للمثلث BMN ومركز تعامده.
- ماذا يمكن القول عن المستقيم (BD) في المثلث BMN؟
- صغْ، بعناية وبلغة سليمة، إثباتاً للمطلوب.

22 زاوية محصورة بين ارتفاعين

1. ارسم مثلثاً ABC بحيث $BC = 7 \text{ cm}$ و $BA = 8 \text{ cm}$ و $\widehat{ABC} = 55^\circ$.
2. ارسم الارتفاعين $[AH]$ و $[CK]$، وارمز إلى نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث بالرمز O.
3. احسب قياس الزاوية $\widehat{AOC}$.

23 الرسم مع مركز الثقل

ارسم مثلثاً BCG، ثم ارسم، باستعمال المسطرة والفرجار فقط، النقطة A التي تجعل G مركز ثقل المثلث ABC. اكتب بلغة سليمة وبالتفصيل الخطوات المتبعة في الرسم.

24 مبرهنة « النسب المتساوية الثلاث »

1. ارسم مثلثاً ABC بحيث $AB = 7 \text{ cm}$ و $AC = 9 \text{ cm}$ و $\widehat{BAC} = 70^\circ$.
2. ارسم النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.
3. المستقيم المار بالنقطة G موازياً (AB) يقطع (AC) في M.

احسب الطولين MC و MG بالتقريب إلى أقرب جزء من مئة.

25 مركز الثقل ومتوازي الأضلاع

$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، والنقطة E هي مركز ثقل المثلث ABD، والمستقيم المار بالنقطة E موازياً (AB) يقطع (BD) في F.

ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات النص، ثم أثبت أنَّ F هي مركز ثقل المثلث ABC.

26 مثلث المنتصفات

ABC مثلث. I و J و K هي، على التوالي، منتصفات أضلاعه $[BC]$ و $[AB]$ و $[AC]$.

1. ارسم شكلاً.
2. أثبت أنَّ الرباعي $AJIK$ هو متوازي أضلاع.
3. وضِّعْ النقطة G مركز ثقل المثلث ABC، والنقطة O منتصف القطعة $[JK]$.
4. أثبت أنَّ النقطة O هي منتصف القطعة $[AI]$.
5. أثبت أنَّ النقطة G هي مركز ثقل المثلث IJK (أيضاً)

27 مركز الثقل ومساحات

1. ارسم مثلثاً ABC، ثم ارسم ارتفاعه $[AH]$ ومركز ثقله G.

   ارسم أيضاً $[GK]$ ارتفاع المثلث BCG.
2. أثبت أنَّ المستقيمين (AH) و (GK) متوازيان.
3. أثبت أنَّ $GK = \frac{1}{3}AH$.
4. استنتج أنَّ مساحة المثلث BCG تساوي ثُلث مساحة المثلث ABC.

28 مثلثات لها مركز ثقل مشترك

ABC مثلث، I منتصف ضلعه $[BC]$، والنقطة G هي مركز ثقله.

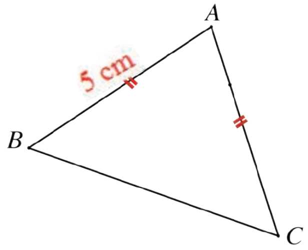
المستقيم المار بالنقطة G موازياً (AB) يقطع (BC) في J، والمستقيم المار بالنقطة G موازياً (AC) يقطع (BC) في K.

ارسم شكلاً يتفق ومعطيات النص، ثم أثبت أنَّ النقطة G هي مركز ثقل المثلث AJK.

29 مثلث قائم ومنصفات زواياه

ABC مثلث قائم في A، والنقطة O هي مركز الدائرة المرسومة داخله.

ارسم شكلاً مناسباً للنص، ثم أثبت أنَّ $\widehat{BOC} = 135^\circ$.



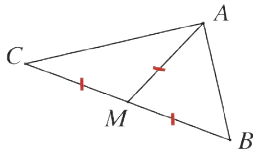
22 ABC مثلث متساوي الساقين في A .

فيه $AB = 5\ \text{cm}$ ومساحته $12\ \text{cm}^2$.

1. احسب بعد C عن المستقيم (AB).
2. أيمكن توقع بعد B عن المستقيم (AC)؟ لماذا؟

إحراز تقدم

23 عودة إلى مثلث قائم



معلومة

في مثلث ABC، إذا كانت M منتصف $[BC]$ وكان $MA = \frac{1}{2}MB$، كان المثلث ABC قائم الزاوية في A .

1. ارسم مثلثاً EFG متساوي الأضلاع وطول ضلعه $4\ \text{cm}$.
2. ارسم: I نظيرة النقطة G بالنسبة إلى النقطة F، و J نظيرة النقطة F بالنسبة إلى النقطة G، و K نظيرة النقطة F بالنسبة إلى النقطة E .
3. جدْ على الشكل جميع المثلثات القائمة مع الإشارة إلى الرأس القائم ووتر كلٍ منها.

24 حساب طول

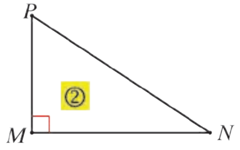
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

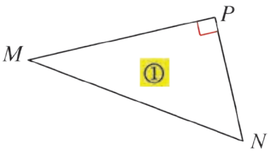
BC ↓ طول الوتر

AB AC ↘ ↙ طولا الضلعين القائمين

يجب معرفة دور كل من الأطوال الثلاثة في مساواة مبرهنة فيثاغورث.

1. في أيِّ من المثلثين ① و ② يمكن كتابة $MN^2 = PM^2 + PN^2$ ؟



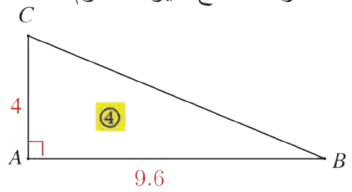


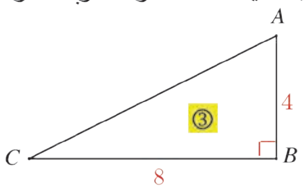
2. في كلٍ من الحالتين ③ و ④ :

① ما الرأس القائم في المثلث ABC وما وتره؟

② اكتب مساواة مبرهنة فيثاغورث.

③ احسب القيمة التامة أو المقربة لمنزلة عشرية واحدة لطول الضلع غير المعلوم.





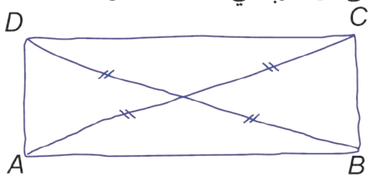
الوحدة الرابعة

المثلث القائم والدائرة

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، أشر إليها:

① الإشارات على الشكل المرافق والمرسوم يدوياً، تشير إلى أنَّ الرباعي $ABCD$ هو .....



① مربع

② مستطيل

③ معين

② المثلث FGH قائم في G، فوتره هو

① FG

② GH

③ HF

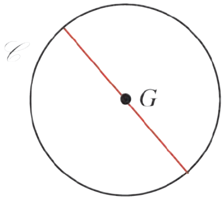
③ مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تلاقي

① ارتفاعاته

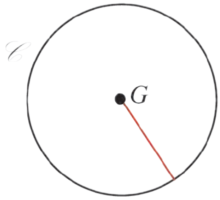
② محاور أضلاعه

③ متوسطاته

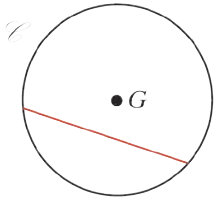
④ $\mathscr{C}$ دائرة مركزها G، أحد أقطارها مرسوم في الشكل



③



②



①

⑤ مربع العدد (-7) هو العدد

① -14

② -49

③ 49

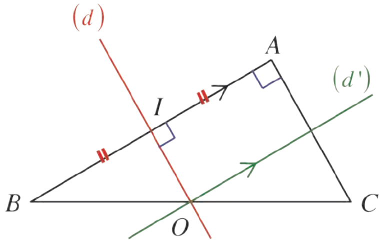
⑥ مربع مساحته $19\ \mathrm{m}^2$ طول ضلعه مقرباً لمنزلتين عشريتين يساوي

① $4.4\ \mathrm{m}$ ② $4.36\ \mathrm{m}$ ③ $4.3\ \mathrm{m}$

دائرة مارة برؤوس مثلث قائم.

نشاط « تعرف دور وتر المثلث القائم في الدائرة المارة برؤوسها»

1. **البحث عن الدائرة المرسومة على المثلث القائم**



① ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A.

② ارسم (d) محور ضلعه $[AB]$، فيقطع وتره $[BC]$ في النقطة O. بم نعلل أنَّ O هي منتصف $[BC]$؟

③ ارسم من O المستقيم (d') موازياً المستقيم (AB).

استنتج مركز الدائرة المرسومة على المثلث ABC. اشرح.

④ اكتب الخاصة التي استنتجناها مما سبق.

2. **بالعكس**

① ارسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O وأحد أقطارها $[BC]$.

② وضِعْ نقطةً A على $\mathscr{C}$ تختلف عن B وعن C. كيف يبدو لك المثلث ABC؟

③ وضِعْ على الشكل النقطة A' التي تقابل A قطرياً.

④ هات صفتين لقطري الرباعي $ABA'C$. استنتج بالتالي طبيعة الرباعي $ABA'C$.

⑤ اشرح إذن كيف يمكنك معرفة طبيعة المثلث ABC.

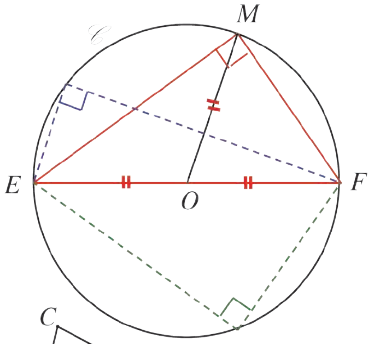
⑥ اكتب الخاصة التي يمكن استنتاجها مما سبق.

تعلّم

خواص

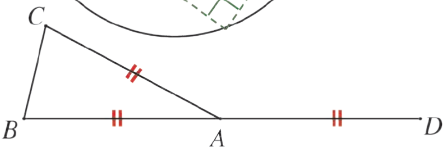
1. إذا كان EMF مثلثاً قائم الزاوية في M، كان $[EF]$ قطراً في الدائرة المارة برؤوس المثلث.
2. إذا كان $[EF]$ قطراً في الدائرة المارة برؤوس المثلث EMF، كان EMF قائم الزاوية في M.
3. EMF مثلث والنقطة O هي منتصف $[EF]$. إذا كان EMF قائم الزاوية في M، كان $OM = OE = OF$.
4. EMF مثلث والنقطة O هي منتصف $[EF]$. إذا كان $OM = OE = OF$، كان EMF قائم الزاوية في M.

بصياغة أخرى: إذا كان طولُ متوسطٍ في مثلثٍ يساوي نصف طول الضلع المقسوم به، كان المثلث قائم الزاوية في الرأس الذي رسم منه ذلك المتوسط.



5. $[EF]$ هو وتر المثلث القائم EMF، فهو قطرٌ في الدائرة $\mathscr{C}$ المارة برؤوسه.

6. النقطة O هي منتصف الوتر $[EF]$ في المثلث EMF القائم في M، إذن $OM = OE = OF$.



مثال ABC مثلث متساوي الساقين في A.

D صورة النقطة B وفق التناظر الذي مركزه A.

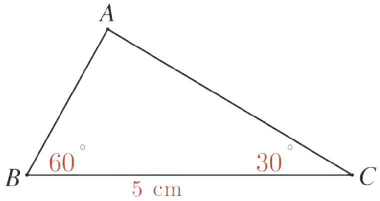
اشرح لماذا المثلث BCD قائم الزاوية في C.

الحلّ ABC مثلث متساوي الساقين في A، إذن $AB = AC$ … (1)

D هي صورة النقطة B وفق التناظر الذي مركزه A، إذن $AB = AD$ … (2)

نستنتج من (1) و (2) أنَّ $AB = AC = AD$. فالمثلث BCD قائم الزاوية في C.

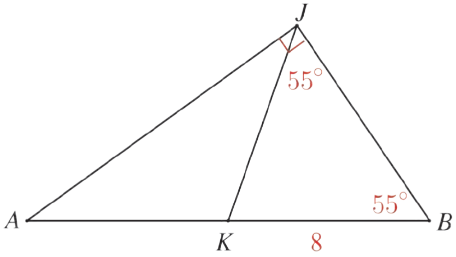
تحقّق من فهمك



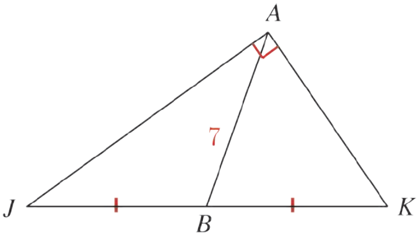
في الشكل المرافق: عين مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC؟ وما طول نصف قطرها؟

تدرّب

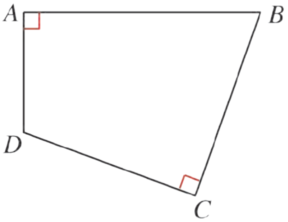
① في كلٍ من الحالتين ① و ② احسب الطول AK.



②



①



② في الشكل المرافق: $ABCD$ شكل رباعي زاويتاه $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ قائمتان.

1. ارسم الشكل.
2. اشرح لماذا تقع رؤوسه A و B و C و D على دائرة واحدة.
3. عيّنْ مركز الدائرة المارة بتلك النقاط ثم ارسمها.

② مبرهنة فيثاغورث - العكس.

نشاط « تعرف مبرهنة فيثاغورث واستعمالها ووضع مبرهنة فيثاغورث العكسية في الخدمة »

1. تجربة ثلاث حالات ومشاهدة

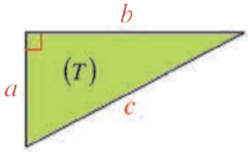
① ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A ، وقس أطوال أضلاعه.

② أكمل الجدول الآتي:

	AB^2	AC^2	$AB^2 + AC^2$	BC^2
حالة أولى				
حالة ثانية				
حالة ثالثة				

⑤ تأملْ نواتج حساباتك. ماذا تلاحظ ؟

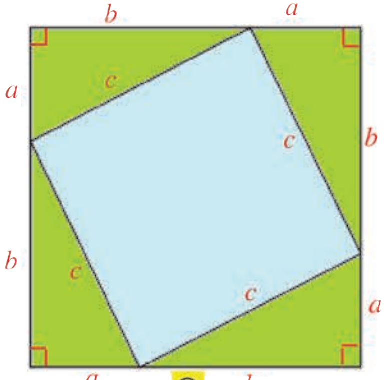
2. إثبات



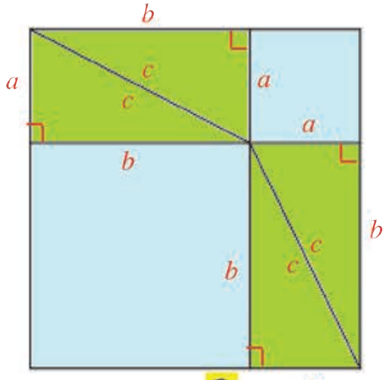
في الشكل المجاور مثلث قائم (T)، طولا ضلعيه القائمين a و b وطول وتره c.

نرسم مربعين طول ضلع كلٍ منهما يساوي $a+b$

ونحدد على كلٍ منهما أربعة مثلثات مطابقة للمثلث (T)، كما يلي:



①



②

1. ما طبيعة كلٍّ من الأشكال الرباعية الملونة باللون الأزرق؟
2. اشرح لماذا مساحة الرباعي الملون بالأزرق في الشكل ① تساوي مجموع مساحتي الرباعيين الملونين بالأزرق في الشكل ②.

3. اكتب المساواة التي حصلت عليها في 2. بدلالة a و b و c.

4. اكتب نصاً معبراً عن العلاقة بين أطوال أضلاع مثلث قائم.

1. تجربة

1. أكمل الجدول الآتي:

x	3	4	5	9	12	13	15
x^2							

2. في هذا الجدول، يمكن اكتشاف ثلاث قيم للرمز x، مربع كلٍ منها يساوي مجموع مربعي قيمتين أخريين واردتين فيه. إحدى هذه القيم $x = 5$، لاحظ $5^2 = 3^2 + 4^2$. ما القيمتان الأخريان؟

3. ارسم المثلثات الثلاثة التي تحقق أطوال أضلاعه تلك العلاقة. كيف تبدو طبيعة تلك المثلثات؟

نحو صيغة العكس

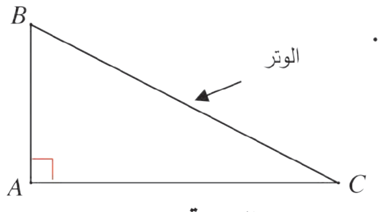
إذا كانت أطوال أضلاع مثلث a و b و c تحقق العلاقة $a^2 + b^2 = c^2$، كان المثلث قائم الزاوية في رأسه المقابل للضلع الذي طوله c.

صغْ نصاً لهذه المعلومة والتي تسمى مبرهنة فيثاغورث العكسية.

تعلّم

نص مبرهنة فيثاغورث

مربع الوتر في مثلث قائم، يساوي مجموع مربعي ضلعيه القائمين.



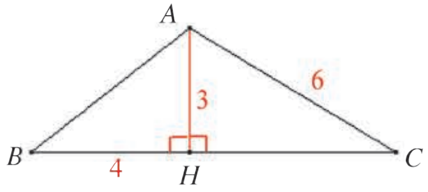
المعطيات		النتيجة
ABC مثلث قائم في A	حسب مبرهنة فيثاغورث	$BC^2 = AB^2 + AC^2$

نتيجة

وتر المثلث القائم هو أطول أضلاعه.

مثال $[AH]$ ارتفاعٌ في المثلث ABC.

استعمل المعطيات المشار إليها في الشكل المرافق لحساب الطول AB واحسب HC.



إذا علم طولا ضلعين في مثلث قائم، نحسب طول الضلع الثالثة باستعمال مبرهنة فيثاغورث.

الحلّ

حساب AB:

$(AH) \perp (BC)$، إذن $\widehat{AHB} = 90°$، فالمثلث AHB قائم الزاوية في H.

يمكننا إذن أن نكتب، حسب مبرهنة فيثاغورث:

$AB^2 = AH^2 + HB^2$، إذن $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$، وبالتالي $AB = 5$.

حساب HC:

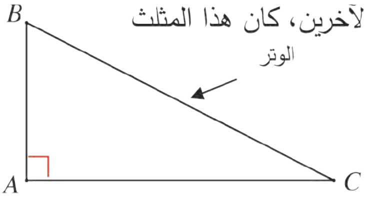
نجد بالمثل أنَّ المثلث AHC قائم الزاوية في H.

فحسب مبرهنة فيثاغورث: $AC^2 = AH^2 + HC^2$، إذن $6^2 = 3^2 + HC^2$، وبالتالي:

$HC^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$. ومنها $HC = \sqrt{27}$.

مبرهنة فيثاغورث العكسية

إذا كان مربع أحد أضلاع مثلث يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين، كان هذا المثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل للضلع الأكبر.



المعطيات		النتيجة
ABC مثلث و $BC^2 = AB^2 + AC^2$	حسب مبرهنة العكس	ABC قائم في A

مثال في كلٍ من الحالتين الآتيتين، بيِّنْ إن كان المثلث ABC قائم الزاوية أم لا. عند الإيجاب أشر إلى رأس الزاوية القائمة وعلّلْ إجابتك.

① $AB = 40 \text{ cm}$ و $AC = 42 \text{ cm}$ و $BC = 58 \text{ cm}$.

② $AB = 11 \text{ cm}$ و $AC = 9 \text{ cm}$ و $BC = 15 \text{ cm}$.

احسب مربع أطول الأضلاع ثم مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

الحلّ

① $[BC]$ هو أطول أضلاع المثلث، فإن كان المثلث قائماً، كان A هو الرأس القائم.

$$BC^2 = 58^2 = 3364 \quad \dots (1)$$

$$AB^2 + AC^2 = 40^2 + 42^2 = 1600 + 1764 = 3364 \quad \dots (2)$$

نجد من (1) و (2) أنَّ $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

فحسب مبرهنة فيثاغورث العكسية، يمكن تأكيد أنَّ المثلث ABC قائم الزاوية في A.

② نحسب مربع طول أطول الأضلاع: $BC^2 = 58^2 = 3364$ ... (1)

ثم $AB^2 + AC^2 = 40^2 + 42^2 = 1600 + 1764 = 3364$ ... (2)

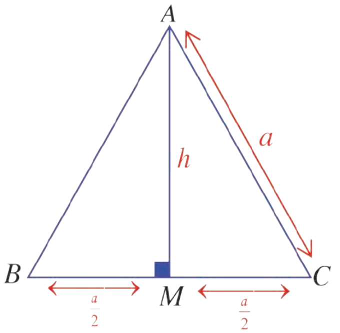
نجد من (1) و (2) أنَّ $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$.

فالمثلث ABC ليس قائماً في A ، وبالتالي ليس قائم الزاوية.

اكتساب معارف

كيف نحسب ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع؟

لنفترض وجود مُثلّث متساوي الأضلاع وليكن ABC طول ضلعه a. و AM ارتفاع فيه فهو متوسط أيضاً.



فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

إذن: $\boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$ (ارتفاع مثلث متساوي الأضلاع)

مثال

مُثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه $4\ \text{cm}$. احسب ارتفاع هذا المُثلّث.

الحلّ

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

كيف نحسب مساحة المثلث المتساوي الأضلاع؟

نعلم أن مساحة المثلث تعطى بالعلاقة $S = \frac{a \times h}{2}$.

وباستعمال علاقة حساب الارتفاع السابقة تصبح مساحة المثلث المتساوي الأضلاع كما يأتي

$\boxed{S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}$ (مساحة مثلث متساوي الأضلاع)

مثال

مُثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه $3\ \text{cm}$. احسب مساحة هذا المُثلّث.

الحلّ

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$$

تحقّق من فهمك

① ABC مثلث قائم في A. طولا ضلعيه القائمين: $AB = 5\ \text{cm}$ و $AC = 12\ \text{cm}$.

1. استعمل مبرهنة فيثاغورث لحساب BC الطول الحقيقي لوتر هذا المثلث.
2. ارسم المثلث ABC حسب معطيات النص، ثم قِسْ طول الوتر $[BC]$ كي تدعم حسابك السابق.

② في كلٍ من الحالتين الآتيتين، بيّن إن كان المثلث ABC قائم الزاوية أم لا.

في حالة الإيجاب، اذكر الرأس القائم واشرح إجابتك.

① $AB = 24\ \text{cm}$; $AC = 7\ \text{cm}$; $BC = 25\ \text{cm}$

② $AB = 4\ \text{cm}$; $AC = 7\ \text{cm}$; $BC = 5.75\ \text{cm}$

③ ABC مثلث متساوي الأضلاع. طول ضلعه 5 احسب مساحة هذا المُثلّث وارتفاعه.

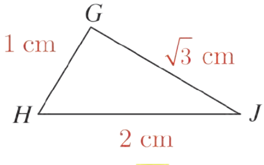
تدرّب

① RST مثلث قائم في S. أكمل الجدول الآتي بقيمٍ حقيقية أو بقيم تقريبية لأقرب جزء من مئة:

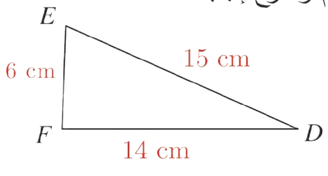
	SR	ST	RT
①	13.4	6.5	
②		4	8.5
③	9.3		13.7

② في كلٍ من الحالات الآتية، بيّن إن كان المثلث قائم الزاوية أم لا.

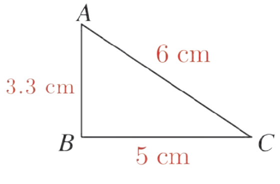
في حالة الإيجاب، اذكر الرأس القائم واشرح إجابتك.



①



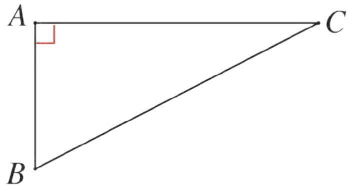
②



③

3 مسافة نقطة عن مستقيم.

نشاط « الاستفادة من مبرهنة فيثاغورث لمعرفة أقرب نقطة من مستقيم معلوم إلى نقطة معلومة »



1. الأطول

1. ABC مثلث قائم في A . اشرح، مستفيداً من مبرهنة فيثاغورث، لماذا BC^2 أكبر من كلٍ من AB^2 و AC^2 .

2. ما الضلع الأطول في المثلث القائم؟

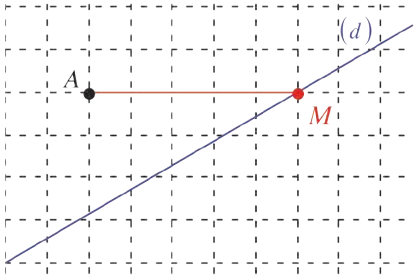
2. الأقصر

A نقطة خارج المستقيم (d).

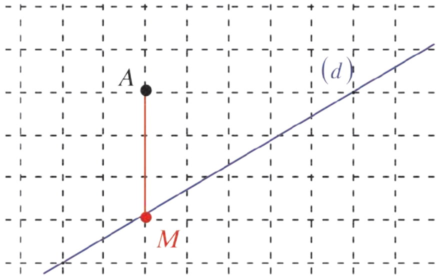
طلب مدرس الصف الثامن من طلابه التعرف إلى أقرب نقطة M من المستقيم (d) عن النقطة A .

رسم طلال الشكل ① ورسمت لمياء الشكل ② .

أيمكن رسم شكل أصح مما رسما؟ استفد من مبرهنة فيثاغورث.



①



②

تعلّم

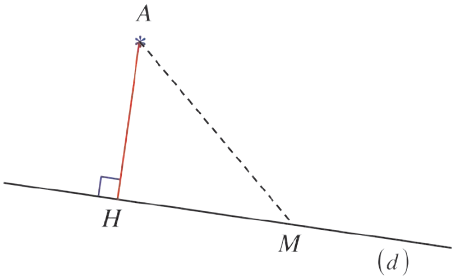
خاصة وتعريف

A نقطة خارج المستقيم (d).

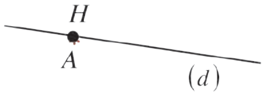
- أقرب نقاط (d) من A ، هي النقطة H حيث $(d) \perp (AH)$.
- يسمى الطول AH مسافة A عن (d) أو بعدها عنه.

نتيجتان

① إذا كانت $M \in (d)$ و $M \neq H$ ، كان $AH < AM$



② في الحالة الخاصة، إذا كانت $A \in (d)$ ، كان بعد A عن (d) مساوياً الصفر . أي $AH = 0$



اكتســاب معــارف

كيف نحسب ارتفاع شبه منحرف متساوي الساقين علمت أطوال أضلاعه؟

تذكَّرْ: شبه المنحرف هو شكل رباعي توازى فيه ضلعان فقط. وعند تساوي الضلعين الباقيتين (الساقين) نقول إنه شبه منحرف متساوي الساقين.

مثال

$ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$. فيه $AB = 11$ و $DC = 5$ و $DA = 5$. والمطلوب:

① احسب ارتفاع شبه المنحرف.

② احسب مساحة شبه المنحرف.

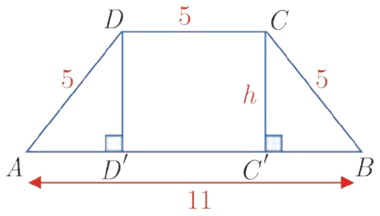
الحلّ

① في الشكل المجاور المثلثان $BC'C$, $AD'D$ طبوقان. علل؟

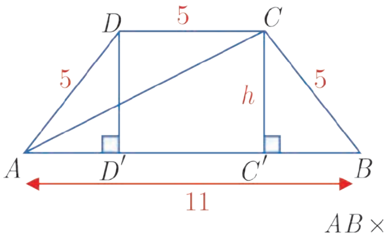
الشكل $DD'C'C$ مستطيل. علل؟

إذن $AD' = C'B = 3$

وبحسب مبرهنة فيثاغورث



$$BC^2 = CC'^2 + C'B^2$$
$$25 = h^2 + 9$$
$$h^2 = 25 - 9 = 16$$
$$h = 4$$



② في الشكل المجاور نرسم القطعة المستقيمة $[AC]$ فتكون مساحة شبه المنحرف مساويةً مجموع مساحتي المثلثين ABC , ADC وبالتالي:

$$S=\frac{AB\times h}{2}+\frac{CD\times h}{2}=\frac{AB\times h+CD\times h}{2}$$
$$=\frac{AB+CD}{2}h=\frac{11+5}{2}\times 4=32$$

يمكن استعمال القاعدة السابقة لحساب مساحة شبه المنحرف والتي تنصّ على أن مساحة شبه المنحرف تساوي نصف مجموع القاعدتين مضروباً بارتفاعه

تحقّق من فهمك

ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A، وفيه $AB=4\text{ cm}$ و $AC=5\text{ cm}$.

1. ما بعد النقطة B عن المستقيم (AC)؟
2. ما بعد النقطة C عن المستقيم (AB)؟

تدرّب

① ارسم مستقيماً (d) ونقطة M تبعد عنه مسافة 3 cm.

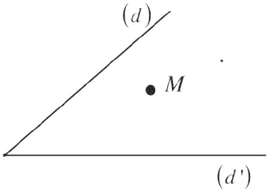
1. ارسم النقطة M_1 صورة النقطة M وفق التناظر الذي محوره (d).
2. ارسم ثلاث نقاط أخرى على بعد 3 cm عن المستقيم (d).
3. أين تقع النقاط التي تبعد عن (d) 3 cm؟

② ارسم مستقيماً (d) ووضِعْ عليه نقطةً A.
حدِّدْ موقع النقطة M التي تبعد عن A مسافة 5 cm وعن (d) مسافة 3 cm. اشرح عملك.

③ ABC مثلث فيه $AB=5\text{ cm}$ و $AC=8\text{ cm}$ ومساحته 20 cm^2.

1. ارسم شكلاً يحقق هذه المعطيات وارسم ارتفاعه $[BH]$.
2. احسب بعد B عن المستقيم (AC).
3. احسب بعد C عن المستقيم (AB).

④ ما أقصر مسار للانتقال من نقطةٍ من المستقيم (d) إلى نقطة من المستقيم (d') مروراً بالنقطة M؟ اشرح.



4 مماس دائرة.

نشاط « تعرُّف مفهوم المستقيم المماس لدائرة»

.1 ① ارسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O ونصف قطرها $2\ \text{cm}$ و $[AB]$ قطر فيها.

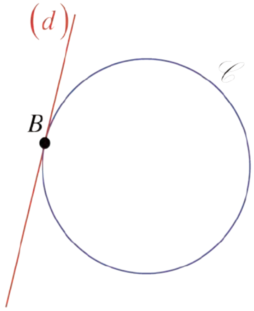
② ارسم ثلاثة مستقيمات (d_1) و (d_2) و (d_3) التي تعامد المستقيم (AB) وتبعد عن O على التوالي $5\ \text{cm}$ و $3\ \text{cm}$ و $0.5\ \text{cm}$.

.2 ① ارسم المستقيم (d) العمودي على (AB) في النقطة B.

② وضَعْ على المستقيم (d) نقطةً M تختلف عن B.

اشرح لماذا $OM > OB$.

③ استنتج أنَّ المستقيم (d) يشترك مع الدائرة $\mathscr{C}$ بالنقطة B فقط.



معنى الكلمات

القول « المستقيم (d) مماس للدائرة $\mathscr{C}$ »

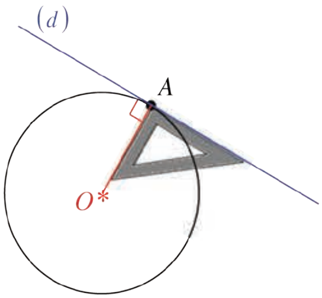
يعني « المستقيم (d) يشترك مع الدائرة $\mathscr{C}$ بنقطة واحدة »

والنقطة المشتركة تسمى **نقطة التماس**.

فيقال إنَّ المستقيم (d) يمس الدائرة $\mathscr{C}$ في تلك النقطة.

تعلم

تعريف



A نقطة من الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O.

مماس الدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة A منها، هو المستقيم (d) المرسوم من A والعمودي على المستقيم (OA).

خاصتان

① بعد مركز الدائرة عن مماس لها يساوي نصف قطرها.

② مماس الدائرة في نقطةٍ A منها، يشترك معها بنقطة واحدة فقط، هي النقطة A.

تحقّق من فهمك

$[AB]$ قطعة مستقيمة طولها 4 cm.

1. ارسم هذه القطعة، وارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي قطرها $[AB]$.
2. ارسم مماسي الدائرة $\mathscr{C}$ من A و B.
3. ما الوضع النسبي لهذين المماسين؟ تحقق من إجابتك.

تدرّب

① ارسم مثلثاً ABC زاويتاه $\widehat{BAC}=65^\circ$ و $\widehat{ACB}=25^\circ$ وضلعه $AC=4\text{ cm}$.

1. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها A والمارة بالنقطة B.
2. اشرح لماذا المستقيم (BC) مماس للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة B.

② ارسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O وارسم قطراً لها وليكن $[AB]$، ثم ضَعْ نقطة M على هذه الدائرة تحقق $\widehat{BOM}=55^\circ$.

1. ارسم (d) مماس الدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة M. لتكن C نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (AB).
2. احسب قياس الزاوية $\widehat{OCM}$.

③ ABC مثلث متساوي الساقين في A، والنقطة M هي منتصف ضلعه $[BC]$.

1. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها A والمارة بالنقطة M.
2. ما وضع المستقيم (BC) بالنسبة إلى الدائرة $\mathscr{C}$؟ برّر إجابتك.

④ 1. ارسم مثلثاً IJK متساوي الساقين في J ويكون $IJ=5\text{ cm}$ و $\widehat{IJK}=30^\circ$.

2. ارسم المثلث المتساوي الأضلاع JKL خارج المثلث IJK.
3. أثبت أنَّ (IJ) مماس في النقطة J للدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها L ونصف قطرها 5 cm.

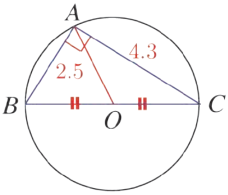
⑤ 1. ارسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O وضَعْ عليها نقطةً A.

2. ارسم باستعمال الفرجار النقطة M على الدائرة $\mathscr{C}$ والتي تحقق $MA=MO$.
3. ارسم باستعمال الفرجار والمسطرة النقطة T نظيرة النقطة O بالنسبة إلى النقطة M.
4. أثبت أنَّ المستقيم (AT) هو مماس الدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة A.

يزودك هذا التمرين بطريقة لإنشاء مماس لدائرة مركزها O في نقطةٍ A منها، باستعمال المسطرة والفرجار.

تمرينات ومسائل

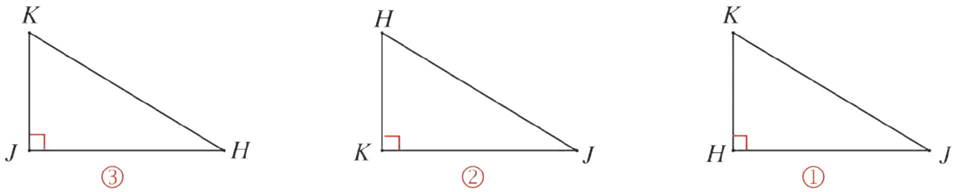
1 في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات. أشر إليها.



❶ حسب المعطيات على الشكل المرافق، يمكننا تأكيد أنَّ

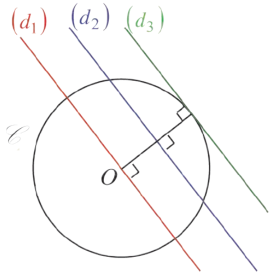
① $BC = 5$.　② $BC = 4.6$.　③ $BA = 2.5$.

❷ المساواة $HJ^2 + JK^2 = KH^2$ صحيحة في المثلث

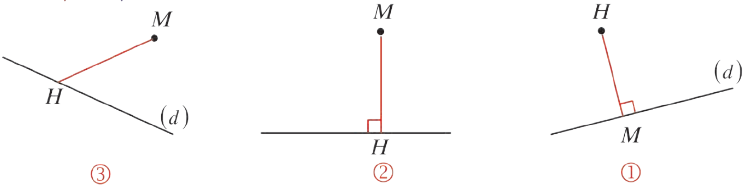


❸ المماس للدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O هو المستقيم

① (d_1)　② (d_2)　③ (d_3)

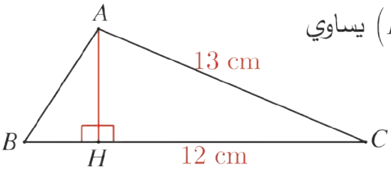


❹ MH هو بعد النقطة M عن المستقيم (d) في الشكل



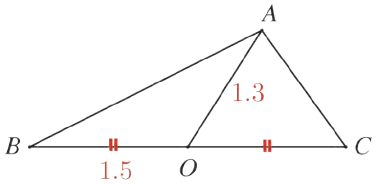
❺ $[AH]$ هو ارتفاع في المثلث ABC، إذن بعد A عن (BC) يساوي

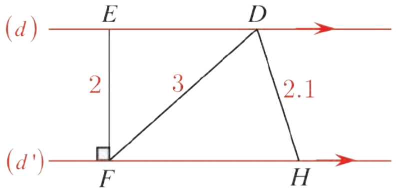
① 6 cm　② 12 cm　③ 5 cm



2 قلْ إن كنت موافقاً أم لا على العبارات الآتية:

❶ المثلث ABC قائم الزاوية في A.



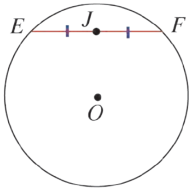


❷ المستقيمان (d) و (d') متوازيان.

بعد النقطة D عن المستقيم (d') يساوي 2.

❸ ABC مثلثٌ أطوال أضلاعه $AB = 12 \text{ cm}$ و $BC = 14 \text{ cm}$ و $AC = 12 \text{ cm}$.

هذا المثلث قائم ومتساوي الساقين في A.



❹ المستقيم (EF) مماس للدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O والمارة بالنقطة J منتصف $[EF]$.

❺ ABC مثلثٌ قائم في A مع $AB = 5 \text{ cm}$ و $AC = 6 \text{ cm}$، إذن $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

يترتب على ذلك أنَّ $BC = AB + AC = 5 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$.

❻ ABC مثلثٌ أطوال أضلاعه $AB = 10 \text{ cm}$ و $AC = 6 \text{ cm}$ و $BC = 8 \text{ cm}$.

فالمستقيم (AC) مماس للدائرة التي قطرها $[BC]$.

3

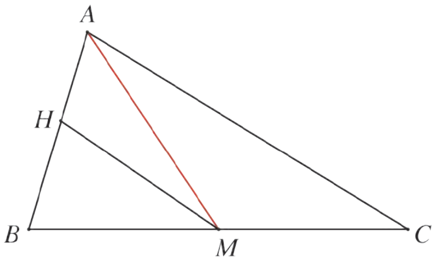
EFC مثلث، أطوال أضلاعه $EF = 6 \text{ cm}$ و $EC = 4 \text{ cm}$ و $FC = 8 \text{ cm}$.

$[EE']$ و $[FF']$ إثنان من ارتفاعاته.

1. ارسم شكلاً مناسباً.
2. ما مركز الدائرة المرسومة على المثلث $EE'F$؟ وكم هو نصف قطرها؟
3. ما مركز الدائرة المرسومة على المثلث $FF'E$؟ وكم هو نصف قطرها؟
4. اشرح إذن لماذا تقع النقاط E و F و E' و F' على دائرة واحدة.

4

في الشكل المرافق:



ABC مثلث، $[AM]$ أحد متوسطاته.

H نقطة من $[AB]$ تحقق $MH = MB$.

1. ارسم الشكل ورمّزْ القطع المتساوية.
2. تعرَّف الدائرة المارة بروؤس المثلث HBC.
3. لماذا $[CH]$ ارتفاع في المثلث ABC؟

5

$ABCD$ شكل رباعي فيه $\widehat{D} = 90^o$. E هي صورة النقطة A وفق التناظر الذي مركزه D.

1. ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص.
2. اشرح لماذا المثلث ACE متساوي الساقين في C.

6 E و F و G ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

الدائرة $\mathscr{C}_1$ التي قطرها $[EF]$ والدائرة $\mathscr{C}_2$ التي قطرها $[FG]$ تتقاطعان في H .

1. ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص.
2. ما طبيعة كلٍ من المثلثين EFH و FGH ؟ استنتج أنَّ النقاط E و G و H على استقامة واحدة.
3. ما دور المستقيم (FH) في المثلث EFG ؟

7 1. ارسم قطعةً مستقيمة $[BC]$ طولها 6 cm.

2. باستعمال الفرجار ومسطرة مدرجة، عين موضعاً للنقطة A ليكون المثلث ABC قائم الزاوية في A ويكون $AB = 4$ cm . أيوجد أكثر من موضع للنقطة A ؟ وضِّحْ.

8 لتكن $\mathscr{C}$ دائرة أحد أقطارها $[MN]$. A نقطة من هذه الدائرة و B صورة M وفق التناظر الذي مركزه A .

1. ارسم شكلاً معبراً عن معطيات النص.
2. ما طبيعة المثلث MAN ؟ اشرح.
3. ما دور (AN) في المثلث NMB ؟ اشرح.
4. استنتج أنَّ $NM = NB$.

9 JKL مثلث قائم في J. طولا ضلعيه: $JK = 4.5$ cm و $KL = 7.5$ cm .

استعمل مبرهنة فيثاغورث لحساب الطول JL .

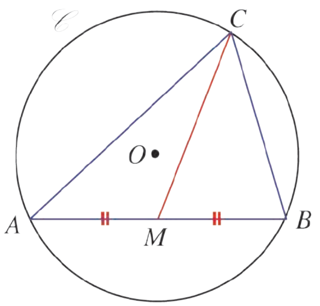
10 طرح مدرس الرياضيات على طلاب الصف الثامن المسألة الآتية: A و B و C ثلاث نقاط من دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O .

النقطة M هي منتصف القطعة $[AB]$ و $AB = 2CM$.

ارسم شكلاً معبراً عن معطيات النص.

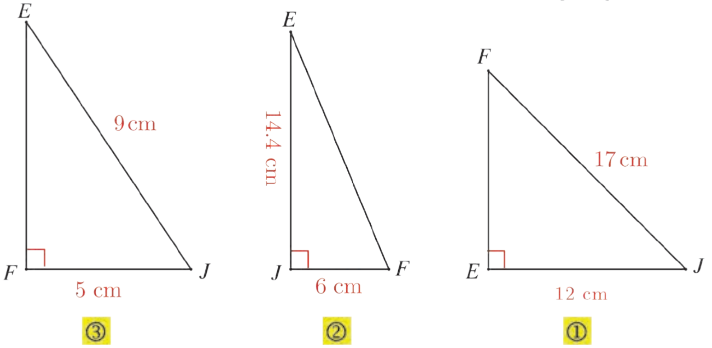
رسم عدنان الشكل الذي تراه جانباً.

اشرح لماذا هذا الشكل لا يعبر عن معطيات النص.



11 في كلٍّ من الحالات ① و ② و ③ :

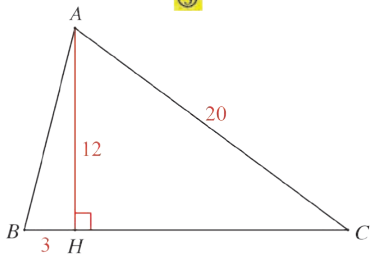
احسب طول الضلع $[EF]$ في المثلث EFJ مقرباً لخانة عشرية واحدة.



12 $[AH]$ ارتفاع في المثلث ABC.

استعمل المعلومات المعطاة على الشكل المرافق

لحساب الطولين AB و HC .



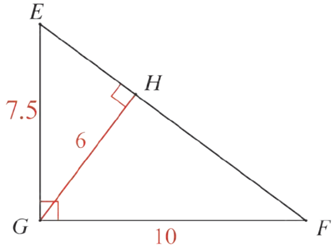
13 EFG مثلث قائم في G.

$[GH]$ ارتفاعه المرسوم من G.

1. استعمل المعلومات المعطاة على الشكل

لحساب الطولين EF و HF .

2. احسب الطول HE بطريقتين مختلفتين.



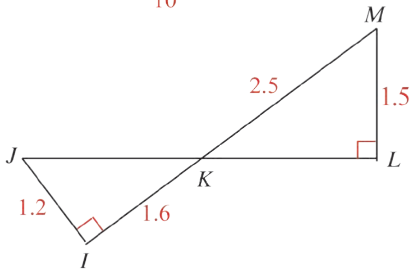
14 J و K و L ثلاث نقاط على استقامة واحدة،

كذلك النقاط I و K و M .

1. استعمل المعلومات المثبتة على الشكل المرافق

لحساب الطولين JK و KL .

2. ما وضع النقطة K بالنسبة إلى القطعة $[JL]$؟



15 1. ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع GHK طول ضلعه 5 cm.

2. احسب طول أحد ارتفاعات هذا المثلث مقرباً لخانة عشرية واحدة.

16 $ABCD$ مستطيلٌ، بعداه $AB = 13\text{ cm}$ و $BC = 9\text{ cm}$.

1. ارسم هذا المستطيل.

2. احسب نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه مقرباً الجواب لخانة عشرية واحدة.

17 $ABCD$ معين مركزه O. $AB = 7.5\text{ cm}$ و $BD = 4.2\text{ cm}$.

1. ارسم هذا المعين. 2. احسب AC، ثم احسب مساحة $ABCD$.

18 ABC مثلث، ضلعاه: $AB = 15\text{ cm}$ و $BC = 18\text{ cm}$.

النقطة M هي منتصف $[BC]$ مع $AM = 12\text{ cm}$.

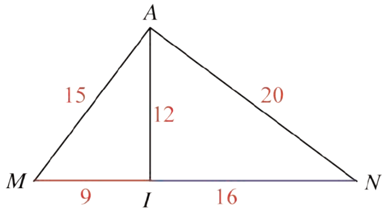
1. ارسم شكلاً يناسب معطيات النص. 2. ما طبيعة المثلث AMB؟

3. استنتج طبيعة المثلث ABC.

19 في الشكل المرافق، النقاط A و M و I و N

تحقق $AM = 15$ و $AI = 12$ و $AN = 20$ و

$IM = 9$ و $IN = 16$.



1. أثبت أنَّ كلاً من المثلثين AIM و AIN قائم الزاوية.

2. ما الوضع النسبي للنقاط M و I و N؟ استنتج طبيعة المثلث AMN.

20 دعامتان متعامدتان

أراد نجارٌ أن يتحقق من تعامد الدعامتين

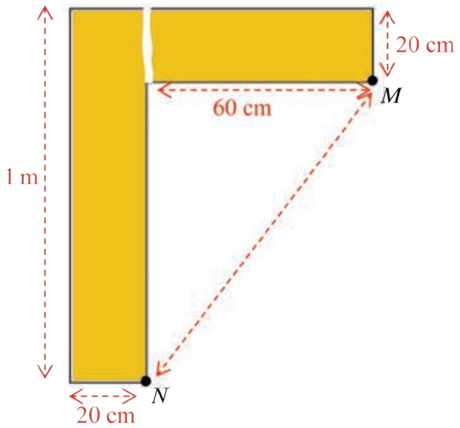
الخشبيتين الممثلتين بالشكل المرسوم جانباً، حيث

ثبت على الشكل بعدا كلٍ منهما.

تأكد النجار أنَّ الدعامتين متعامدتان بعد أن قاس طول

قطعة مستقيمة.

ما تلك القطعة؟ وكم طولها؟



21 نقل فلاح هذه الشجرة من إحدى الغابات إلى حديقة منزلية لغرسها شاقولياً على أرض مستوية

فاستعمل الرابطين $[DA]$ و $[DC]$. طول كلٍ منهما 2.5 m.

طلب الفلاح من سامر ابن صاحب المنزل، وهو طالب في الصف

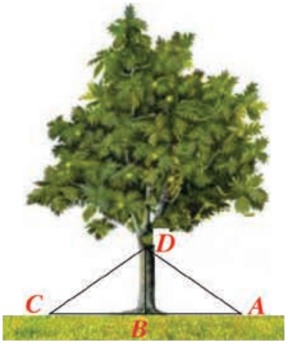
الثامن، أن يبين له إن كانت الشجرة قد ثبتت شاقولياً أم لا.

قاس سامر الأطوال:

$BA = 2\text{ m}$ و $BD = 140\text{ cm}$ و $AD = 2.5\text{ m}$

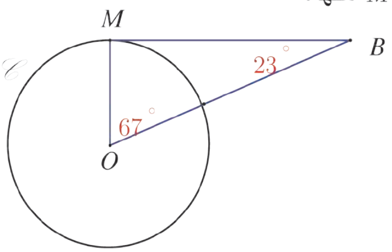
1. هل نصبت الشجرة شاقولياً؟ لماذا؟

2. كم يجب أن يكون الطول BD لتصبح الشجرة شاقولية؟

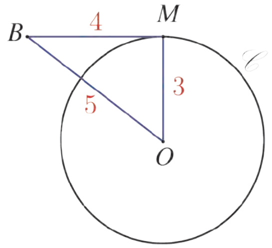


25 مماس دائرة

في كلٍ من الحالتين ① و ② اشرح لماذا المستقيم (BM) مماس للدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O في النقطة M منها.

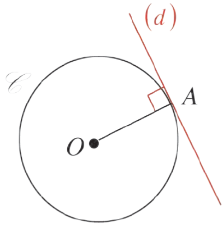


①



②

إذا كانت A نقطة من الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O. كان المستقيم (d) العمودي على (OA) في النقطة A مماساً للدائرة $\mathscr{C}$.



26 تعلّم صياغة نص

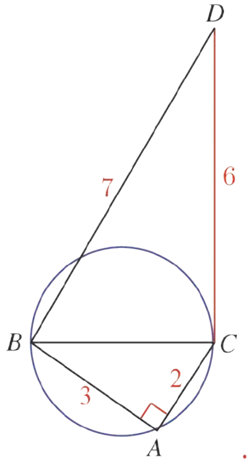
اقرأ النص والحل المنجز من قبل أحد الطلاب. ثم حرِّر الحل مع الأخذ بمجمل ملاحظات المصحح.

النصّ

ABC مثلث قائم الزاوية في A، $AB = 3$ و $AC = 2$.

DBC مثلث فيه $DC = 6$ و $DB = 7$.

هل المستقيم (CD) مماس للدائرة التي قطرها $[BC]$؟



حل الطالب، مع ملاحظات المصحح

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$

  $BC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

جيد، ولكن ما الخاصة التي استخدمتها؟ وفي أي مثلث؟

- $BC = \cancel{3.6}$ هذه ليست قيمة BC .
- في المثلث BCD : $BC^2 + CD^2 = \cancel{3.6^2} + 6^2$ الملاحظة السابقة.
- إذن $BC^2 + CD^2 = 48.96$ عوض $BC^2 = 13$ ثم أكمل.
- $\cancel{BC^2 + CD^2 \neq DC^2}$، ~~فالمثلث~~ DCB ليس قائماً في C.

لأنك لم تعوض بقيمة BC .

- بالنتيجة، ~~المستقيم (CD) ليس مماساً لهذه الدائرة.~~

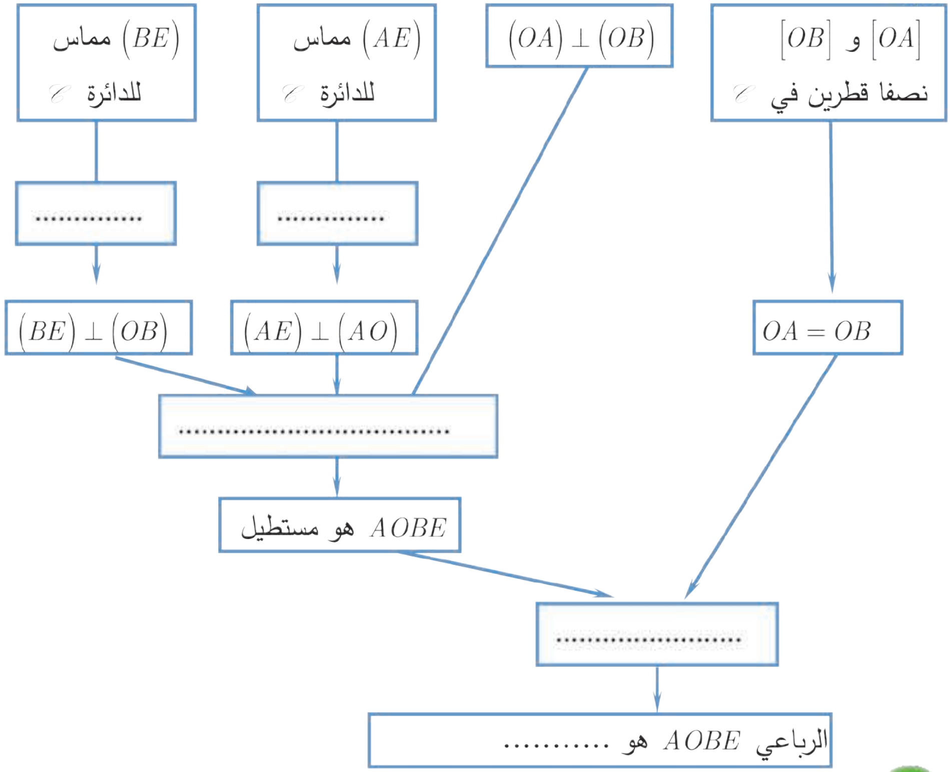
التعمّق

27 استخدام إحدى خواص المماس

$[OA]$ و $[OB]$ نصفا قطرين متعامدين في دائرةٍ $\mathscr{C}$ مركزها O.

مماسا $\mathscr{C}$ في A و B يتقاطعان في E. ما طبيعة الرباعي $AOBE$؟

توجيه



28 استعمال إحدى خواص المثلث القائم

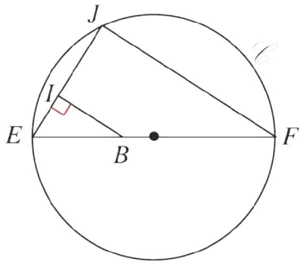
ABC و ABD مثلثان قائمان مشتركان بالوتر $[AB]$ والرأسان D, C بجهة واحدة بالنسبة إلى $[AB]$. النقطة J هي منتصف القطعة $[AB]$. ارسم شكلاً. ثم حدد طبيعة المثلث CDJ.

مساعدة

① ABC قائم في C والنقطة J هي منتصف الوتر $[AB]$.

ما المساواة التي نستنتجها بين ثلاثة أطوال؟

② تصرَّف بطريقة مماثلة مع المثلث ABD.



29 اختيار وسائل

$\mathscr{C}$ دائرة قطرها $[EF]$.

J نقطة من $\mathscr{C}$ تختلف عن E و F.

B نقطة من $[EF]$ و I مسقط B على (EJ).

أثبت أنَّ $(BI) \parallel (FJ)$.

مساعدة

لإثبات توازي مستقيمين، نختار ما يناسب للحالة التي نحن بصددها من بين الوسائل الآتية:

① إثبات أنَّ المستقيمين هما حاملا ضلعين متقابلين في متوازي أضلاع.

② إثبات أنَّ أحد المستقيمين هو صورة الآخر وفق تناظر مركزي.

③ إثبات أنَّ المستقيمين هما عمودان على مستقيم واحد.

30 إثبات مثلث قائم ومستقيمات متوازية

ليكن ABC مثلثاً أطوال أضلاعه $AB = 10{,}4 \text{ cm}$ و $BC = 4 \text{ cm}$ و $AC = 9.6 \text{ cm}$.

1. ارسم شكلاً باستعمال المسطرة والفرجار مع الشرح.
2. أثبت أنَّ هذا المثلث قائم الزاوية وسمِ الرأس القائم.
3. لتكن D تلك النقطة من $[AB]$ التي تحقق $AD = 7.8\text{cm}$، ولتكن E نقطة تقاطع الدائرة $\mathscr{C}$ التي قطرها $[AD]$ مع القطعة المستقيمة $[AC]$.
   ① حدِّدْ طبيعة المثلث AED.
   ② أثبت أنَّ المستقيمين (BC) و (DE) متوازيان.
4. احسب طول القطعة المستقيمة $[DE]$.

31 من الحلّ إلى النصّ

إليك حلّ وفاء لأحد تمارين وظيفة الهندسة:

$BC^2 = 156.25$ و $AB^2 + AC^2 = 30.25 + 132.25 = 163$

$AB^2 + AC^2 \neq BC^2$، فالمثلث ABC ليس قائماً.

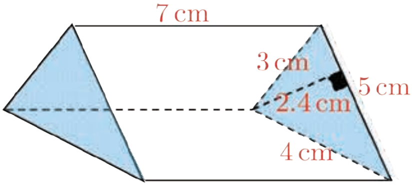
ما نص التمرين الذي قدمت وفاء حلاً له؟

الوحدة الخامسة

الهرم والمخروط الدوراني

انطلاقة نشطة

في كلٍ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، أشر إليها:



1. ارتفاع هذا الموشور القائم يساوي

① 7 cm

② 5cm

③ 2.4 cm

2. مساحة السطح الجانبي للموشور السابق تساوي

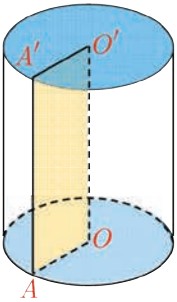
① $42\ cm^2$ ② $84\ cm^2$ ③ $420\ cm^2$

3. حجم الموشور السابق يساوي

① $420\ cm^3$ ② $210\ cm^3$ ③ $42\ cm^3$

4. ABC مثلث قائم الزاوية في A، $\widehat{B} = 47^\circ$، إذن

① $\widehat{C} = 133^\circ$ ② $\widehat{C} = 43^\circ$ ③ $\widehat{C} = 47^\circ$



5. هذه الأسطوانة ناتجة عن دوران الرباعي $AOO'A'$ حول (OO')، فالرباعي $AOO'A'$ هو

① متوازي أضلاع

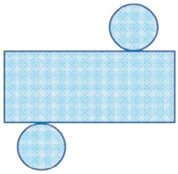
② مستطيل

③ معين

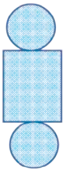
6. في حالة $AA' = 5\ cm$ و $OA = 3\ cm$، المساحة الجانبية للأسطوانة السابقة مقربة لمنزلة عشرية واحدة، تساوي

① $47.1\ cm^2$ ② $141.4\ cm^2$ ③ $94.2\ cm^2$

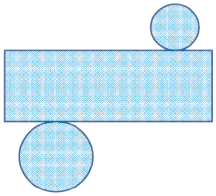
7. شبكة السطوح للأسطوانة الدورانية السابقة هي



①



②



③

1 الهرم.

نشاط « العناصر المكونة للهرم مروراً بشبكة السطوح »

1. **وصف**

في كلٍ من هذين الشكلين، الأوجه الجانبية هي مثلثات مشتركة برأس واحد: هو رأس الهرم.

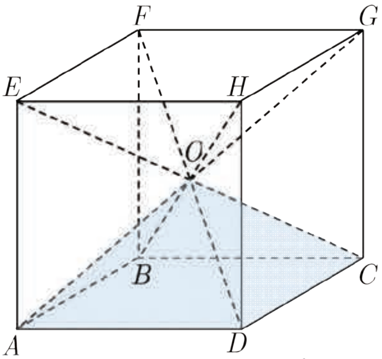
1. ما طبيعة قاعدة الهرم في كلٍ من الشكلين السابقين؟ وما عدد أحرف كلٍ منهما؟

2. اذكر عناصرَ أخرى للهرم.

الهرم المنتظم: قاعدته: مضلع منتظم (مثلث متساوي الأضلاع، مربع ...)

أوجهه الجانبية: مثلثات متساوية الساقين وطبوقة)

1. شبكة السطوح لهرم منتظم



الشكل المرافق يبين كيف يمكن تقسيم مكعب طول حرفه $5\ \mathrm{cm}$ إلى ستة أهرامات منتظمة مشتركة بالرأس O مركز المكعب، قاعداتها المربعة هي أوجه المكعب.

1. أحد هذه الأهرامات هو $OABCD$. سمِ الأهرامات الخمسة الأخرى.

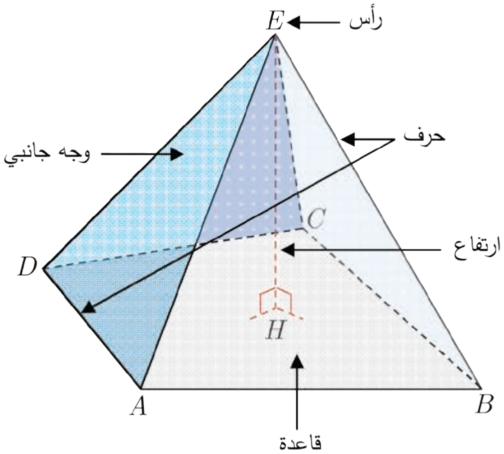
2. ارسم الرباعي $BDHF$ بأبعاده الحقيقية. ارسم القطرين $[BH]$ و $[DF]$، ثم نقطة تقاطعهما O.

3. ارسم شبكة السطوح للهرم $OABCD$ بأبعادها الحقيقية.

4. ارسم شبكة السطوح للأهرامات الأخرى. جمِّعْ الشبكات الست للحصول على المكعب الموصوف.

تعلّم

تعريف الهرم



الهرم هو المجسم الذي يميزه:

- مضلع يسمى قاعدة الهرم.
- E لا تنتمي إلى القاعدة تسمى رأس الهرم.
- مثلثات مشتركة بالرأس E وقاعداتها هي أضلاع قاعدة الهرم، يسمى كل منها وجهاً جانبياً.
- السطح الجانبي، وهو السطح المؤلف من مجموعة الأوجه الجانبية.

تعريف ارتفاع الهرم

- **ارتفاع** الهرم من رأسه E، هو العمود $[EH]$ على مستوي قاعدته، حيث H نقطة من القاعدة.

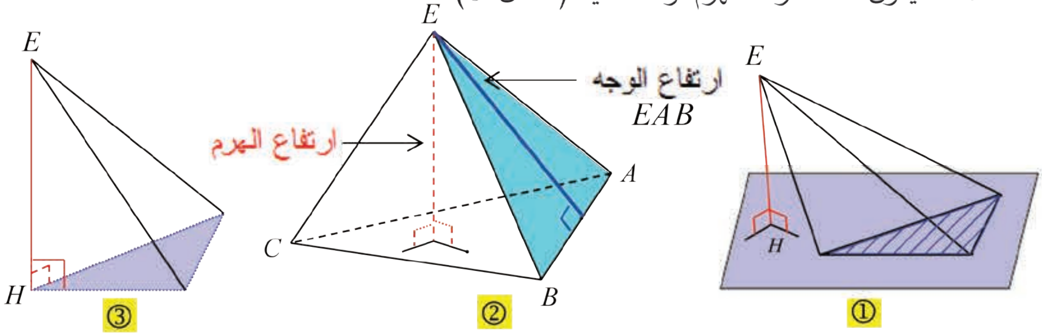
(تسمى H مسقط الرأس E على مستوي القاعدة، كما تسمى موقع الارتفاع)

- يسمى الطول EH أيضاً ارتفاع الهرم.

① النقطة H، موقع الارتفاع، قد تقع داخل المضلع القاعدة (الشكل السابق) أو خارجه (الشكل 1)

② يجب عدم الخلط بين ارتفاع الهرم وارتفاع وجه جانبي (الشكل 2)

③ قد يكون أحد أحرف الهرم ارتفاعاً فيه (الشكل 3)



تعريف الهرم المنتظم

نقول إنَّ هرماً رأسه E هو هرم منتظم، إذا استوفى الشرطين:

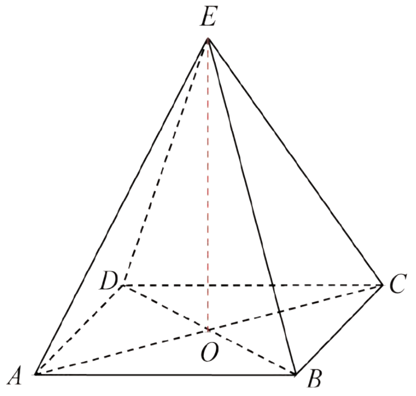
① قاعدته $\mathcal{P}$ مضلع منتظم مركزه O (مثلث متساوي الأضلاع أو مربع أو ......)

② ارتفاعه القطعة المستقيمة $[EO]$ (الواصلة بين رأس الهرم ومركز القاعدة)

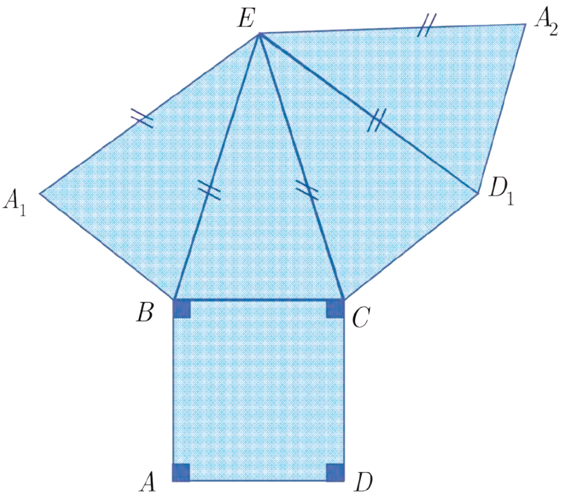
خاصة

الأوجه الجانبية لهرمٍ منتظم هي مثلثات متساوية الساقين في E ، وهي طبوقة.

مثال هرم منتظم رباعي (قاعدته مربع)



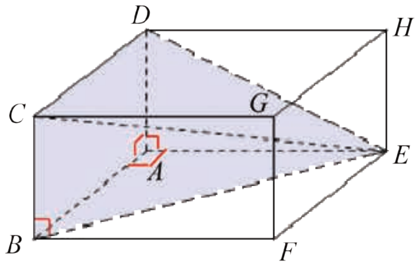
هرم منتظم رباعي



شبكة سطوحه

اكتساب معارف

كيف نرسم شبكة السطوح لهرم ؟



$ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات.

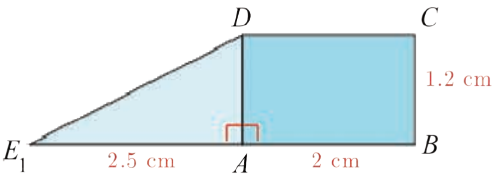
$AB = 2 \text{ cm}$ و $AD = 1.2 \text{ cm}$ و $AE = 2.5 \text{ cm}$.

ارسم شبكة السطوح للهرم $E.ABCD$.

الحلّ

- نرسم المستطيل $ABCD$ بأبعاده الحقيقية:

  $AB = 2 \text{ cm}$ و $BC = 1.2 \text{ cm}$.

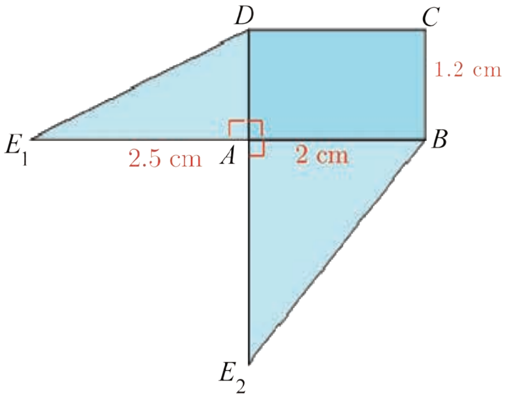


- الحرف $[AE]$ عمودي على الحرف $[AD]$ ،

  نرسم من A المستقيم (d_1) العمودي على $[AD]$

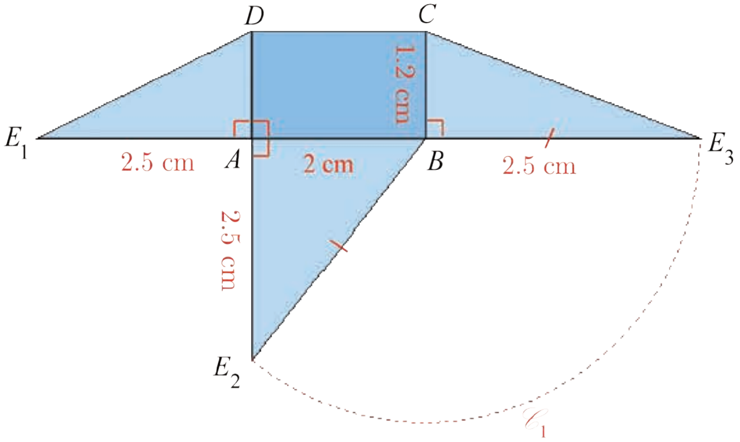
ونأخذ عليه النقطة E_1 بحيث $AE_1 = 2.5 \text{ cm}$. نرسم القطعة $[DE_1]$ وهي تمثل الحرف $[DE]$

- الحرف $[AE]$ عمودي على الحرف $[AB]$ نرسم من A المستقيم العمودي على $[AB]$ ونأخذ عليه النقطة E_2 بحيث $AE_2 = 2.5 \text{ cm}$. نرسم القطعة $[BE_2]$ وهي تمثل الحرف $[BE]$.

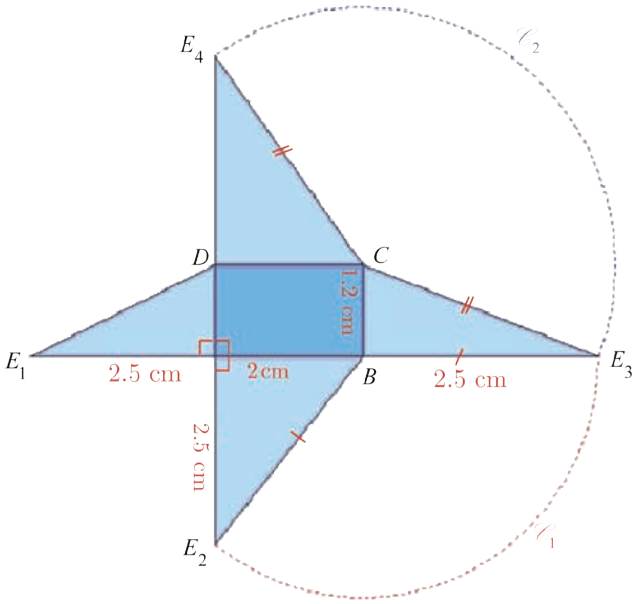


- الحرف $[CB]$ عمودي على الحرف $[BE]$.

نرسم من B المستقيم (d_1) العمودي على $[BC]$ ونأخذ عليه النقطة E_3 بحيث $BE_3 = BE_2$. وينجز عملياً رسم النقطة E_3 بتقاطع المستقيم (d_1) مع الدائرة $\mathscr{C}_1$ التي مركزها B والمارة بالنقطة E_2 . نرسم القطعة $[CE_3]$ وهي تمثل الحرف $[CE]$.



- الحرف $[DC]$ عمودي على الحرف $[DE]$، أي أنَّ $[DC] \perp [DE]$. نرسم من D المستقيم (d_2) العمودي على $[DC]$ ونأخذ عليه النقطة E_4 بحيث $CE_4 = CE_3$. وينجز عملياً رسم النقطة E_4 بتقاطع المستقيم (d_2) مع الدائرة $\mathscr{C}_2$ التي مركزها C والمارة بالنقطة E_3 . نرسم القطعة $[CE_4]$.
- المستطيل $ABCD$ هو قاعدة الهرم. المثلثات ADE_1 و ABE_2 و BCE_3 و DCE_4 تمثل الأوجه الجانبية للهرم.



عند إعادة بناء الهرم بطي المثلثات التي تمثل أوجهه الجانبية بزاوية قائمة وبجهة واحدة بالنسبة إلى مستوي القاعدة، ستنطبق النقاط E_1 و E_2 و E_3 و E_4 عند الرأس E.

وكتحصيل حاصل يتحقق $DE_1 = DE_4$.

كيف ننشئ هرماً علمت قاعدته وعلم ارتفاعه؟

$E.ABC$ هرم منتظم ارتفاعه $h = 3.5\text{ cm}$ وطول ضلع قاعدته 4 cm.

1. ارسم النقطة H مركز ثقل المثلث القاعدة ABC.
2. ارسم الارتفاع $[EH]$، ثم أكمل رسم الهرم.

الحلّ

1. نرسم المثلث ABC (ليس بأبعاد حقيقية).

وإذا أردنا مواجهة الوجه EAB في الرؤية، نرسم الضلع $[AB]$ أفقياً بطوله الحقيقي 3 cm، وخلاف ذلك بأطوال أصغر نرسم الضلعين الآخرين.

ثم نرسم متوسطين له، من A و B فيلتقيان في النقطة H. (الشكل 1)

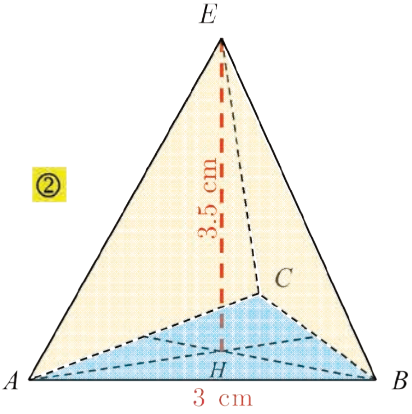
2. رسم الهرم

- نقِّط الضلعين $[AC]$ و $[BC]$ والمتوسطين المرسومين من A و B.

(المستقيمات المنقَّطة تعني أنها غير مرئية)

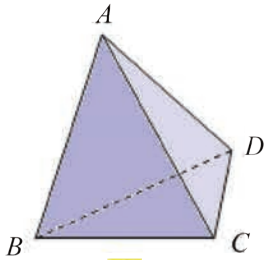
- نرسم من H المستقيم العمود على (ABC) ونأخذ عليه النقطة E بطول 3.5 cm للقطعة $[EH]$.

- نرسم الأحرف $[EA]$ و $[EB]$ و $[EC]$. (الشكل 2)

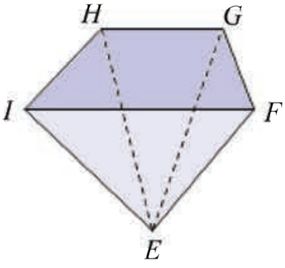


تحقّق من فهمك

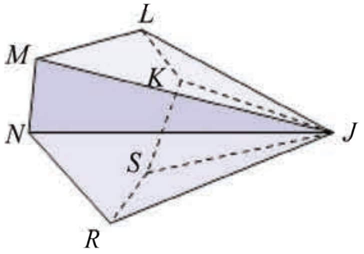
تأمل الأشكال ① و ② و ③.



①



②



③

ثم أكمل الجدول الآتي:

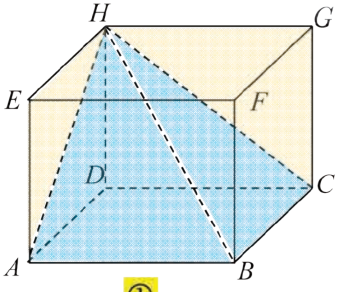
رقم الهرم	①	②	③
اسم القاعدة	BCD		
اسم الرأس	A		
عدد الأوجه الجانبية			
عدد الأحرف			

تدرّب

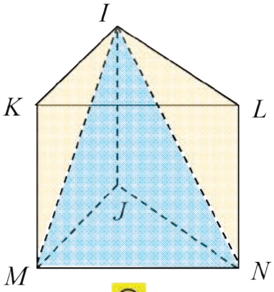
① في كلٍ من الحالتين: ① $ABCDEFGH$ موشور ② $KLIMNJ$ موشور قائم

1. علِّمْ هرماً.

2. سمِّ رأسه وقاعدته وارتفاعه



①



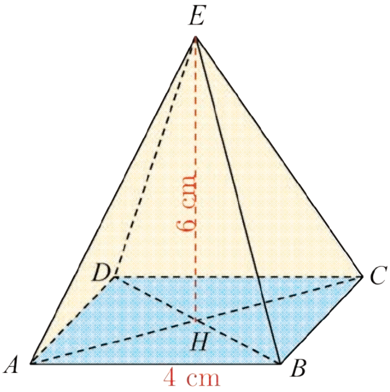
②

② الشكل المرافق هو رسم فراغي لهرم منتظم.

استفد من خواص الهرم المنتظم ومن الأطوال المعلومة لرسم الأشكال الآتية بأطوالها وزواياها الحقيقية:

① القاعدة $ABCD$. ② المثلث HAB.

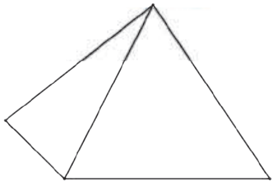
③ المثلث EHB. ④ الوجه EBC.



③ ارسم الشكل وأكمله لتحصل على الهرم المنشود.

① هرم قاعدته مستطيل.

② هرم قاعدته مثلث.



④ **رباعي وجوه منتظم**

① ارسم رباعي وجوه منتظم $ABCD$.

② ماذا يمكن القول عن جميع أحرفه.

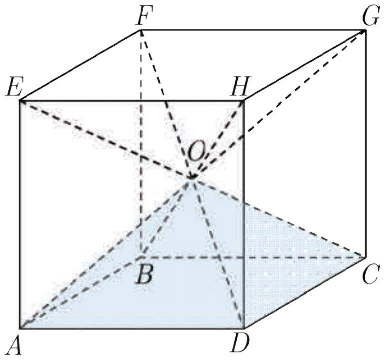
③ ارسم شبكة سطوح رباعي وجوه منتظم طول حرفه $3\ \mathrm{cm}$.

رباعي الوجوه المنتظم هو هرم ثلاثي، جميع أوجهه هي مثلثات متساوية الأضلاع.

رباعي الوجوه المنتظم هو هرم منتظم باتخاذ أي وجه من وجوهه الأربعة قاعدة له.

2 حجم هرم.

نشاط « صيغة لحجم هرم في حالة خاصة »



1. **مكعّب طول حرفه** 5 cm

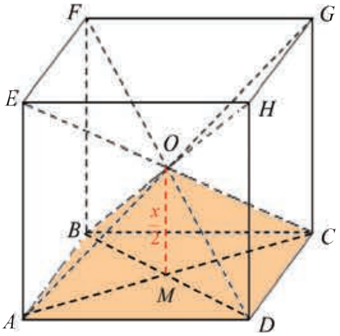
تأمل المكعب الموصوف في الدرس السابق:

1. احسب حجم هذا المكعب.

2. استنتج حجم الهرم $O.ABCD$.

2. **مكعّب طول حرفه** x cm

نرمز إلى مساحة المربع $ABCD$ بالرمز $\mathcal{S}$ مقدراً بالسنتيمترات المربعة.



ونرمز بالرمز $\mathcal{V}$ إلى حجم الهرم $O.ABCD$ مقدراً بالسنتيمترات المكعبة.

كما نرمز بالرمز h إلى ارتفاع هذا الهرم مقدراً بالسنتيمتر.

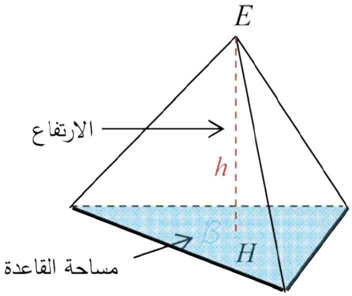
1. اشرح لماذا $\mathcal{V} = \frac{1}{6} \times \mathcal{S} \times x$.

2. جد العدد k الذي يحقق $\mathcal{V} = k \times \mathcal{S} \times h$.

تعلم

خاصة

حجم هرم، وليكن $\mathcal{V}$، يساوي ثلث جداء ضرب مساحة قاعدته، ولتكن $\mathcal{S}$ بارتفاعه h.



$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{S}\,h$$

تحقّق من فهمك

① احسب حجم هرم بالسنتيمترات المكعبة ارتفاعه $15\ \text{cm}$، وقاعدته مربع طول ضلعه $12\ \text{cm}$.

② هرم ارتفاعه $36\ \text{m}$ وحجمه $156\ \text{m}^3$. ما مساحة قاعدته؟

تدرّب

① احسب حجم هرم بالسنتيمترات المكعبة ارتفاعه $24.6\ \text{cm}$، وقاعدته معين قطراه $48\ \text{cm}$ و $11.2\ \text{cm}$.

② احسب حجم هرم ارتفاعه $2.1\ \text{cm}$، وقاعدته MNP مثلث قائم في M وفيه $MN = 1.5\ \text{cm}$ و $NP = 2.5\ \text{cm}$.

③ هرم حجمه $81.7333\ \text{mm}^3$، قاعدته مربع طول ضلعه $4.7\ \text{mm}$ ما ارتفاع هذا الهرم؟

④ هرمان حجماهما متساويان.

قاعدة أحدهما مربع طول ضلعه $2.5\ \text{cm}$، وارتفاعه يساوي $5.1\ \text{cm}$.

ارتفاع الهرم الآخر يساوي ثُلث ارتفاع الأول.

ما مساحة قاعدة الهرم الآخر؟

⑤ ABC مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه $6.8\ \text{cm}$. $[AH]$ ارتفاع

1. احسب الطول AH لأقرب ميليمتر.

2. نجعل المثلث ABC قاعدةً لهرم منتظم رأسه E وارتفاعه $10\ \text{cm}$.

احسب حجم هذا الهرم لأقرب cm^3.

⑥ هرم حجمه $200\ \text{mm}^3$ وقاعدته مستطيل، بعدا هذا المستطيل $5\ \text{cm}$ و $3\ \text{cm}$.

احسب ارتفاع هذا الهرم.

3 المخروط الدوراني.

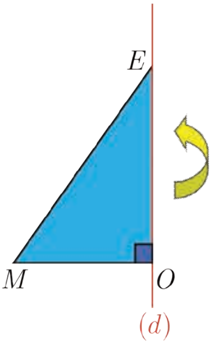
نشاط « عناصر المخروط الدوراني »

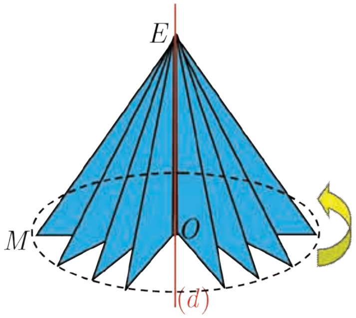
1. **وصف**

سقوف أبراج قصر هي في هيئة مخاريط اذكر مكونات أحد هذه المخاريط.

2. **خبرة**

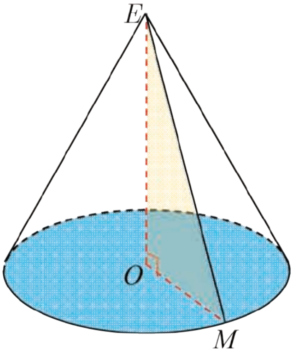
نقول إنَّ مجسّماً هو مجسم دوراني، لنعني أنّه ناتج عن دوران سطح حول محور دورة كاملة.





1. ارسم على ورق مقوى، مثلثاً EMO قائم الزاوية في O بحيث يكون $EO = 12\text{ cm}$ و $EM = 13\text{ cm}$.
2. ثبِّتْ الضلع $[EO]$ على قلمٍ بشريط لاصق ثم دوِّر القلم.
3. في حالة الدوران دورةً كاملة حول المحور (d)، ما طبيعة الخط الذي ترسمه النقطة M ؟

3. **شبكة سطوح**

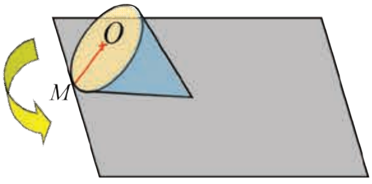


الشكل المرافق تمثيل منظوري للمخروط الذي حصلنا عليه في الفقرة السابقة.

معلومة

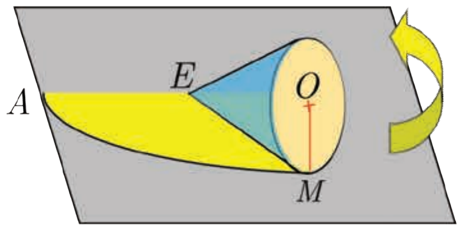
- E هي رأس المخروط الدوراني.
- $[OE]$ (أو الطول OE) هو ارتفاعه.
- $[EM]$ هو أحد مولداته.

نضع هذا المخروط على مستوٍ بحيث يكون المولد $[EM]$ على تماس مع المستوي (الشكل 1)



الشكل 1

ندوِّر المخروط حول رأسه E حتى يصبح المولد $[EM]$ ثانيةً على تماس مع المستوي (الشكل 2)



الشكل 2

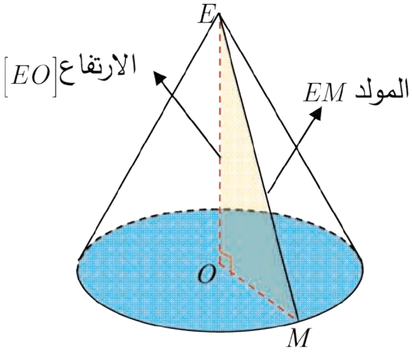
1. لماذا القوسُ $\overset{\frown}{AM}$ قوسٌ من الدائرة التي مركزها E ؟ سمِّ نصف قطرها.

2. احسب طول القوس $\overset{\frown}{AM}$.

3. استعمل التناسب لحساب قياس الزاوية $\widehat{AEM}$ بالدرجات ولأقرب منزلة عشرية واحدة.

4. ارسم بأبعاد حقيقية شبكة السطوح لهذا المخروط، ثم اصنع المخروط.

تعلّم



تعريف المخروط الدوراني

المخروط الدوراني الذي رأسه E هو المجسم المتولد من دوران مثلث EOM قائم في O، حول المستقيم (OE).

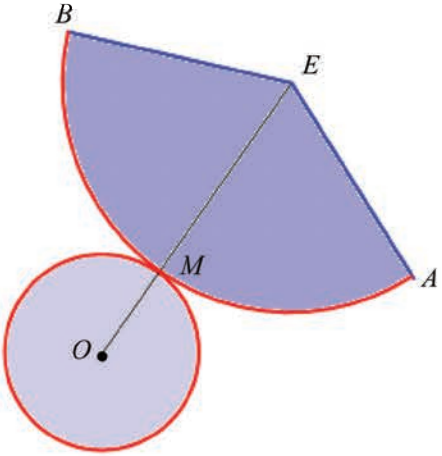
القرص المتولد من دوران $[OM]$ هو قاعدة المخروط.

تعريف ارتفاع المخروط الدوراني

- **ارتفاع** المخروط الدوراني الذي رأسه E ومركز قاعدته O، هو القطعة المستقيمة $[EO]$.

وهو أيضاً الطول EO .

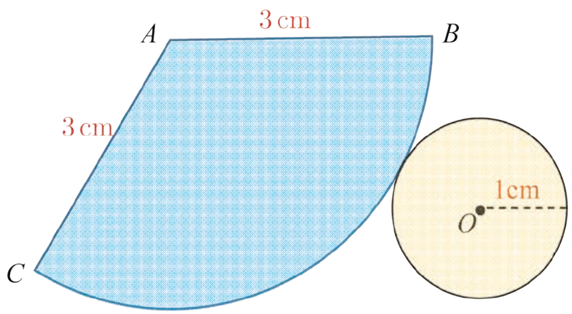
- المستقيم (EO) عمودي على مستوي القاعدة.



شبكة السطوح لمخروط دوراني

- الدائرة التي مركزها O هي قاعدة المخروط.
- القطاع المحدد بنصفي القطرين $[EA]$ و $[EB]$ من الدائرة التي مركزها E هو منشور السطح الجانبي للمخروط.
- طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ يساوي محيط الدائرة القاعدة.

تحقّق من فهمك



الشكل الآتي هو لشبكة سطوح مخروط دوراني.

1. سمِّ رأس هذا المخروط.
2. سمِّ مركز القرص القاعدة. ما نصف قطر هذا القرص؟
3. ما طول أحد مولدات هذا المخروط؟
4. احسب طول القوس $\overset{\frown}{BC}$ من الدائرة التي مركزها A ، ثم احسب طول هذا القوس لمنزلتين عشريتين.

تدرّب

① مخروط دوراني رأسه E وقاعدته القرص المحاط بالدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O.

M نقطة من الدائرة $\mathscr{C}$.

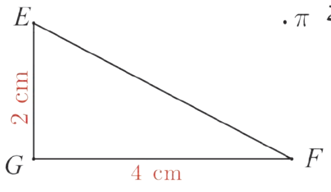
1. ارسم مخروطاً بمواصفات النص.
2. ارسم المثلث EOM بأبعاده الحقيقية في حالة $EO = 5\text{ cm}$ و $OM = 3\text{ cm}$.
3. أكمل الجدول الآتي بقيم حقيقية أو مقربة إلى منزلة عشرية واحدة.

EO	8	6	5		
OM	5			1.2	2.5
EM		7.5	10	18.25	6

② EFG مثلث قائم الزاوية في G، $GE = 2\text{ cm}$ و $GF = 4\text{ cm}$.

في كل من الحالات الآتية، قل إن كنا سنحصل على مخروط دوراني أم لا.

عند الإيجاب، سمِّ رأس المخروط وقاعدته، ثم احسب حجمه بدلالة π.

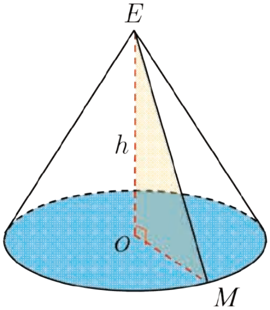


① ندوِّر المثلث EFG حول $[GE]$.

① ندوِّر المثلث EFG حول $[GF]$.

① ندوِّر المثلث EFG حول $[EF]$.

4 حجم مخروط دوراني.



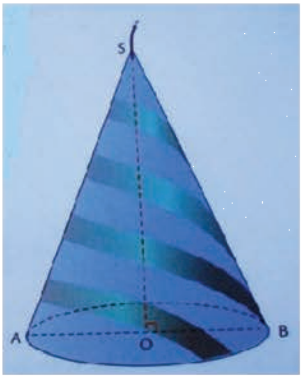
نشاط « دستور يعطي حجم مخروط دوراني لاستعمالها »

حجم مخروط دوراني

نقبل أنَّ حجم مخروط، وليكن $\mathcal{V}$، ارتفاعه h وقاعدته قرص دائري مساحته S، تعطى بالعلاقة $\mathcal{V}=\frac{1}{3}S\,h$

الشكل المرافق تصوير لشمعة بهيئة مخروط دوراني رأسه S وقاعدته قرص دائري مركزه O وقطره $AB=10\text{ cm}$.

أُعطي طول مولده $SA=13\text{ cm}$.



1. احسب ارتفاع هذه الشمعة SO.

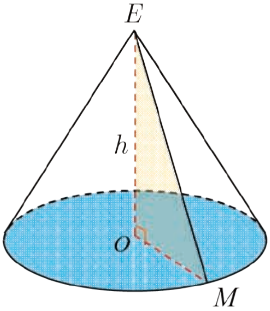
2. احسب حجم هذه الشمعة بالسنتيمترات المكعبة.

3. كم شمعة من هذا النمط يمكن صنعها من باستعمال 4 ليترات من الشمع؟

$\left(1\text{ L}=1\text{ dm}^3=1\ 000\text{ cm}^3\right)$

تعلّم

خاصة



حجم مخروط دوراني، وليكن $\mathcal{V}$، يساوي ثلث جداء ضرب مساحة قاعدته S، بارتفاعه h.

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}S\,h$$

مثال

مخروط دوراني ارتفاعه $h=4\text{ cm}$ ونصف قطر قاعدته $r=1.5\text{ cm}$، حجمه:

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\left(\pi r^2\right)h=\frac{1}{3}\left(\pi\times1.5^2\right)\times4=3\pi$$

فحجم هذا المخروط يساوي $3\pi\text{ cm}^3$. وبالتقريب إلى خانة عشرية واحدة يكون $\mathcal{V}\approx9.4\text{ cm}^3$

مثال

مخروط دوراني، حجمه $50\ \text{cm}^3$ ونصف قطر قاعدته $3\ \text{cm}$.

احسب ارتفاع هذا المخروط لأقرب سنتيمتر.

الحلّ

تُعطى مساحة قرص دائري بالدستور $\mathcal{B} = \pi r^2$.

ومع $r = 3$، يكون $\mathcal{B} = \pi \times 3^2 = 9\pi$.

ويُعطى حجم مخروط دوراني بالدستور $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\mathcal{B}\,h$.

ومع $\mathcal{V} = 50$، يكون $50 = \dfrac{1}{\cancel{3}} \times \cancel{9}\pi \times h$، أي $50 = 3\pi \times h$.

نقسم طرفي المساواة الأخيرة على 3π، فنجد $h = \dfrac{50}{3\pi}$.

ثم نستعمل آلةً حاسبة وفق $\boxed{=}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{(}$ $\boxed{\div}$ 50 وليس $\boxed{=}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{\div}$ 50.

نستنتج أن $h = 5.3 \approx 5\,\text{cm}$.

تحقّق من فهمك

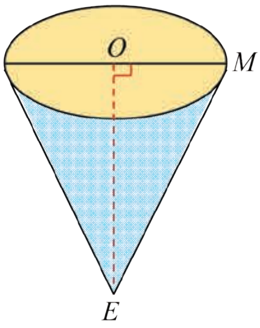
مخروط دوراني ارتفاعه $12\ \text{cm}$ وطول قطر قاعدته $20\ \text{cm}$.

1. ارسم هذا المخروط.
2. احسب مساحة قاعدته لأقرب cm^2.
3. احسب حجمه لأقرب cm^3.

تدرّب

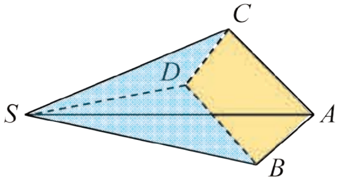
① وعاء بهيئة مخروط دوراني، ارتفاعه $OE = 10\ \text{cm}$ ونصف قطر قاعدته $OM = 5\ \text{cm}$.

احسب القيمة الحقيقية لحجم هذا الوعاء بالسنتيمترات المكعبة، ثم احسب هذا الحجم لأقرب cm^3.



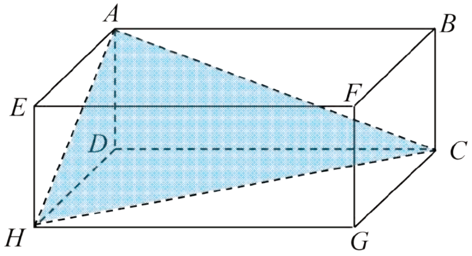
تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات. أشر إليها.



❶ قاعدة هذا الهرم هي

① SBC ② $ABDC$ ③ SAB



❷ الهرم $ACDH$ واقع داخل متوازي مستطيلات.

ارتفاع هذا الهرم ليس

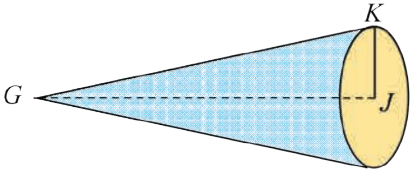
① $[AH]$ ② $[HD]$ ③ $[DC]$

❸ الأوجه الجانبية لأي هرم منتظم هي مثلثات

① متساوية الساقين ② متساوية الأضلاع ③ قائمة

❹ هرم ارتفاعه 9 cm، وحجمه 75 cm^3، وقاعدته مربع. طول ضلع قاعدته يساوي

① 25cm ① 5cm ① 6.25cm

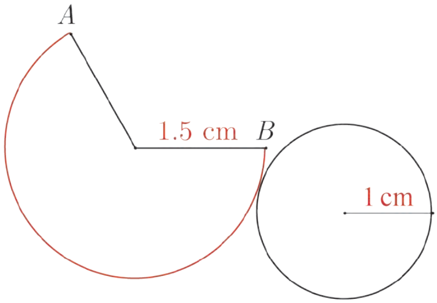


❺ ارتفاع هذا المخروط الدوراني هو

① $[GK]$

② $[JK]$

① $[GJ]$



❻ هذا الشكل هو شبكة سطوح مخروط دوراني.

طول القوس $\overset{\frown}{AB}$ من الدائرة الحمراء هو بحدود

① 3.14 cm

② 6.28 cm

③ 9.42 cm

❼ مخروط دوراني ارتفاعه 10 cm ونصف قطر قاعدته 3 cm. حجم هذا المخروط يساوي تقريباً

① 188.5 cm^3 ② 94.2 cm^3 ③ 282.7 cm^3

2 هل أنت موافق أم غير موافق؟ اشرح إجابتك.

❶ إذا كان ارتفاع هرم عمودياً على مستوي قاعدته، كان الهرم منتظماً.

❷ إذا اشترك مخروط وأسطوانة دورانية بقاعدة واحدة وكان ارتفاعاهما متساويين، كان حجم المخروط مساوياً ثُلث حجم الأسطوانة.

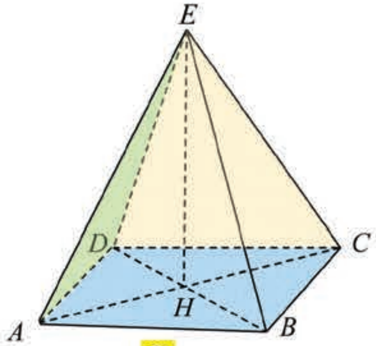
❸ شبكة سطوح لهرم ثلاثي منتظم، تتألف من أربعة مثلثات.

❹ ارتفاع مخروط دوراني عمودي على جميع أنصاف أقطار قاعدته.

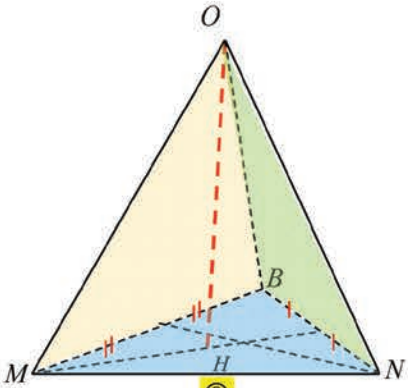
❺ هرم منتظم قاعدته مربع طول ضلعه $6\ \text{cm}$، وارتفاعه $4\ \text{cm}$.

مساحة السطح الجانبي لهذا الهرم تساوي $60\ \text{cm}^2$.

3 تأمل الشكلين الآتيين:



①



②

• في الشكل ①، $EABCD$ هرم منتظم.

ما طبيعة قاعدته؟ ما ارتفاعه؟ اشرح إجابتك.

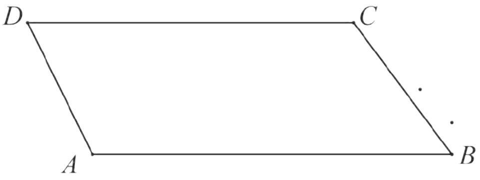
• في الشكل ②، MNB مثلث متساوي الأضلاع. $[OH]$ هو ارتفاع الهرم $OMNB$.

اشرح لماذا هذا الهرم ليس منتظماً.

4 $EABCD$ هرم منتظم، رأسه E، وقاعدته $ABCD$.

$AB = 4.5\ \text{cm}$، وارتفاع الهرم $EH = 4\ \text{cm}$.

رسم أحدهم قاعدة هذا الهرم $ABCD$ بهيئة متوازي أضلاع، كما يشير الشكل المرافق.



1. ارسم هذا الشكل وضَعْ عليه النقطة H.

2. ارسم الرأس E منسجماً مع كون الهرم منتظماً.

5 $SEFG$ هرم منتظم. طول ضلع قاعدته 4.5 cm وطول حرفه الجانبي 6.5 cm.

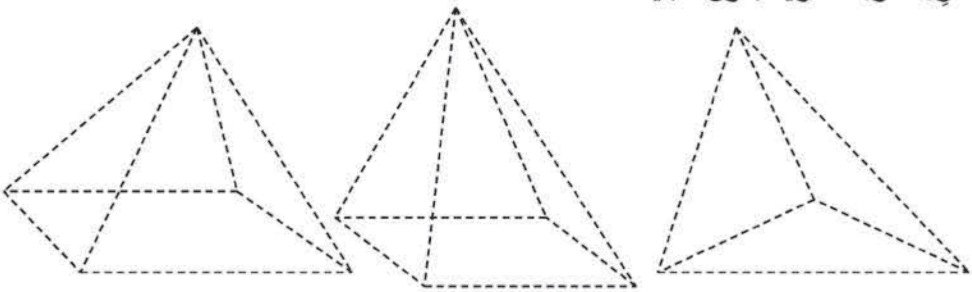
ارسم شبكة سطوح هذا الهرم.

6 في الشكل المرافق ثلاثة أهرامات متداخلة.

1. انقل إلى صفحة بيضاء كلاً منها على حدته.

2. ارسم كل قطعة مستقيمة مرئية في كل شكل بخط متصل.

3. لوّنْ الأوجه المرئية بألوان متباينة.

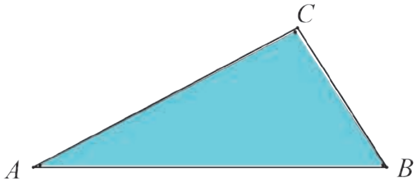


7 $EABC$ هرم منتظم مستند على قاعدته ABC، ارتفاعه $[EH]$.

رسمَ مشاهد قاعدة هذا الهرم. حسب رؤية مشاهد:

1. أعد رسم هذه القاعدة وارسم عليها النقطة H.

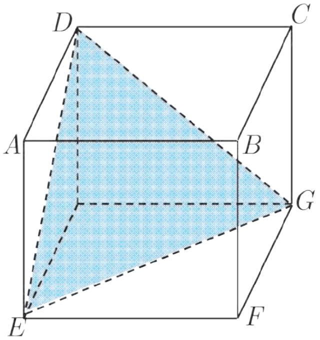
2. وضّع رأس الهرم E وأكمل رسم الهرم.



8 $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 5 cm.

1. ارسم، بأبعاد حقيقية، المثلث EHG ثم المثلث EDG.

2. استنتج طبيعة المثلث EDG.

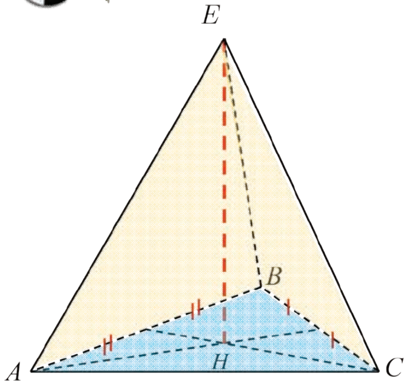


9 ارسم هرماً ارتفاعه 33 cm، وقاعدته مربع طول قطره 18 cm.

10 ارسم هرماً ارتفاعه 31.5 cm، وقاعدته MNP مثلث متساوي الساقين في M وفيه:

$MP = 12.5\text{ cm}$ و $NP = 15\text{ cm}$. (توجيه: احسب ارتفاع القاعدة $[MH]$)

لإحراز تقدّم

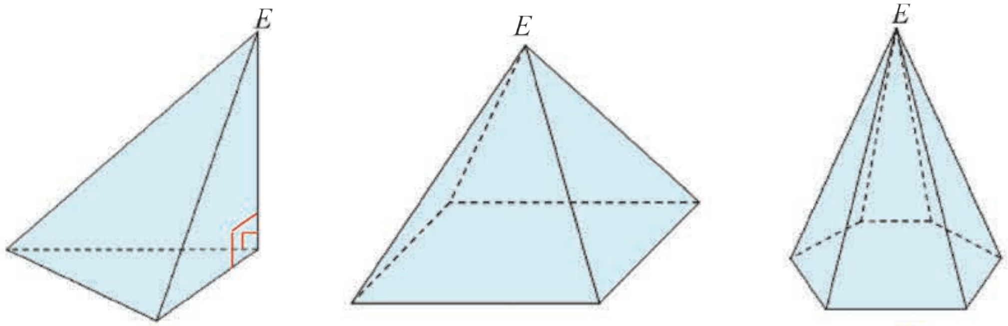


معلومة

- ارتفاع هرم $[EH]$ هو العمود من رأسه E على مستوي قاعدته.
- H هي نقطة من مستوي قاعدة الهرم، وهي في حالة الهرم المنتظم (الشكل المرافق) مركز قاعدته، أي مركز الدائرة المارة برؤوس القاعدة.

11 إنشاء ارتفاع هرم

انسخ لديك الأشكال 1 و 2 و 3 ، ثم ارسم ارتفاع كلٍ من الأهرامات الثلاثة باللون الأحمر.
(الشكلان 2 و 3 هما لهرمين منتظمين)



12 استعمال دستور الحجم

1. هرم ارتفاعه 8 cm، قاعدته مربع طول ضلعه 3 cm.

① ارسم شكلاً ووضِّع ارتفاعه $[EH]$، وأكمل $h = \cdots$.

② احسب S مساحة قاعدة هذا الهرم.

③ احسب $\mathcal{V}$ حجم هذا الهرم.

2. مخروط دوراني ارتفاعه 6 cm ونصف قطر قاعدته 8 cm.

① ارسم شكلاً ووضِّع ارتفاعه $[EH]$، وأكمل $h = \cdots$.

② احسب S مساحة قاعدة هذا المخروط بالصيغة $k\pi \text{ cm}^2$. ما قيمة k؟

③ احسب $\mathcal{V}$ القيمة الحقيقية لحجم هذا المخروط، ثم احسب القيمة التقريبية له بوضع $\pi \approx 3.14$

💡 مخروط دوراني، أو هرم، ارتفاعه h ومساحة قاعدته S، يعطى حجمه $\mathcal{V}$ بالعلاقة $\mathcal{V}=\frac{1}{3}S\,h$

13 تجانس وحدات القياس

- إذا كان الارتفاع h مقاساً بوحدة قياس الطول cm، يجب أن تقاس مساحة القاعدة S بوحدة قياس المساحة cm^2، ويقاس الحجم $\mathcal{V}$ بوحدة قياس الحجم cm^3.

1. انقل لديك الجدول الآتي وأكمله مستعملاً وحدات القياس المناسبة.

	هرم 1	هرم 2	هرم 3
الارتفاع	5 ...	2 dm	9 ...
مساحة القاعدة	12 ...	24 ...	$21\ cm^2$
الحجم	$20\ cm^3$	16 ...	63 ...

2. ① ارتفاع هرم 50 dm وحجمه $100\ m^3$. احسب مساحة قاعدته.

② ارتفاع مخروط دوراني 5.4 m ونصف قطر قاعدته 320 cm. احسب حجم المخروط بدلالة π.

💡 في دستور الحجم $\mathcal{V}=\frac{1}{3}S\,h$، يجب أن تكون وحدات القياس متجانسة.

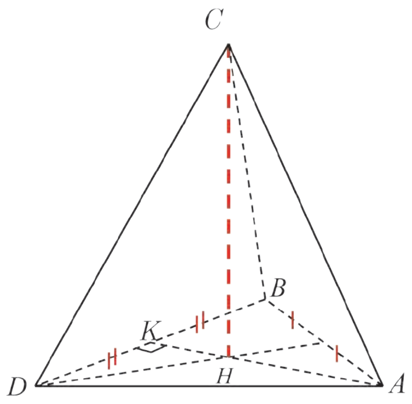
14 تعلّم صياغة نص

اقرأ النص والحل المنجز من قبل أحد الطلاب. ثم حرِّر الحل مع الأخذ بمجمل ملاحظات المصحح.

النصّ

احسب حجم الهرم $ABCD$، علماً:

CH = 9 cm و BD = 12 cm و AK = 8 cm.



حلّ الطالب، مع ملاحظات المصحّح

حجم الهرم:

$\frac{1}{3}S\times h$ علامَ يدل الرمز S في هذا الدستور؟

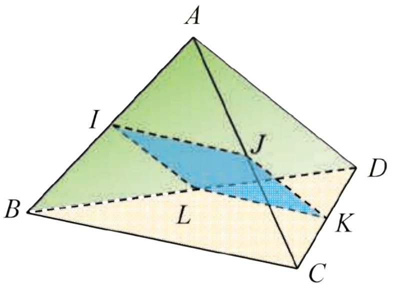
$\frac{1}{3}\times\cancel{8}\times 9=\frac{8\times\cancel{9}}{\cancel{3}}=\cancel{24}$ كلا

فحجم الهرم هو $\cancel{24}$. أين وحدة القياس؟

التعمّق

لحساب طول قطعة مستقيمة أو إثبات حقيقة في مجسم، نستعمل مبرهنات الهندسة المستوية: مبرهنة فيثاغورث، المنتصفات، النسب المتساوية ......

15 إثبات توازي مستقيمات

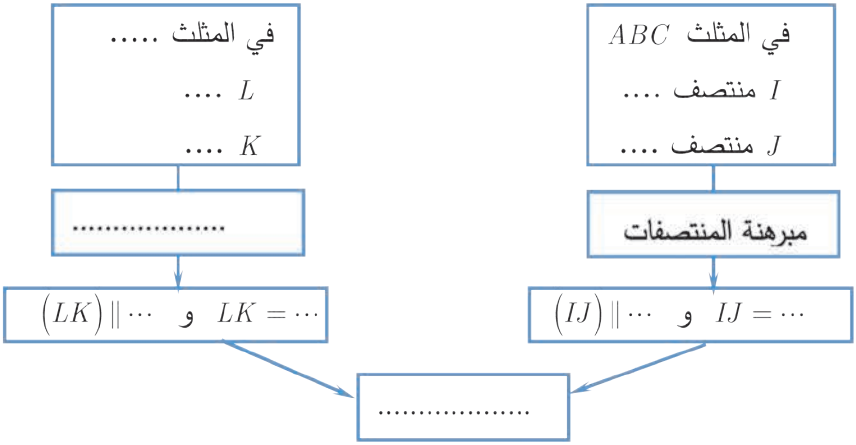


$ABCD$ رباعي وجوه منتظم. I و J و K و L هي على التوالي منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[CD]$ و $[BD]$.

1. أثبت أنَّ $IJ = LK$ وأنَّ $(IJ) \parallel (LK)$.

2. ما طبيعة الرباعي $IJKL$؟

يمكن الإفادة من المخطط الآتي:



16

$EABCD$ هرم منتظم قاعدته مربع. النقطة O هي مركز قاعدته $ABCD$.

$AC = 6 \text{ cm}$ و $EO = 5 \text{ cm}$.

1. ارسم شكلاً للهرم $ABCD$

2. احسب AE.

3. ما طبيعة المثلث OAB؟ احسب AB.

17 مساحة السطح الجانبي لمخروط دوراني

الشكل (م) يمثل مخروطاً دورانياً نصف قطر قاعدته $3\ cm$ وطول مولده $5\ cm$.

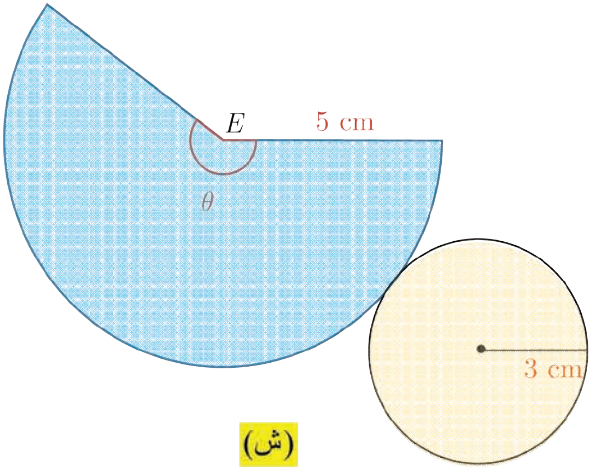
والشكل (ش) يمثل شبكة سطوح هذا المخروط.

مساحة القطاع الدائري الذي مركزه E تدعى المساحة الجانبية للمخروط.

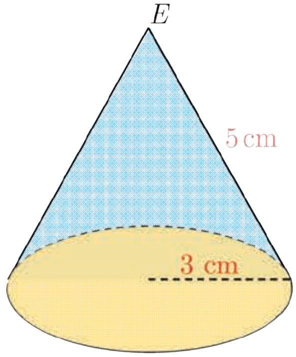
1. احسب قياس الزاوية θ.

2. استنتج مساحة السطح الجانبي للمخروط.

3. احسب مساحة السطح الكلي للمخروط بالتقريب إلى أقرب ميلليمتر مربع.



(ش)

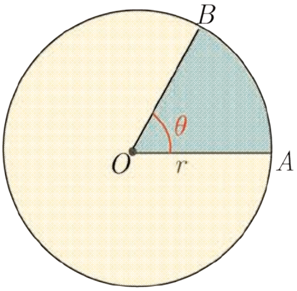


(م)

في دائرة مركزها O ونصف قطرها r، مساحة قطّاع دائري S متناسبة مع الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ التي ضلعاها يحددان القطاع.

بشكلٍ خاص:

- في حالة $\widehat{AOB} = 0^\circ$، $S = 0$
- في حالة $\widehat{AOB} = 360^\circ$، $S = \pi r^2$
- في حالة $\widehat{AOB} = 180^\circ$، $S = \frac{1}{2}\pi r^2$

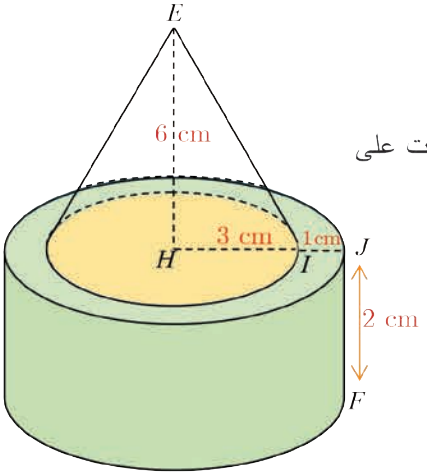


بشكل عام: في حالة $\widehat{AOB} = \theta^\circ$، $S = \dfrac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

18 جرس بهيئة مخروط دوراني، حجمه $3500\ cm^3$. نتصور قرصاً دائرياً بأبعاد قاعدة الجرس نصف قطره $15\ cm$. احسب ارتفاع هذا الجرس لأقرب سنتيمتر.

19 مخروط دوراني، حجمه $100.43\ cm^3$ ونصف قطر قاعدته $3.6\ cm$.
احسب ارتفاع هذا المخروط لأقرب ميليمتر.

20 نصب مخروط على اسطوانة



الشكل المرافق تمثيل لمجسم مؤلف من مخروط مثبت على أسطوانة دورانية.

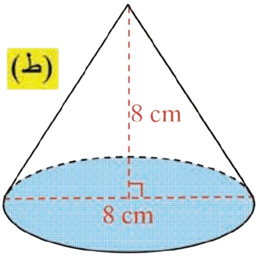
نعلم أنَّ ارتفاع المخروط $EH = 6\ cm$ ونصف قطر قاعدته $HI = 3\ cm$.

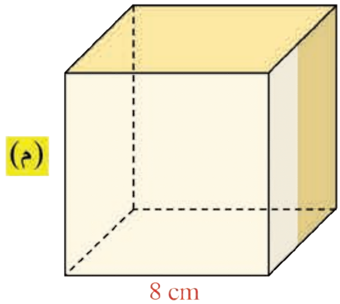
ونعلم أيضاً أنَّ ارتفاع الأسطوانة $FJ = 2\ cm$ ونصف قطر قاعدته $HJ = 4\ cm$.

احسب حجم المجسم.

21 مخروط داخل مكعب

(م) مكعب طول حرفه $8\ cm$. (ط) مخروط قطر قاعدته $8\ cm$ وارتفاعه $8\ cm$.





1. احسب حجم المكعب.
2. احسب حجم المخروط، ثم أوجد قيمته التقريبية لأقرب cm^3.
3. نضع المخروط داخل المكعب. هل يشغل المخروط $30\ \%$ من حجم المكعب؟ علل إجابتك.