الجُمهوريَّةُ العربيَّةُ السُّوريَّةُ
وزارة التَّربية والتَّعليم

الرِّياضيّات

الهندسة

كتاب الطالب

الصَّفُّ التَّاسع

2025 - 2026 م
1446 هـ

حقوقُ الطِّباعةِ والتَّوزيعِ محفوظةٌ للمؤسّسةِ العامّةِ للطِّباعةِ
حقوقُ التّأليفِ والنَّشرِ محفوظةٌ لوزارة التَّربية والتَّعليم في الجُمهوريَّةُ العربيَّةُ السُّوريّةُ

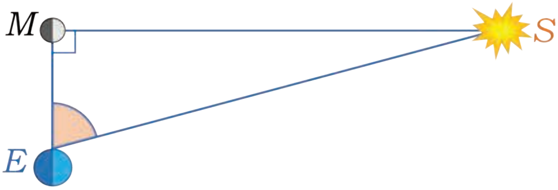
طُبع أوّل مرّة للعام الدّراسيّ 2017 – 2018 م

الوحدة الأولى
النسب المثلّثية لزاوية حادّة

أريستارخَس الساموي (Aristarchus of Samos)

أريستارخَس الساموي هو فلكي إغريقي عاش في الاسكندرية في القرن الثالث قبل الميلاد، وهو أوّل من أتي بنموذج فلكي تحتلّ الشمس موقع المركز فيه، ومن إنجازاته أنّه قدّر المسافة بين الأرض والشمس.

تكون الزاوية بين الأرض E والقمر M والشمس S قائمة $\widehat{EMS} = 90°$ عندما تضيء الشمس نصف الكرة القمرية. وفي هذا الوضع، قدَّر أريستارخَس قياس الزاوية $\widehat{SEM}$ بمقدار $87°$.



واستناداً إلى ذلك، أكّد أريستارخَس، أنَّ «مسافة الأرض عن الشمس ES تعادل 19 ضعف مسافة الأرض عن القمر EM »

في الحقيقة، باستعمال أدوات القياس المتطوّرة، تبيّن أنّ $\widehat{SEM} \approx 89°.85$. فكيف نصحِّحُ استنتاج أريستارخَس؟

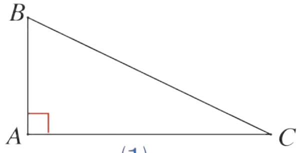
1

النسب المثلثية لزاوية حادّة

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يأتي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، أشر إليها.

1. وتر المثلث القائم



(1)

في الشكل (1)، المثلث BAC قائم في A، وتر هذا المثلث هو

① $[AB]$ ② $[AC]$ ③ $[BC]$

2. الضلع المقابلة لزاوية حادة في مثلث قائم

في الشكل (1)، الضلع المقابلة للزاوية $\widehat{B}$ هي

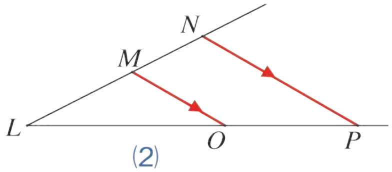
① $[AB]$ ② $[AC]$ ③ $[BC]$

3. ضلع مجاورة لزاوية حادة في مثلث قائم

في الشكل (1)، الضلع الآتية مجاورة للزاوية $\widehat{B}$:

① $[AB]$ ② $[AC]$ ③ $[BC]$

4. النسب الثلاث المتساوية



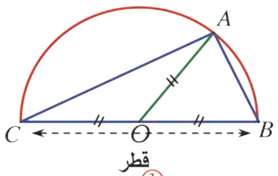
(2)

في الشكل (2)، النقاط L و M و N على استقامة واحدة، وكذلك النقاط L و O و P على استقامة واحدة. يمكن أن نكتب :

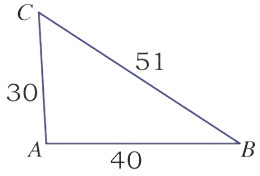
① $\frac{LM}{LN} = \frac{LO}{LP} = \frac{MO}{NP}$ ② $\frac{LM}{MN} = \frac{LO}{OP} = \frac{MO}{NP}$ ③ $\frac{LN}{LM} = \frac{LO}{OP} = \frac{MO}{NP}$

5. مثلث قائم

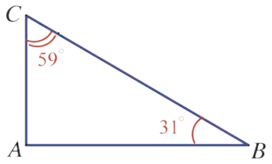
أيّ المثلثات الآتية غير قائم



①



②



③

6. حساب مجهول

لحساب x من العلاقة $\frac{1}{7} = \frac{x}{5}$، يمكن أن نكتب

① $x = 5 \times 7$ ② $7x = 5$ ، إذن $x = \frac{5}{7}$ ③ $5 = 7x$ ، إذن $x = 5 - 7$

1 بعض خواص التناسب

نشاط «تعرف خواص التناسب»

إذا كانت d و c و b و a أربعة أعداد غير معدومة وكان (1) $a\times d=b\times c$

1. بتقسيم طرفي المساواة (1) على $b\times d$ نجد: $\dfrac{b\times c}{b\times d}=\dfrac{a\times d}{b\times d}$ إذن $\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$

- اكتب التناسب الذي تحصل عليه بتقسيم طرفي المساواة (1) على $a\times c$.
- اكتب التناسب الذي تحصل عليه بتقسيم طرفي المساواة (1) على $a\times b$.
- اكتب التناسب الذي تحصل عليه بتقسيم طرفي المساواة (1) على $c\times d$.

2. بإضافة العدد 1 إلى طرفي التناسب $\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$ نجد $\dfrac{c}{d}+1=\dfrac{a}{b}+1$، وبتوحيد المقامات في طرفي المساواة الأخيرة نجد $\dfrac{c+d}{d}=\dfrac{a+b}{b}$.

3. بأسلوب مماثل لما وجدناه في الخطوة 2. نطرح العدد 1 من طرفي التناسب $\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$ نحصل على $\dfrac{c-d}{d}=\dfrac{a-b}{b}$.

تعلّمْ

إذا كانت d و c و b و a أربعة أعداد غير معدومة.

في التناسب $\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$ نسمي الأعداد بالترتيب d و c و b و a أعداداً متناسبة.

نسمي d و a طرفيّ التناسب ، نسمي c و b وَسطيّ التناسب.

بعض خواصّ التناسب

في أيّ تناسب $\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}$:

1. إذا قلبنا النسبتين نحصل على تناسب جديد أي $\dfrac{d}{c}=\dfrac{b}{a}$.

مثال في التناسب $\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$ بقلب النسبتين نحصل على التناسب $\dfrac{20}{15}=\dfrac{4}{3}$.

2. إذا بادلنا بين طرفي التناسب نحصل على تناسب جديد أي $\dfrac{c}{a}=\dfrac{d}{b}$.

مثال في التناسب $\dfrac{9}{12}=\dfrac{3}{4}$ بتبديل موقعي الطرفين نحصل على التناسب $\dfrac{9}{3}=\dfrac{12}{4}$.

3. إذا بادلنا بين وسطي التناسب نحصل على تناسب جديد أي $\dfrac{b}{d}=\dfrac{a}{c}$.

مثال في التناسب $\dfrac{50}{30}=\dfrac{5}{3}$ بتبديل موقعي الوسطين نحصل على التناسب $\dfrac{3}{30}=\dfrac{5}{50}$.

4. إذا ثبتنا المقامين وأضفنا كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

بشرط $a+b\neq 0\ ,\ c+d\neq 0$.

مثال في التناسب $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$ نضيف كل مقام إلى البسط الموافق له فنجد : $\frac{5+7}{7}=\frac{15+21}{21}$.

تحقّق من ذلك!

5. إذا ثبتنا المقامين وطرحنا كل مقام من البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

بشرط $a-b\neq 0\ ,\ c-d\neq 0$.

مثال في التناسب $\frac{5}{4}=\frac{20}{16}$ نطرح من كل بسط المقام الموافق له فنجد : $\frac{5-4}{4}=\frac{20-16}{16}$.

تحقّق من ذلك!

6. إذا ثبتنا البسطين وأضفنا كلّ بسط إلى المقام الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$

بشرط $a+b\neq 0\ ,\ c+d\neq 0$.

مثال في التناسب $\frac{5}{7}=\frac{15}{21}$ نضيف كل بسط إلى المقام الموافق له: $\frac{5}{7+5}=\frac{15}{21+15}$.

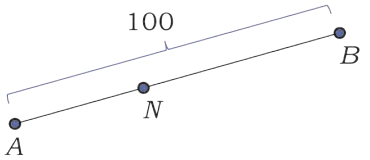
تحقّق من ذلك!

7. إذا ثبتنا البسطين وطرحنا من كل مقام البسط الموافق له نحصل على تناسب جديد $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$

بشرط $b-a\neq 0\ ,\ d-c\neq 0$.

مثال في التناسب $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$، نطرح من كل مقام البسط الموافق له : $\frac{2}{5-2}=\frac{8}{20-8}$ أي $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$. تحقّق من ذلك!

مثال في الشكل المجاور $\frac{2}{3}=\frac{AN}{NB}$ احسب كلّاً من AN و NB



الحل

لدينا $\frac{2}{3}=\frac{AN}{NB}$ فإذا ثبّتنا المقامين وأضفنا كل مقام إلى البسط الموافق له نحصل على:

$$\frac{AN+NB}{NB}=\frac{2+3}{3}$$

أو $\frac{5}{3}=\frac{100}{NB}$ ومنه $NB=60$. ومن ثمّ $AN=100-60=40$.

تحقق من فهمك

① إذا كان $\frac{b}{3} = \frac{a}{2}$ وكان $a + b = 15$ فاحسب كلّاً من a و b.

② جِدْ عددين موجبين مجموعهما 27 ونسبتهما $\frac{1}{2}$.

تدربْ

① ABC مثلث فيه $\widehat{C} = 110°$، و $\frac{\widehat{A}}{\widehat{B}} = \frac{3}{4}$ احسب قياس كل من الزاويتين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$.

② جِدْ عددين موجبين فرقهما 28 ونسبتهما $\frac{12}{5}$.

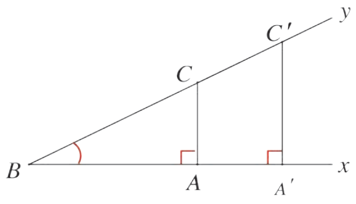
③ يزيد عمر سارة على عمر سلمى بمقدار أربع سنوات فإذا كانت نسبة عمريهما $\frac{3}{5}$ فاحسب عمر كل منهما.

④ لدى صبا لعبة مكعبات فيها 30 مكعباً ملوناً بالأصفر والأحمر ونسبة المكعبات الصفراء إلى الحمراء $\frac{3}{2}$ احسب عدد كلّ من المكعبات الصفراء والحمراء.

2 النسب المثلثية لزاوية حادّة

نشاط «إيجاد النسب المثلثية في المثلث القائم»

1. مثلثات قائمة مشتركة بزاوية حادة



المثلثان BAC و $BA'C'$ قائمان في A و A' ومشتركان بالزاوية الحادة $\widehat{B}$.

① اشرح لماذا $\dfrac{BA}{BA'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{BC'}$.

③ ② ①

② علل $AC \times BC' = A'C' \times BC$ ثم استنتج أنَّ $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A'C'}{BC'}$.

③ علل $BC \times BA' = BC' \times BA$ ثم استنتج أنَّ $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B}{BC'}$.

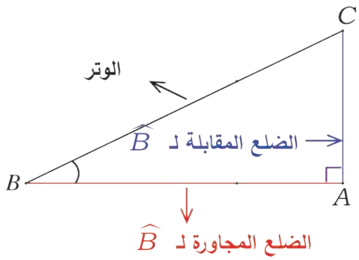
④ استنتج أيضاً أنَّ $\dfrac{AC}{BA} = \dfrac{A'C'}{BA'}$.

مصطلحات

لا تتعلق النسب $\dfrac{AC}{BC}$ و $\dfrac{AB}{BC}$ و $\dfrac{AC}{AB}$ بموقع A على نصف المستقيم $[Bx)$، طالما الزاوية $\widehat{B}$ ثابتة.

- النسبة $\dfrac{AC}{BC}$ تسمى **جيب الزاوية** $\widehat{B}$. نرمز إليها بالرمز $\sin \widehat{B}$.
- النسبة $\dfrac{AB}{BC}$ تسمى **تجيب الزاوية** $\widehat{B}$، نرمز إليها بالرمز $\cos \widehat{B}$.
- النسبة $\dfrac{AC}{AB}$ تسمى **ظل الزاوية** $\widehat{B}$. نرمز إليها بالرمز $\tan \widehat{B}$.

2. في مثلث قائم



1. $\widehat{B}$ زاوية حادة في مثلث قائم، انسخ وأكمل باستعمال العبارات المدونة على الشكل المرافق:

$$\sin \widehat{B} = \frac{\cdots}{\cdots} \quad \text{و} \quad \cos \widehat{B} = \frac{\cdots}{\cdots} \quad \text{و} \quad \tan \widehat{B} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

2. بقطع النظر عن قياس الزاوية $\widehat{B}$، اشرح:

① لماذا $\sin \widehat{B}$ و $\tan \widehat{B}$ عددان موجبان تماماً؟

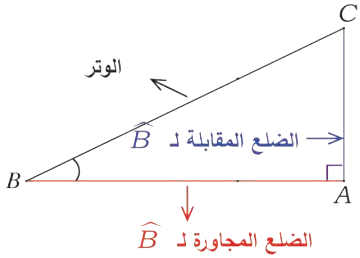
② لماذا $\sin \widehat{B} < 1$ و $\cos \widehat{B} < 1$ ؟

تعلّم

تعريف

في مثلث قائم:

- تجيب زاوية حادة يساوي النسبة: $\dfrac{\text{طول الضلع المجاورة لتلك الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$.
- جيب زاوية حادة يساوي النسبة: $\dfrac{\text{طول الضلع المقابلة لتلك الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$.
- ظل زاوية حادة يساوي النسبة: $\dfrac{\text{طول الضلع المقابلة لتلك الزاوية}}{\text{طول الضلع المجاورة لها}}$.



يُرمز إلى تجيب الزاوية الحادة $\widehat{B}$ بالرمز $\cos\widehat{B}$، وإلى جيبها بالرمز $\sin\widehat{B}$، وإلى ظلها بالرمز $\tan\widehat{B}$.

في الشكل المرسوم جانباً :

$\cos\widehat{B} = \dfrac{BA}{BC}$ و $\sin\widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ و $\tan\widehat{B} = \dfrac{AC}{AB}$.

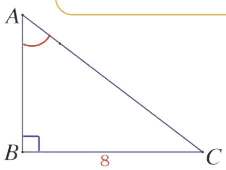
ملاحظات

1. النسب المثلثية ليس لها وحدات قياس.
2. النسب المثلثية **لزاوية حادة** هي أعداد موجبة تماماً لكونِ كلٍ منها نسبة طولين.
3. نعلم أنَّ وتر المثلث القائم هو أطول أضلاعه، ففي المثلث ABC القائم في A: $BA < BC$ ، إذن $\dfrac{BA}{BC} < 1$ و $AC < BC$، إذن $\dfrac{AC}{BC} < 1$، أي $\cos\widehat{B} < 1$ و $\sin\widehat{B} < 1$.
4. نستنتج من 2 و 3 أنَّ $0 < \cos\widehat{B} < 1$ و $0 < \sin\widehat{B} < 1$.

اكتساب معارف

كيف نحسب طول ضلع في مثلث قائم بمعرفة نسبة مثلثية؟

إذا كانت النسبة المعلومة هي جيب الزاوية يمكن استعمالها لحساب طول الضلع المقابلة لتلك الزاوية أو لحساب طول الوتر.



مثال

ABC مثلث قائم في B، $BC = 8$ و $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{4}{5}$.

احسب طول الوتر.

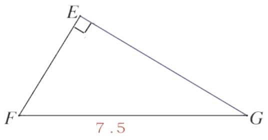
الحلّ

في المثلث ABC القائم في B : $\sin\widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$ أي $\dfrac{8}{AC} = \dfrac{4}{5}$ إذن $AC = 10$.

إذا كانت النسبة المعلومة هي تجيب الزاوية يمكن استعمالها لحساب طول الضلع المجاورة لتلك الزاوية أو لحساب طول الوتر.

مثال EFG مثلث قائم في E، $FG = 7.5$ و $\frac{2}{3} = \cos\widehat{EFG}$.

احسب الطول FE.

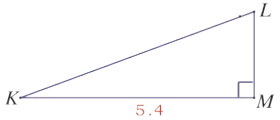


الحل

في المثلث EFG القائم في E: $\cos\widehat{EFG} = \frac{EF}{FG}$ أي $\frac{EF}{7.5} = \frac{2}{3}$، إذن $EF = 7.5 \times \frac{2}{3} = 5$.

إذا كانت النسبة المعلومة هي ظل الزاوية يمكن استعمالها لحساب طول الضلع المقابلة لتلك الزاوية أو لحساب طول الضلع المجاورة لها.

مثال المثلث KLM مثلث قائم في M، فيه $KM = 5.4$ و $\frac{1}{3} = \tan\widehat{MKL}$. احسب الطول ML.

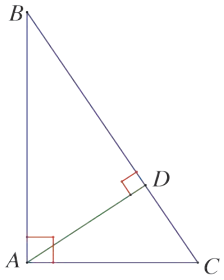


الحل

في المثلث KLM القائم في M: $\tan\widehat{MKL} = \frac{ML}{KM}$ أي $\frac{ML}{5.4} = \frac{1}{3}$، إذن $ML = \frac{5.4}{3} = 1.8$.

تحقّق من فهمك

في الشكل المرافق، ABC مثلث قائم في A فيه $[AD]$ ارتفاع.



① عبر عن $\sin\widehat{B}$ في المثلث ADB ثم في المثلث BAC.

② إذا كانت $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$ استنتج النسبة $\frac{AD}{AB}$.

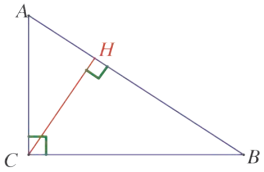
③ عبر عن $\cos\widehat{C}$ في المثلث ACD ثم في المثلث BAC.

④ إذا كانت $\frac{AC}{BC} = \frac{2}{3}$ استنتج النسبة $\frac{CD}{AC}$.

⑤ عبر عن $\tan\widehat{B}$ في المثلث ADB ثم في المثلث BAC.

تدرّب

① تأمل الشكل المرافق، ثم أجب.



① اكتب عبارتي $\sin\widehat{B}$ و $\cos\widehat{B}$ في المثلث ABC ثم في المثلث BHC.

② عبّر عن $\tan\widehat{A}$ بطريقتين.

② DEF مثلث قائم في E.

① ما الطولان اللازمان لحساب كلٍ من ❶ $\cos\widehat{D}$ ❷ $\sin\widehat{D}$ ❸ $\tan\widehat{D}$

② اكتب كلاً من هذه النسب.

③ في حالة $ED = 6\text{ cm}$ و $EF = 8\text{ cm}$، احسب طول الوتر.

④ احسب كلاً من ❶ $\cos\widehat{D}$ ❷ $\sin\widehat{D}$

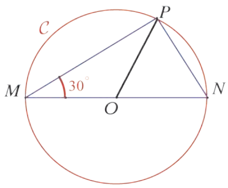
③ ABC مثلث قائم في B.

① ما الزاوية التي تجيبها يساوي $\dfrac{AB}{AC}$؟

② ما الزاوية التي جيبها يساوي $\dfrac{AB}{AC}$؟

③ ما الزاوية التي ظلها يساوي $\dfrac{AB}{BC}$؟

④ في الشكل المرافق الدائرة C التي طول قطرها $[MN]$ يساوي 12 و P نقطة منها تُحقق $\widehat{PMN} = 30^\circ$.



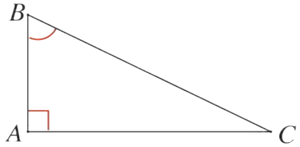
① ما نوع المثلث MPN ؟ استنتج قياس الزاوية $\widehat{PNM}$.

② ما نوع المثلث OPN؟

③ احسب الطول PN. ثم استنتج $\sin 30^o$.

3 علاقتان مهمتان بين النسب المثلثية

نشاط « استنتاج العلاقتين $(\cos\widehat{B})^2+(\sin\widehat{B})^2=1$ و $\tan\widehat{B}=\dfrac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}$ »



ABC مثلث قائم في A.

1. انسخ وأكمل:

① $\cos\widehat{B}=\dfrac{\cdots\cdots}{BC}$ ② $\sin\widehat{B}=\dfrac{AC}{\cdots\cdots}$ ③ $\tan\widehat{B}=\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$

2. استعمل مبرهنة فيثاغورث لكتابة علاقة بين أضلاع المثلث ABC.

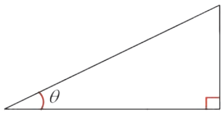
3. استنتج أنّ $(\cos\widehat{B})^2+(\sin\widehat{B})^2=1$.

4. احسب $\dfrac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}$، واستنتج أنّ $\dfrac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}=\tan\widehat{B}$.

تعلّم

متطابقتان مثلثيتان

إذا كان θ قياس زاوية حادة في مثلّث قائم فإن:



(1) $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

(2) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

استعمالات هذه المتطابقات

- تفيد المتطابقة (1) في حساب $\sin\theta$ بمعرفة $\cos\theta$ (أو في حساب $\cos\theta$ بمعرفة $\sin\theta$)
- تفيد المتطابقة (2) في حساب أيّ من النسب الثلاث بمعرفة النسبتين الأخريين.

مثال

ليكن $\cos\widehat{B}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

- لدينا $\cos^2\widehat{B}+\sin^2\widehat{B}=1$، إذن $\dfrac{3}{4}+\sin^2\widehat{B}=1$ أو $\sin^2\widehat{B}=1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$،

ومنها $\sin\widehat{B}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$.

- لدينا $\dfrac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}=\tan\widehat{B}$، إذن $\tan\widehat{B}=\dfrac{1}{2}\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

تحقّق من فهمك

① مثلث قائم فيه θ قياس زاوية حادة و $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$.

1. ما المتطابقة التي تفيد في كتابة $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$؟

2. استنتج $\sin^2\theta$ ثم $\sin\theta$.

② ABC مثلث قائم في A و $\sin\widehat{B} = \dfrac{7}{25}$. احسب $\cos\widehat{B}$ ثم $\tan\widehat{B}$.

تدرّب

① ABC مثلث قائم في A و $\tan\widehat{B} = \dfrac{3}{4}$. احسب كلاً من $\sin\widehat{B}$ و $\cos\widehat{B}$.

② θ قياس زاوية حادة تحقّق $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

1. استعمل المتطابقة $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ لحساب $\sin\theta$.

2. اكتب $\tan\theta$ بهيئة كسر مختزل.

③ لتكن θ قياس زاوية حادة ، $\cos\theta = \frac{5}{13}$ و $\tan\theta = \frac{12}{5}$.

1. احسب قيمة جيب الزاوية θ بطريقتين.

2. أتكفي معرفة $\cos\theta = \frac{5}{13}$ فقط لحساب $\sin\theta$ و $\tan\theta$؟ اشرح.

3. أتكفي معرفة $\tan\theta = \frac{12}{5}$ فقط لحساب $\cos\theta$ و $\sin\theta$؟ اشرح.

4 نسب زوايا شهيرة

نشاط «استنتاج النسب المثلثية للزوايا 30° و 45° و 60°»

نسب الزاوية 45°:

$$\tan 45^\circ = 1 \text{ و } \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

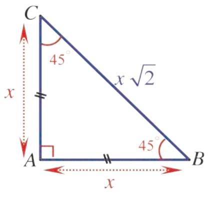
نسب الزاوية 30°:

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

نسب الزاوية 60°:

$$\tan 30^\circ = \sqrt{3} \text{ و } \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ و } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

الإثبات



الشكل (1)

ليكن ABC مثلثاً قائماً في A و $\widehat{ABC} = 45^\circ$، إذن $\widehat{ACB} = 45^\circ$. فهذا المثلث متساوي الساقين في A. نضع $AB = AC = x$.

① باستعمال مبرهنة فيثاغورث أثبت أن: $BC = x\sqrt{2}$.

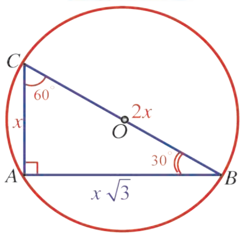
② لحساب $\sin 45^\circ$ نكتب $\sin 45^\circ = \sin \widehat{B} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

بأسلوب مماثل، احسب كلّاً من $\cos 45^\circ$، $\tan 45^\circ$.

ليكن ABC مثلثاً قائماً في A و $\widehat{ABC} = 30^\circ$، إذن $\widehat{ACB} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. نرمز إلى مركز الدائرة المارة برؤوسه بالرمز O، فيكون $OA = OC$،

ويكون المثلث OAC متساوي الأضلاع، ومن ثمّ $AC = CO = \frac{1}{2}BC$.

نضع $AC = x$، فيكون $BC = 2x$،



① باستعمال مبرهنة فيثاغورث أثبت أن: $AB = x\sqrt{3}$.

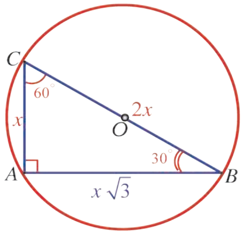
② لحساب $\sin 30^\circ$ نكتب $\sin 30^\circ = \sin \widehat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

بأسلوب مماثل، احسب كلّاً من $\cos 30^\circ$ و $\tan 30^\circ$.

③ احسب كلّاً من $\sin 60^\circ$ و $\cos 60^\circ$ و $\tan 60^\circ$.

تعلّم

المثلث القائم الذي قياسا زاويتيه الحادتين 30° و 60° نسميه المثلث الثلاثيني الستيني. في المثلث ABC القائم في A وفي حالة $\widehat{B} = 30^\circ$ و $\widehat{C} = 60^\circ$، وجدنا أنَّ $AC = CO = \frac{1}{2}BC$. **أي إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث قائم 30° فإنَّ طول الضلع المقابل لهذه الزاوية يساوي نصف طول الوتر.**



تأمل الشكل المجاور فتجد:

$$\sin 60^\circ = \sin\widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \cos\widehat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \tan\widehat{C} = \frac{AB}{AC} = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}$$

جدول بالنسب المثلثية لزوايا شهيرة:

$\widehat{\theta}$	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

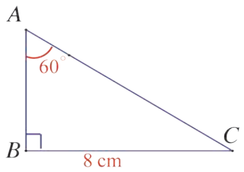
اكتساب معارف

كيف نحسب طول الوتر بمعرفة طول ضلع قائمة وقياس زاوية حادة؟

الضلع التي نعرف طولها، تقابل الزاوية، لذلك نستعمل تعريف الجيب.

مثال ABC مثلث قائم في B، $BC = 8\ cm$ و $\widehat{BAC} = 60^\circ$. احسب الطول AC.

الحلّ



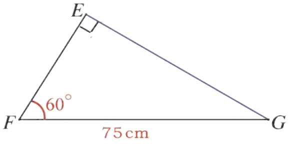
في المثلث ABC القائم في B : $\sin\widehat{A} = \frac{BC}{AC}$ أي $\sin 60^\circ = \frac{8}{AC}$ ، إذن

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8}{AC}$ ، ومنها $AC = \frac{16}{\sqrt{3}}$.

كيف نحسب طول ضلع قائمة بمعرفة طول الوتر وقياس زاوية حادة ؟

الضلع التي نعرف طولها، هي الوتر، ونحن نبحث عن طول الضلع المجاورة للزاوية، لذلك نستعمل تعريف التجيب.

مثال EFG مثلث قائم في E، $FG = 7.5 \text{ cm}$ و $\widehat{EFG} = 60^\circ$. احسب الطول FE .



الحل

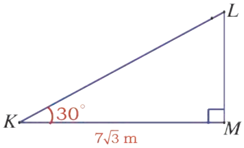
في المثلث EFG القائم في B : $\cos \widehat{F} = \dfrac{EF}{FG}$ أي $\dfrac{EF}{75} = \cos 60^\circ$،

إذن $\dfrac{EF}{75} = \dfrac{1}{2}$ ، ومنها $EF = \dfrac{75}{2}$.

كيف نحسب طول ضلع قائمة بمعرفة قياس زاوية حادة وطول الضلع القائمة الأخرى؟

> الضلع التي نعرف طولها، هي ضلع قائمة، ونحن نبحث عن طول الضلع القائمة الأخرى،
> فنستعمل تعريف الظل.

مثال KLM مثلث قائم في M، $KM = 7\sqrt{3} \text{ m}$ و $\widehat{MKL} = 30^\circ$. احسب الطول ML .

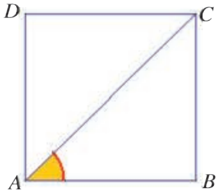


الحل

في المثلث KLM القائم في $\widehat{K}$: $\tan \widehat{K} = \dfrac{ML}{KM}$ أي $\dfrac{ML}{7\sqrt{3}} = \tan 30^\circ$،

أي $\dfrac{ML}{7\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ، إذن $ML = 7$.

تحقّق من فهمك

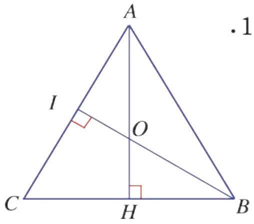


$ABCD$ مربع ، طول ضلعه 1.

1. ما قياس الزاوية $\widehat{BAC}$ ؟

3. احسب طول قطر المربّع AC .

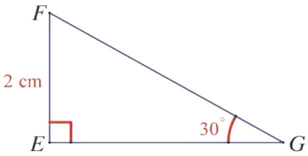
تدرّب



① AH و BI ارتفاعان في مثلث ABC متساوي الأضلاع، طول ضلعه 1.

1. ① ما قياس الزاوية $\widehat{ABH}$ ؟ احسب طول AH .
② استنتج مساحة المثلّث ABC .

2. ما قياس الزاوية $\widehat{OBH}$ ؟ احسب طول OH .



② تأمل الشكل المرافق، ثم:

1. احسب الطول FG بطريقتين.

2. احسب الطول EG .

 تمرينات ومسائل

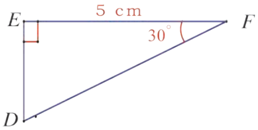
1 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) في مثلث SIN قائم في I ، جيب الزاوية $\widehat{S}$ يساوي

① $\dfrac{NI}{SI}$ ② $\dfrac{SI}{NS}$ ③ $\dfrac{NI}{NS}$

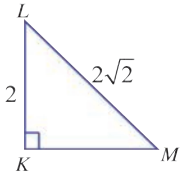
(2) في مثلث TAN قائم في A ، ظل الزاوية $\widehat{T}$ يساوي

① $\dfrac{AN}{AT}$ ② $\dfrac{TA}{TN}$ ③ $\dfrac{AN}{TN}$



(3) مع المعطيات المدونة في الشكل المرسوم جانباً، طول الضلع DE هو

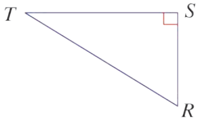
① 2.5 cm ② $5\sqrt{3} \text{ cm}$ ③ $\dfrac{5}{\sqrt{3}} \text{cm}$



(4) مع المعطيات المدونة في الشكل المرسوم جانباً، قياس الزاوية $\widehat{M}$ هو

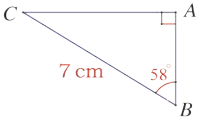
① 45° ② 40° ③ 60°

2 في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.



(1) في مثلث RST قائم في S، الطول RT يساوي

① $ST \times \cos \widehat{T}$ ② $\dfrac{ST}{\cos \widehat{T}}$ ③ $\dfrac{ST}{\sin \widehat{R}}$

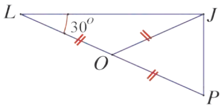


(2) مع المعطيات المدونة في الشكل المرسوم جانباً، الطول AC يساوي

① $7 \times \cos 32^\circ$ ② $\dfrac{7}{\sin 58^\circ}$ ③ $7 \times \sin 58^\circ$

(3) LPJ مثلث فيه $\widehat{JLP} = 30^\circ$ و $LP = 12 \text{ cm}$.

O نقطة من $[LP]$ تُحقق $OL = OJ = OP$. إذن



① $\widehat{J} = 90^\circ$ ② $JP = 6 \text{ cm}$ ③ $\widehat{P} = 60^\circ$

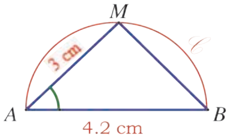
3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) جيب وتجيب زاوية حادة هما عددان محصوران بين الصفر والواحد.

(2) ظل زاوية حادة هو عدد محصور بين الصفر والواحد.

(3) في الشكل المرافق، $[AB]$ قطرٌ في الدائرة $\mathscr{C}$ ، M نقطة منها،

و $AB = 4.2 \text{ cm}$ و $AM = 3 \text{ cm}$ ، إذن $\cos \widehat{A} = \frac{5}{7}$.

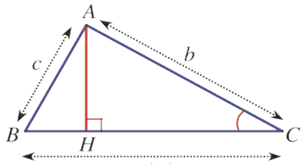


(4) في الشكل (1)، نضع $AB = c$ و $BC = a$ و $CA = b$. عندئذٍ

$AH = b \sin \widehat{C}$.

(5) في الشكل (1) مساحة المثلث ABC هي

$\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin \widehat{C}$.



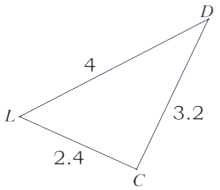
(1)

4 $\mathscr{C}$ دائرة مركزها O ونصف قطرها 3 cm . و $[AB]$ قطر في هذه الدائرة.

1. وضِعْ نقطةً M على الدائرة $\mathscr{C}$ بحيث يكون $AM = 5 \text{ cm}$.

2. ما طبيعة المثلث AMB ؟ اشرح.

5 CDL مثلث، أطوال أضلاعه كما في الشكل المرافق.



1. أثبت أنَّ هذا المثلث قائم الزاوية.

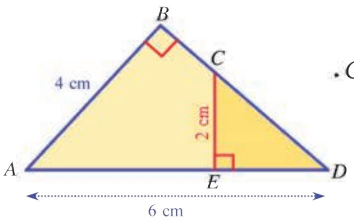
2. احسب كلاً من النسب المثلثية $\cos \widehat{L}$ و $\sin \widehat{L}$ و $\tan \widehat{L}$.

6 IJK مثلث قائم في I ، فيه $IJ = 9 \text{cm}$ و $IK = 12 \text{cm}$.

1. احسب طول الوتر $[JK]$.

2. عيّن مركز الدائرة المارة برؤوسه واحسب طول نصف قطرها.

7 تأمّل الشكل المرافق، ثم أجب.



1. اكتب عبارة $\sin \widehat{D}$ في كلٍ من المثلثين القائمين ABD و CED .

2. استنتج الطول CD .

3. احسب الأطوال ED و AE و BC .

8 في المثلث TOC القائم في T: $TC = 1.2\,\text{cm}$ و $OC = 1.3\,\text{cm}$.

1. احسب الطول TO.

2. احسب كلاً من النسب $\cos\widehat{O}$ و $\sin\widehat{O}$ و $\tan\widehat{O}$. اكتب النواتج بكسور مختزلة.

لإحراز تقدّم

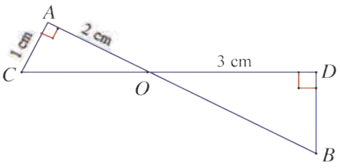
9 ارسم مثلثاً FGH قائم الزاوية في G بحيث يكون $FH = 6\,\text{cm}$ و $FG = 3\,\text{cm}$ دون استعمال الكوس.

10 في الشكل المرافق، القطعتان $[AB]$ و $[CD]$ متقاطعتان في O.

1. اشرح لماذا $\widehat{AOC} = \widehat{DOB}$.

2. باعتماد $\tan\widehat{AOC}$ و $\tan\widehat{DOB}$، اشرح لماذا $\frac{1}{2} = \frac{DB}{3}$.

3. احسب إذن الطول DB.



11 إنشاء هندسي

استعمل فرجاراً وكوساً مدرجاً لرسم الزاوية $\widehat{xOy}$ المحققة للشرط المرافق في الحالات الآتية. (*يمكن الاستغناء عن الكوس باستعمال مسطرة*).

① $\cos\widehat{xOy} = \frac{2}{3}$

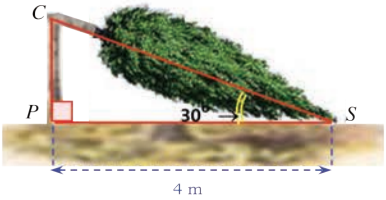
② $\sin\widehat{xOy} = \frac{5}{6}$

③ $\tan\widehat{xOy} = \frac{2}{5}$

12 إنشاء هندسي

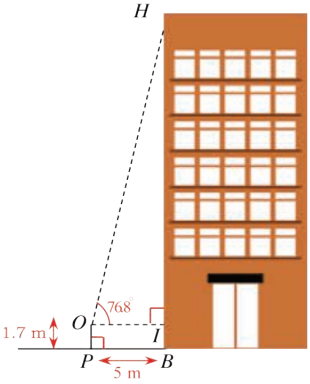
باستعمال كوس مدرَّج ومنقلة ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A بحيث يكون $\widehat{ABC} = 30^\circ$ و $AB = 4\ \text{cm}$.

13 حساب ارتفاع شجرة



الشكل المرافق تصوير لشجرة انكسرت بفعل عاصفة. تأمل المعطيات المدونة على الشكل، ثم احسب ارتفاع الشجرة عن الأرض قبل العاصفة.

14 قياس ارتفاع واجهة مبنًى



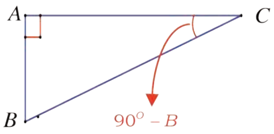
لقياس الارتفاع HB لواجهة مبنًى، قام مهندسٌ بالآتي:

- اتخذ نقطة P في مستوى قاعدة المبنى على مسافة 5 m عن النقطة B ($BP = 5\text{ m}$).
- وضع جهاز رصده في النقطة O على ارتفاع 1.7 m عن قاعدة المبنى ($OP = 1.7\text{ m}$)، فوجد منها $\widehat{IOH} = 76.8^\circ$.

احسب قيمة تقريبية لارتفاع هذا المبنى.

(علماً أن $\tan 76.8^\circ \approx 4.26$).

15 متممة زاوية



ABC مثلثٌ قائمٌ في A .

1. اكتب عبارتي $\cos \widehat{B}$ و $\sin \widehat{C}$.

2. اشرح، إذن، لماذا $\cos \widehat{B} = \sin(90^\circ - \widehat{B})$.

3. أثبت بشرحٍ مماثل أنَّ $\sin \widehat{B} = \cos(90^\circ - \widehat{B})$.

16 في كلٍّ من الحالات الآتية، ABC مثلثٌ قائمٌ في A . احسب:

1. الطول AB في حالة $BC = 7\text{ cm}$ و $\sin \widehat{C} = 0.4$.

2. الطول AC في حالة $AB = 8\text{ cm}$ و $\tan \widehat{B} = 0.5$.

3. الطول BC في حالة $AB = 3.2\text{ cm}$ و $\cos \widehat{B} = 0.4$.

17 دائرة أحد أقطارها $[BC]$ طوله 12 cm .

1. ارسم هذه الدائرة وضع عليها نقطةً A تحقق $BA = 6\text{ cm}$.

2. ما طبيعة المثلث ABC ؟ برِّر إجابتك.

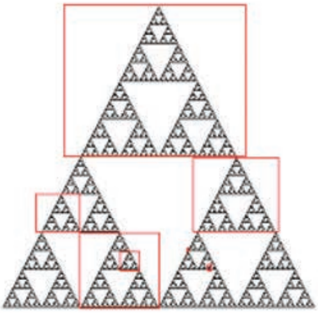
3. احسب قياس الزاوية $\widehat{ABC}$.

الوحدة الثانية

مبرهنة النّسب الثلاث

التشابه الذاتي

كلّ جزء من يشابه الكل



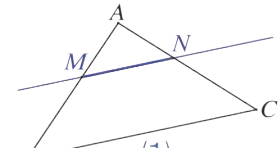
هذه الفكرة كانت وراء علم جديد يبحث في خواص كائنات هندسية تسمى الكسوريات **Fractals**، اسم رائده بنوا ماندلبروت، ويبدو أنّ هذه الكائنات موجودة في الطبيعة، نجدها في خطوط الشواطئ، في بنية الأشجار والنباتات.

مبرهنة النّسب الثلاث

انطلاقة نشطة

في كلٍ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. تحليل شكل



(1)

في الشكل (1)، ABC مثلث، و M نقطة من $[AB]$ و N نقطة من $[AC]$، والمستقيمان (MN) و (BC) متوازيان.

الجدول التناسبي هو

①

AM	AN	MN
AC	AB	BC

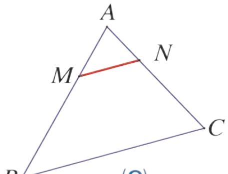
②

AM	AN	MN
AB	AC	BC

③

AM	AN	MN
MB	NC	BC

2. استعمال التناسب



(2)

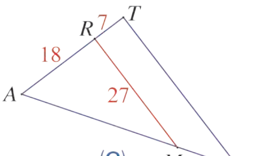
في الشكل (2):

$AM = 2$ cm و $AN = 1.6$cm و $AB = 6$ cm و $(MN) \parallel (BC)$.

الطول AC يساوي

① 5.6 cm ② 4.6 cm ③ 4.8 cm

3. تساوي نسبتين



(3)

في الشكل (3) : $(RM) \parallel (TE)$ و $AR = 18$ و $RT = 7$ و $RM = 27$

إذن :

① $\frac{18}{25} = \frac{27}{TE}$ ② $\frac{18}{7} = \frac{27}{TE}$ ③ $\frac{18}{25} = \frac{TE}{27}$

4. استعمال مساواة الضرب التقاطعي

من المساواة $\frac{5}{AB} = \frac{2}{3}$، يمكننا أن نستنتج

① $2 \times 5 = 3 \times AB$ و $AB = \frac{2 \times 5}{3}$

② $2 \times AB = 3 \times 5$ و $AB = \frac{3 \times 5}{2}$

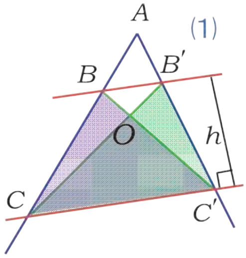
③ $2 \times AB = 3 \times 5$ و $AB = 3 \times 5 - 2$

1 مبرهنة النّسب الثلاث

نشاط « استعمال المساحات في إثبات مبرهنة النسب الثلاث »

ⓐ في الشكل الآتي: $(CC')\parallel(BB')$ علل تساوي مساحتي المثلثين $BCC', B'CC'$.

(1)



$S(ABC)$ يدل على مساحة المثلث ABC.

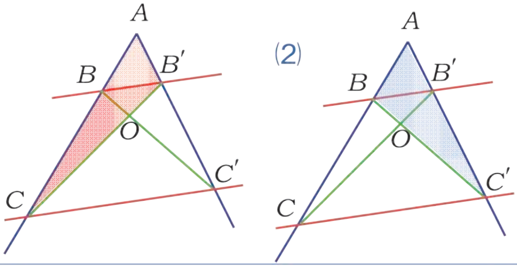
ⓑ من ⓐ نجد

$$S(BCC') = S(B'CC')$$

$$S(ACC') - S(BCC') = S(ACC') - S(B'CC')$$

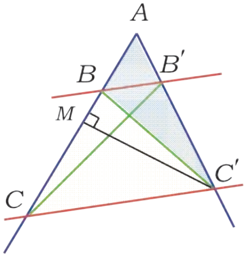
$$S(ABC') = S(AB'C)$$

(2)



ⓒ في الشكل الآتي للمثلثين ABC' و ACC' الارتفاع $C'M$ نفسه. تعلم أن مساحة المثلث نصف جداء القاعدة بالارتفاع أثبت أن

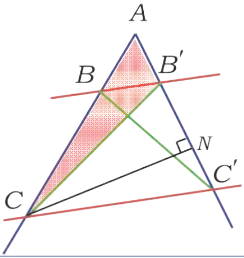
$$\frac{S(ABC')}{S(AC'C)} = \frac{AB}{AC}.$$



ⓓ في الشكل الآتي لاحظ أن للمثلثين $AB'C$ و ACC' الارتفاع CN نفسه، أثبت أنّ

$$\frac{S(ABC')}{S(AC'C)} = \frac{AB'}{AC'}$$

ثم استنتج ❶ $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$.



ⓔ من الخطوة ⓓ وجدنا $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$ ومنه لدينا $\frac{AC - AB}{AC} = \frac{AC' - AB'}{AC'}$ أي

❷ $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$

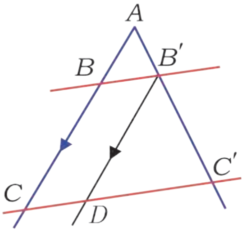
ⓕ نرسم من النقطة B' المستقيم الموازي للمستقيم (AB) ولتكن D نقطة تقاطعه مع $(C'C)$.

بأسلوب مماثل للنتيجة ❷ نثبت أن ❸ $\frac{CD}{CC'} = \frac{AB'}{AC'}$.

من ❶ و ❸ نستنتج أنّ $\frac{CD}{CC'} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$. لاحظ أنّ $CD = BB'$ ثم

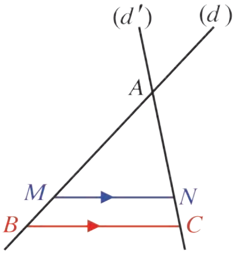
استنتج ❹ $\frac{BB'}{CC'} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$. تسمى النتيجة ❹ التي توصلنا إليها

مبرهنة النسب الثلاث أو **مبرهنة تالس**.



تعلّمْ

نص مبرهنة النسب الثلاث



(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A .

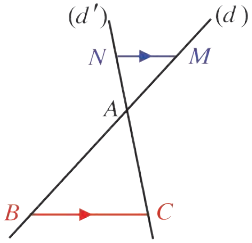
النقطتان B و M من (d) مختلفتان عن A .

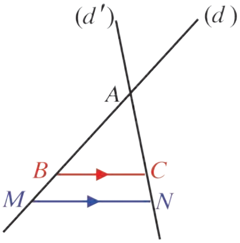
النقطتان C و N من (d') مختلفتان عن A أيضاً.

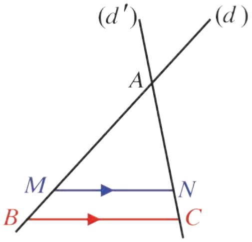
إذا كان (BC) و (MN) متوازيين، كان $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

الحالات الثلاث لمبرهنة النّسب الثلاث

الأشكال الثلاثة الآتية، تُظهر ثلاث حالات لمبرهنة النسب الثلاث، وفي كلٍ منها المستقيمان المتوازيان (BC) و (MN) يقطعان المستقيمين (d) و (d') المتقاطعين في A .







الجدول الآتي جدولُ تناسب يوضح ترتيب الأطوال المتناسبة. MN

أطوال أضلاع AMN	AM	AN	MN
أطوال أضلاع ABC	AB	AC	BC

عند استعمال المبرهنة، نرتب الحروف وفق

A	M	N
A	B	C

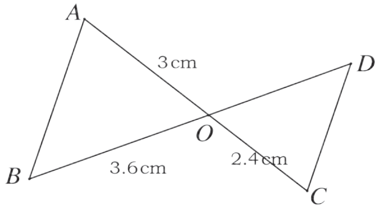
مع مراعاة أنّ النقاط التي تنتمي إلى مستقيم واحد تقع في عمود واحد.

نتيجة مهمّة

إذا كان (BM) و (CN) متقاطعين في A وكان $\frac{AN}{AC} \neq \frac{AM}{AB}$ ، كان المستقيمان (BC) و (MN) غير متوازيين.

اكتساب معارف

كيف نستعمل مبرهنة النسب الثلاث؟



مثال في الشكل المستقيمان (AB) و (CD) متوازيان.

احسب الطول OD.

الحلّ

① نبدأ بشرح لماذا المثلثان OAB و OCD يشكّلان إحدى حالات النسب الثلاث.

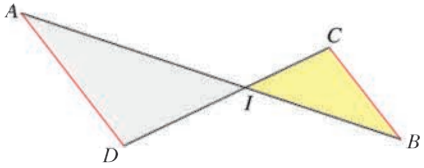
المستقيمان (AC) و (BD) متقاطعان في O، والمستقيمان (AB) و (CD) متوازيان. فاستناداً إلى مبرهنة النسب الثلاث مطبقة على المثلثين OAB و OCD يكون $\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{AB}{CD}$، إذن

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}$$

② نعوّض الأطوال المعلومة بقيمها

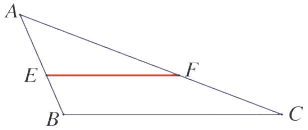
فنجد $\frac{3.6}{OD}=\frac{3}{2.4}$، ومنها $\cancel{3}\times OD=\cancel{3.6}\times 2.4$ أو $OD=1.2\times 2.4$، إذن $OD=2.88\ \text{cm}$.

تحقّق من فهمك



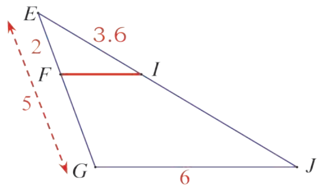
المستقيمان (AB) و (CD) متقاطعان في I. والمستقيمان (AD) و (CB) متوازيان. استوحِ من النص ومن الشكل جدول تناسب ثم اكتب ثلاث نسب متساوية.

تدرّب



① ABC مثلث، E نقطة من $[AB]$ و F نقطة من $[AC]$.

إذا علمت أن $(BC)\parallel(EF)$، انسخ وأكمل: $\frac{AE}{\cdots}=\frac{\cdots}{AC}=\frac{\cdots}{\cdots}$



② المستقيمان (FI) و (GJ) متوازيان.

1. ما المثلثان اللذان أطوال أضلاعهما في حالة تناسب؟

2. احسب كلاً من الطولين EJ و FI.

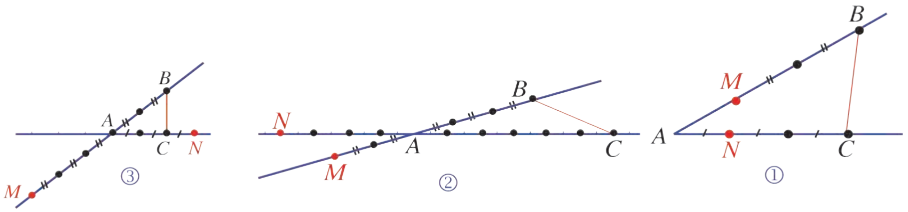
عكس مبرهنة النّسب الثلاث

نشاط « إثبات عكس مبرهنة النسب الثلاث »

مناقشة

M هي نقطة من المستقيم (AB) و N هي نقطة من المستقيم (AC). أكدت وفاء قولها: «إذا كانت المساواة $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$ محققة، كان المستقيمان (MN) و (BC) متوازيين »

1. أبدِ وجهة نظرك حول اقتراح وفاء مستعيناً بالأشكال الثلاثة الآتية :



2. ما الشرط الذي تقترح إضافته على اقتراح وفاء ليصبح صحيحاً؟

3. لنبحث عن الشرط الذي عليك اقتراحه

في الشكل ①:

- ارسم من M المستقيم الموازي للمستقيم (BC) فيقطع (AC) في نقطة ولتكن N'.
- استعمل مبرهنة النسب الثلاث على المتوازيين (BC) و (MN') والقاطعين (AB) و (AC).
- وازن بين النسبتين $\frac{AN}{AC}$ و $\frac{AN'}{AC}$.
- ماذا تستنتج حول AN و AN' ؟

هل يبقى اقتراح وفاء صحيحاً في حال انطباق النقطتين N و M؟

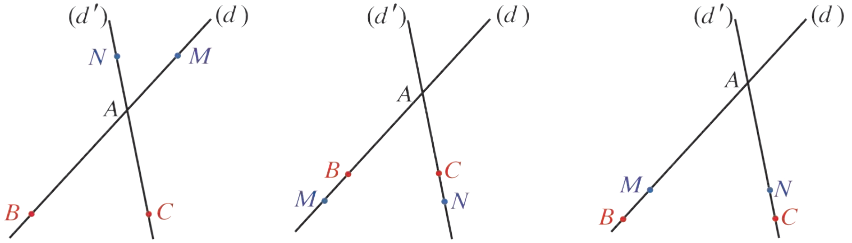
ما الشرط الذي تضيفه إذن إلى اقتراح وفاء؟

تعلّمْ

طرح عكس مبرهنة النّسب الثلاث

في الأشكال الثلاثة الآتية، نقول إنَّ النقاط A و B و M متوضعة على المستقيم (d) بترتيب مماثل لترتيب توضع النقاط A و C و N على المستقيم (d').

أو نقول إنَّ النقاط A و B و M على المستقيم (d) منسجمة بالترتيب مع النقاط A و C و N على المستقيم (d').

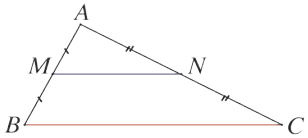


النص:

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A.

B و M نقطتان من (d) مختلفتان عن A. C و N نقطتان من (d') مختلفتان عن A أيضاً. إذا كان $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ وكان ترتيب النقاط A و B و M على (d) مماثلاً لترتيب النقاط A و C و N على (d')، كان المستقيمان (BC) و (MN) متوازيين.

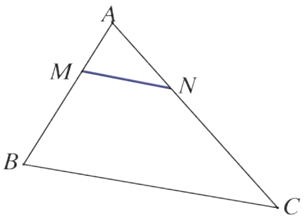
حالة خاصة: القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين



في المثلث ABC، M منتصف $[AB]$ و N منتصف $[AC]$. إنّ ترتيب A و B و M على (AB) مماثل لترتيب A و C و N على (AC)، ثم إنَّ $\frac{1}{2} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ فعملاً بعكس مبرهنة النسب الثلاث يكون المستقيمان (MN) و (BC) متوازيين.وبهذا نجد مبرهنة مستقيم المنتصفين : القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالثة وتساوي نصف طولها.

اكتساب معارف

كيف نستدل على عدم توازي مستقيمين؟



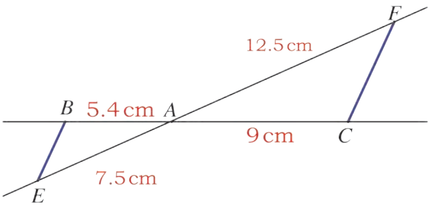
مثال في الشكل المرافق، $AB = 35\text{ cm}$ و $AC = 52\text{ cm}$ و $AM = 11.9\text{ cm}$ و $AN = 18.2\text{ cm}$. أثبت أنَّ المستقيمين (MN) و (BC) غير متوازيين.

الحلّ

لدينا $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{11.9}{35} = 0.34$ و $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{18.2}{52} = 0.35$ ومنه $\dfrac{AN}{AC} \neq \dfrac{AM}{AB}$، فنستنتج أنَّ المستقيمين (MN) و (BC) غير متوازيين.

لو كانت النسبتان $\dfrac{AM}{AB}$ و $\dfrac{AN}{AC}$ متساويتين لكان (MN) و (BC) متوازيين.

كيف نستعمل عكس مبرهنة النسب الثلاث؟



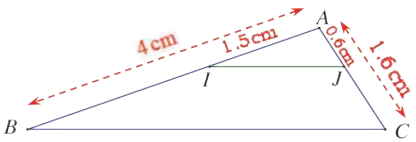
مثال في الشكل المرافق أثبت أنَّ المستقيمين (BE) و (FC) متوازيان.

الحلّ

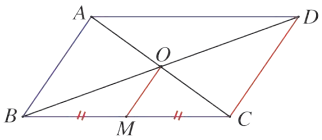
لنتحقق من تساوي نسبتين بحساب كلٍ منهما على حدتها. $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{5.4}{9} = 0.6$ و $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{7.5}{12.5} = 0.6$. نستنتج أنَّ $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$.

النقاط A و B و C على المستقيم (BC) هي بترتيب مماثل لترتيب النقاط A و E و F على المستقيم (EF)، و $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$ (حسبما استنتجنا)، فحسب عكس مبرهنة النسب الثلاث يكون المستقيمان (BE) و (FC) متوازيين.

تحقّق من فهمك

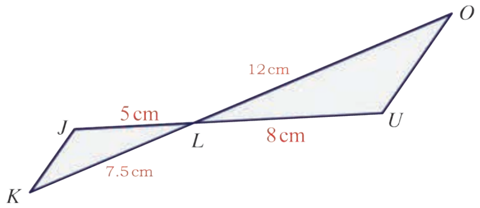


① المستقيمان (BI) و (CJ) متقاطعان في A. هل المستقيمان (IJ) و (BC) متوازيان؟ اشرح.



② قطرا متوازي الأضلاع $ABCD$ متقاطعان في O. و M منتصف $[BC]$. ماذا تقول عن المستقيمين (OM) و (DC)؟ ولماذا؟

تدرّب



① المستقيمان (JU) و (KO) متقاطعان في L.

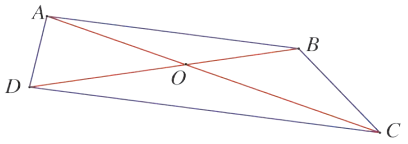
1. اكتب قيمة كلٍ من النسبتين $\frac{LO}{LK}$ و $\frac{LU}{LJ}$.

2. انسخ وأكمل:

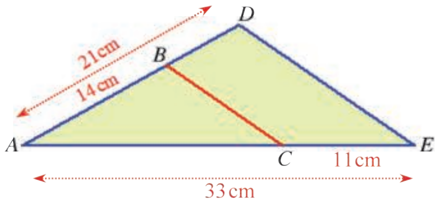
① « النقاط J و L و U على المستقيم (JU) منسجمة بالترتيب مع النقاط ⋯ و ⋯ و ⋯ على المستقيم ⋯ ».

② « $\frac{\cdots}{\cdots} = \frac{LO}{LK}$، إذن حسب .... يكون المستقيمان (JK) و (OU) ....

② قطرا الرباعي $ABCD$ متقاطعان في O، ونعلم أنَّ: $OA = 6.5\ cm$ و $OB = 5\ cm$ و $OC = 9.1\ cm$ و $OD = 7\ cm$. أثبت أنَّ الرباعي $ABCD$ شبه منحرف.



③ انظر إلى الشكل المرافق وأجب:



1. احسب النسبتين $\frac{AB}{AD}$ و $\frac{AC}{AE}$ واكتبهما بشكل كسرين مختزلين.

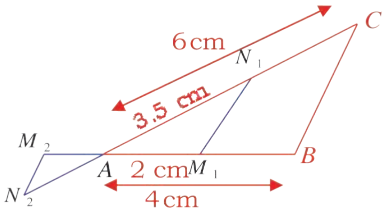
2. استنتج أنَّ المستقيمين (BC) و (DE) متوازيان.

③ التشابه

نشاط « استنتاج نسبة التشابه»

إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتقابلة في مثلثين، قلنا إنَّ المثلثين **متشابهان** **ويكون أحدهما مصغَّر أو مكبّر عن الآخر أو مطابق له.**

1. مجموعة مثلثات



① ABC مثلث فيه $AB = 4$ cm و $AC = 6$ cm.

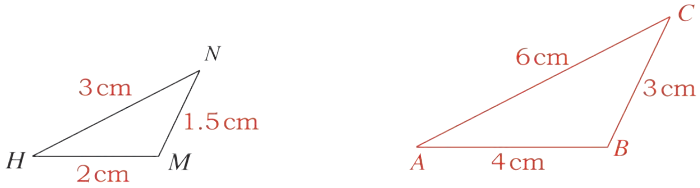
و $(M_2N_2) \parallel (BC)$.

- علّل تساوي النسب $\frac{AM_2}{AB}$ و $\frac{M_2N_2}{CB}$ و $\frac{N_2A}{CA}$.

المثلثان ABC و AM_2N_2 متشابهان لتساوي النسب الثلاث. عندئذ يكون المثلث AM_2N_2 مصغراً عن المثلث ABC أو المثلث ABC مكبراً عن المثلث AM_2N_2.

- قارن النسبتين $\frac{AM_1}{AB}$ و $\frac{N_1A}{CA}$. هل المثلثان ABC و AM_1N_1 متشابهان؟ علل إجابتك.

② تأمل الشكل الآتي :



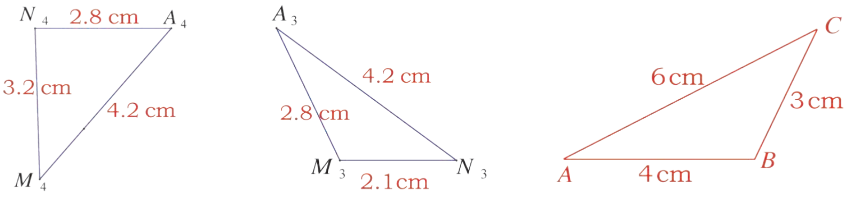
واحسب كلاً من $\frac{HM}{AB}$ و $\frac{NM}{CB}$ و $\frac{NH}{CA}$. هل المثلثان ABC و HMN متشابهان؟

لاحظ أن أطوال أضلاع المثلث ABC تنتج عن أطوال الأضلاع المقابلة لها في المثلث HMN بضربها بالعدد 2 فالمثلث ABC تكبير للمثلث HMN ونسمي العدد 2 **معامل التكبير**.

ويكون المثلث HMN تصغير للمثلث ABC برأيك ما هو **معامل التصغير**؟

③ تأمّل التناسب $\frac{HM}{AB} = \frac{NH}{CA} = \frac{NM}{CB}$، قس الزوايا المقابلة لكلّ ضلع من الأضلاع الواردة في التناسب. هل الزوايا المتقابلة متساوية ؟

④ أي المثلثين $A_3M_3N_3$ و $A_4M_4N_4$ تصغير للمثلث ABC؟



④ لدينا المثلث EFG تصغير للمثلث ABC.

- انسخ جدول الأضلاع المتقابلة في المثلثين ثم أكمله

		EF
BC	AC	AB

.

- انسخ جدول الرؤوس المتقابلة في المثلثين ثم أكمله

		G
A	B	C

.

- اكتب النسب الثلاث المتساوية واستنتج معامل التصغير ثم احسب الطول GF.

تعلّم

خاصة 1

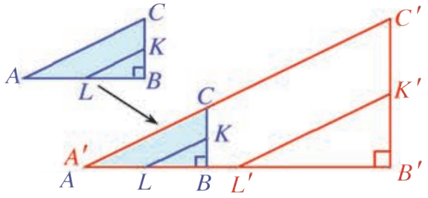
تشابه نسبته $k > 0$:

- يحافظ على قياسات الزوايا. • يُضرب الأطوال بالعدد k.

إذا كانت نسبة التشابه $k > 1$ يؤول التشابه إلى تكبير الشكل.

إذا كانت نسبة التشابه $0 < k < 1$ يؤول التشابه إلى تصغير الشكل.

مثال الشكل الملون بالأحمر تكبيرٌ للشكل الملون بالأزرق نسبته $k = 2.5$. فحسب الخاصة 1 :

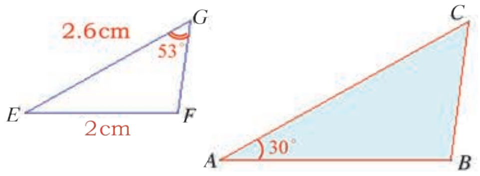


- $2.5 = \frac{K'L'}{KL} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB}$.
- $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ و $\widehat{ALK} = \widehat{A'L'K'}$ و $\widehat{BKL} = \widehat{B'K'L'}$.

مثال المثلث ABC تكبيرٌ للمثلث EFG بنسبة 1.5. مع $\widehat{ABC} = \widehat{EFG}$.

① ما قياس كلٍ من الزاويتين $\widehat{FEG}$ و $\widehat{ACB}$ ؟

② احسب الطولين AB و AC.



الحل

① جدول الرؤوس المتقابلة في المثلثين

E	F	G
A	B	C

قياس الزاوية $\widehat{FEG}$ يساوي $30°$ لأنها تقابل الزاوية $\widehat{CAB}$. وقياس الزاوية $\hat{C}$ يساوي $53°$ لأنّها تقابل الزاوية $\hat{G}$.

② من تشابه المثلثين ABC و EFG نجد $1.5 = \frac{AC}{EG} = \frac{BC}{FG} = \frac{AB}{EF}$ ومنه

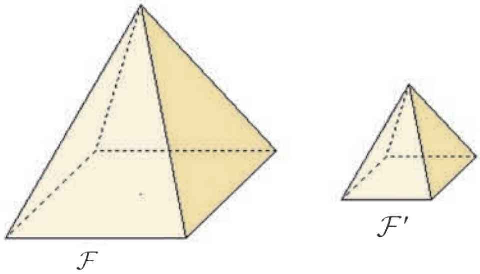
$$\frac{AB}{2} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{2.6} = \frac{1.5}{1}$$

وبالتالي $\frac{AB}{2} = \frac{1.5}{1}$ ومنه $AB = 3\,cm$ ، $\frac{AC}{2.6} = \frac{1.5}{1}$ ومنه $AC = 3.9\,cm$.

خاصة 2

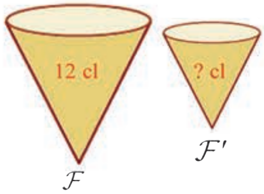
تشابه نسبته $k > 0$.

- تُضرب مساحة السطح بالعدد k^2.
- يُضرب حجم المجسم بالعدد k^3.



مثال $\mathcal{F}$ هرم حجمه $\mathcal{V}$ ومساحة قاعدته $\mathcal{S}$. $\mathcal{F}'$ تصغير للهرم $\mathcal{F}$ بنسبة $k = 0.5$ حجمه $\mathcal{V}'$ ومساحة قاعدته $\mathcal{S}'$. فحسب الخاصة2 يكون:

$\mathcal{S}' = (0.5)^2 \times \mathcal{S}$ و $\mathcal{V}' = (0.5)^3 \times \mathcal{V}$.



مثال لدى بائع مرطبات عبوات بوظة بسعتين مختلفتين. سعة العبوة الكبيرة 12 cl من البوظة، أما العبوة الصغيرة فهي تصغير للعبوة الكبيرة بنسبة 75 %.فحسب **الخاصة 2** تكون سعة العبوة الصغيرة $\mathcal{V}' = (0.75)^3 \times \mathcal{V}$ ومنه $\mathcal{V}' = (0.75)^3 \times 12 \approx 5$.

تحقّق من فهمك

ABC و EFG مثلثان فيهما $AB = 5$ cm، $AC = 8$ cm، $BC = 6.5$ cm و $EF = 1$ cm، $EG = 1.6$ cm، $FG = 1.2$ cm. هل المثلث EFG تصغيرٌ للمثلث ABC. علِّل إجابتك.

تدرّبْ

① **1.** ارسم مستطيلاً $ABCD$ بعداه $AB = 4$ cm و $AD = 3$ cm.

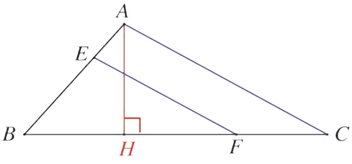
2. ارسم تصغيراً $A'B'C'D'$ للمستطيل $ABCD$ نسبته $\frac{4}{5}$.

3. احسب بطريقتين مختلفتين:

① محيط $A'B'C'D'$.

② مساحة $A'B'C'D'$.

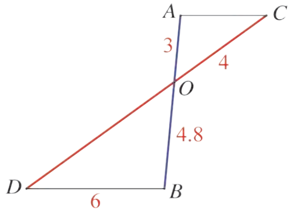
② في الشكل المرافق، $[AH]$ ارتفاع للمثلث ABC. E نقطة من $[AB]$ و F نقطة من $[BC]$ و $(EF) \parallel (AC)$. نعلم أنَّ $BF = 2.8$ cm و $BC = 4$ cm و $AH = 1.5$ cm. احسب مساحة المثلث ABC، ثم مساحة المثلث BEF.



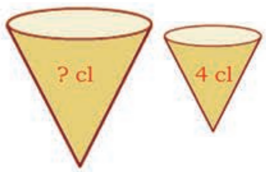
③ المستقيمان (AB) و (CD) متقاطعان في O، والمستقيمان (AC) و (BD) متوازيان.

1. احسب الطول OD.

2. احسب الطول AC.



④ لدى بائع مرطبات عبوات مثلجات بسعتين مختلفتين. سعة العبوة الصغيرة 4 cl من البوظة، أما العبوة الكبيرة فهي تكبير للعبوة الصغيرة بنسبة 1.5. احسب سعة العبوة الكبيرة.



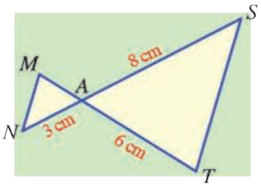
⑤ اقترح مهندس معماري بنّاء صومعة حبوب بحجم $900\ m^3$، فصمم نموذجاً مصغراً لها بمقياس $\frac{1}{20}$. احسب حجم النموذج المصمم.

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

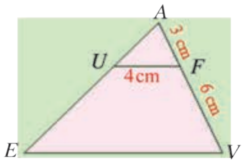
(1) (NS) و (MT) متقاطعان في A، و (TS) و (NM) متوازيان.
الطول AM يساوي

① 1 cm ② 2.25 cm ③ 4 cm



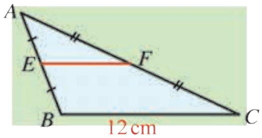
(2) في الشكل المرافق المستقيمان (UF) و (EV) متوازيان. الطول EV يساوي :

① 6.75 cm ② 8 cm ③ 12 cm



(3) في المثلث ABC، E و F هما منتصفا $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي، فالطول EF يساوي

① 7.75 cm ② 6 cm ③ 4.8 cm



(4) إذا ضربنا أطوال أضلاع مثلث بالعدد 3، فإنَّ قياسات زواياه

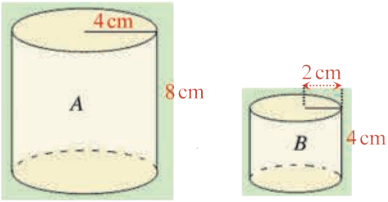
① تُضرب بالعدد 9 ② تُضرب بالعدد 3 ③ لا تتغير

(5) في المثلث ABC، $AB = 2\text{ cm}$ و $AC = 3\text{ cm}$ و $BC = 4.5\text{ cm}$. وفي المثلث DEF، $DE = 6\text{ cm}$ و $DF = 9\text{ cm}$ و $EF = 13.5\text{ cm}$. مساحة المثلث DEF تساوي

① ثلاثة أمثال مساحة ABC.

② أربعة أمثال مساحة ABC.

③ تسعة أمثال مساحة ABC.



(6) حجم الأسطوانة A يساوي

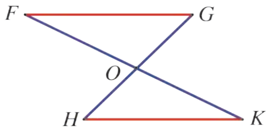
① مثلي حجم الأسطوانة B.

② أربعة أمثال حجم الأسطوانة B.

③ ثمانية أمثال حجم الأسطوانة B.

2

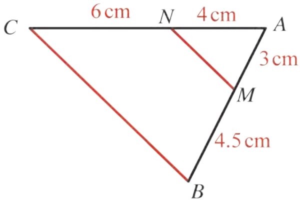
في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.



(1) المستقيمان (FK) و (GH) متقاطعان في O،

والمستقيمان (FG) و (HK) متوازيان، إذن

① $\frac{OF}{OK} = \frac{OH}{OG}$ ② $\frac{OF}{OK} = \frac{FG}{HK}$ ③ $\frac{OF}{KO} = \frac{GO}{HO}$



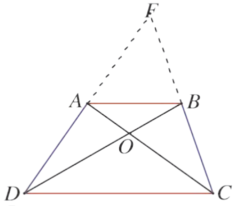
(2) المستقيمان (CN) و (BM) متقاطعان في A، إذن

① (MN) و (BC) ليسا متوازيين.

② الرباعي $BCNM$ شبه منحرف.

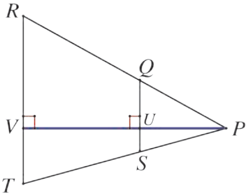
③ المثلث ABC تكبير للمثلث AMN.

3

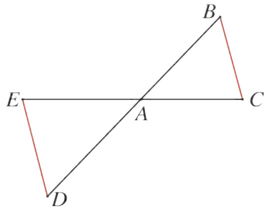


قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$، وقطراه متقاطعان في O، فالمثلثان OAD و OBC يشكلان إحدى حالات تناسب النسب الثلاث.

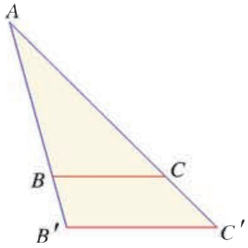


(2) في الشكل المرافق لدينا $\frac{SQ}{TR} = \frac{UQ}{VR}$.



(3) المستقيمان (CE) و (BD) متقاطعان في A. المستقيمان (CB) و (DE) متوازيان. إذن $\frac{CE}{AE} = \frac{BD}{AD}$.

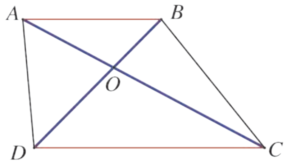
(4) بعملية تكبير ضُربت مساحة مستطيل بالعدد 2.5، فنسبة التكبير هي 1.25.



4 B' و C' نقطتان من نصفي المستقيمين $[AB)$ و $[AC)$.

- (BC) و $(B'C')$ متوازيان.
- $BC = 1.5\text{ cm}$ و $B'C' = 2\text{ cm}$.
- مساحة المثلث ABC تساوي 9 cm^2.

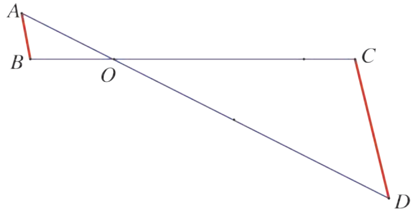
احسب مساحة المثلث $AB'C'$.



5 $ABCD$ شبه منحرف. قاعدتاه $[AB]$ و $[CD]$، وقطراه متقاطعان في O. نعلم أنَّ:

$OA = 3\text{ cm}$، $OC = 5\text{ cm}$، و $OB = 2\text{ cm}$ و $AB = 4\text{ cm}$.

1. سمِّ مثلثين تشملهما مبرهنة النسب الثلاث. اشرح.
2. احسب قيمة كلٍّ من الطولين OD و CD.



6 المستقيمان (AD) و (BC) متقاطعان في O. ونعلم أنَّ: $OA = 3\text{ cm}$ و $OD = 9\text{ cm}$ و $OB = 2.4\text{ cm}$ و $OC = 7\text{ cm}$.

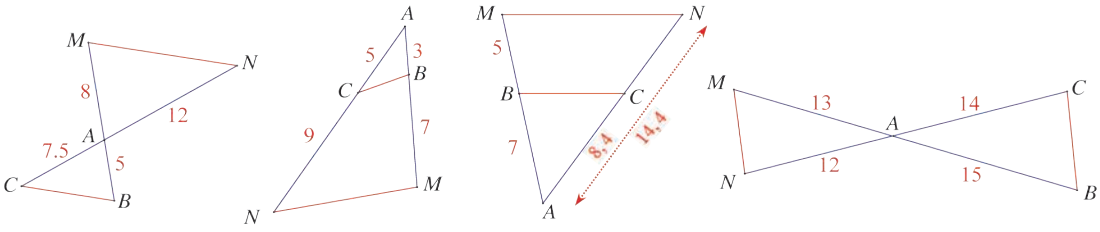
أثبت أنَّ المستقيمين (AB) و (CD) غير متوازيين.

7 $[AB]$ قطعة مستقيمة، في صفحة بيضاء، طولها غير معلوم. دون استعمال مسطرة مدرجة:

1. قسِّم $[AB]$ إلى خمسة أقسام متساوية.
2. قسِّم $[AB]$ إلى سبعة أقسام متساوية.

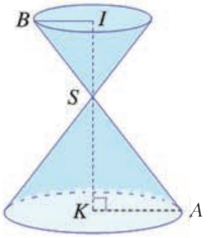
8 في كلٍ من الأشكال الآتية، (BM) و (CN) متقاطعان في A .

قل إن كان المستقيمان (MN) و (BC) متوازيين أم متقاطعين مع شرح إجابتك في كل حالة.



① ② ③ ④

9 مخروطان دورانيان متقابلان بالرأس S، مركزا قاعدتيهما I و K، ونصفا قطريهما $[IB]$ و $[KA]$. المستقيمان (AB) و (KI) متقاطعان في S، والمستقيمان (IB) و (KA) متوازيان. نعلم أنَّ $KA = 4.5 \text{ cm}$ و $KS = 6 \text{ cm}$ و $SI = 4 \text{ cm}$.



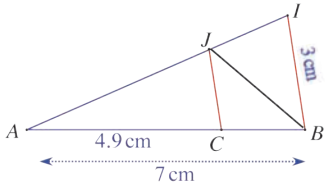
1. احسب الطول IB ، ثم الطول SA .

2. المخروط الذي مركز قاعدته I تصغير للمخروط الذي مركز قاعدته K، وحجماهما على التوالي $\mathcal{V}_I$ و $\mathcal{V}_K$.

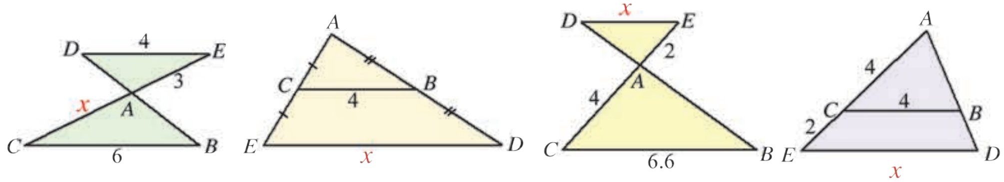
① ما معامل التصغير.

② احسب $\mathcal{V}_K$ ثم استنتج $\mathcal{V}_I$.

10 المستقيمان (JI) و (BC) متقاطعان في A ، والمستقيمان (JC) و (IB) متوازيان. أثبت أنَّ $\widehat{CJB} = \widehat{CBJ}$.



11 في كلٍّ من الأشكال الآتية، (BD) و (CE) متقاطعان في A ، والمستقيمان (BC) و (DE) متوازيان. احسب ذهنياً الطول x .



① ② ③ ④

12 مساحة المثلث ABC تساوي $25\ cm^2$ وقياسا اثنتين من زواياه 65° و 80°. المثلث EFG تكبير للمثلث ABC بنسبة 2.

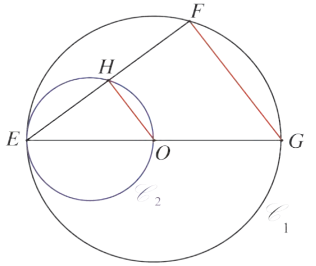
1. احسب ذهنياً قياسات زوايا المثلث EFG؟

2. احسب ذهنياً مساحة المثلث EFG.

13 حجم هرم يساوي $270\ m^3$. احسب ذهنياً حجم نموذج مصغر لهذا الهرم بمقياس $\frac{1}{3}$.

لإحراز تقدم

14 دائرتان متماستان داخلاً

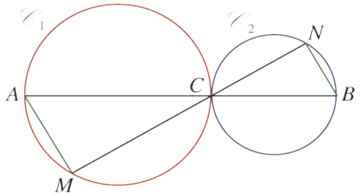


$\mathscr{C}_1$ دائرة مركزها O و $[EG]$ قطر فيها. $\mathscr{C}_2$ هي الدائرة التي قطرها $[EO]$.

1. هل المستقيمان (OH) و (GF) متوازيان؟ علّل إجابتك.

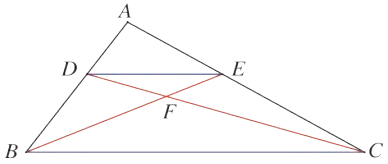
2. إذا علمت أنَّ $OH = 3\ cm$، احسب FG.

15 دائرتان متماستان خارجاً



C نقطة من $[AB]$، بحيث $CA = 6\ cm$ و $CB = 4\ cm$. $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ دائرتان قطراهما على التوالي $[AC]$ و $[CB]$. M نقطة من $\mathscr{C}_1$ و N نقطة من $\mathscr{C}_2$ والنقاط M و C و N على استقامة واحدة. نعلم أنَّ $AM = 3\ cm$. احسب NB.

16 اثنان من حالات تناسب النسب الثلاث

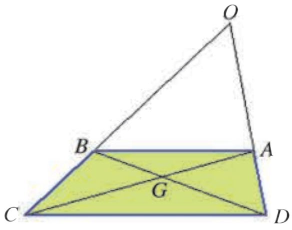


في الشكل المرافق، المستقيمان (DE) و (BC) متوازيان، والمستقيمان (CD) و (BE) متقاطعان في F. نفترض أنَّ $AD = 2\ cm$ و $DB = 3\ cm$ و $BF = 4\ cm$.

1. استعمل مبرهنة النسب الثلاث لإيجاد نسبتين كلّ منهما تساوي النسبة $\frac{DE}{BC}$.

2. استنتج أنَّ $\frac{2}{5} = \frac{EF}{4}$، ثم احسب EF.

17 شبه منحرف



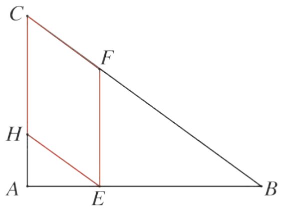
$ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$ ضلعاه المائلان متقاطعان في O، وقطراه متقاطعان في G.

نعلم أنَّ: $OB = 8 \text{ cm}$ و $GC = 6 \text{ cm}$ و $GA = 4 \text{ cm}$.

1. وازن النسبتين $\frac{GA}{GC}$ و $\frac{OB}{OC}$.

2. استنتج الطول BC.

18 مع النسب الثلاث وفيثاغورث



ABC مثلث قائم في A، طولا ضلعيه القائمين هما $AB = 4 \text{ cm}$ و $AC = 3 \text{ cm}$.

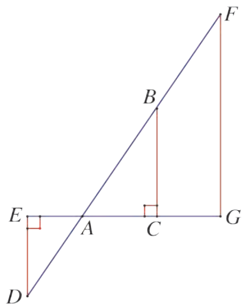
1. احسب طول وتر هذا المثلث.

2. E نقطة على $[AB]$ و (EF) يوازي (AC) و (EH) يوازي (BC).

نرمز إلى الطول AE بالرمز x.

ما طبيعة الرباعي $EFCH$؟ احسب، بدلالة x، أطوال أضلاع هذا الرباعي.

19 وحدة القياس هي السنتيمتر



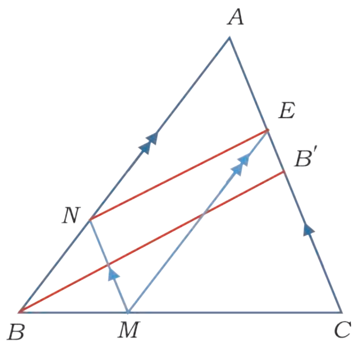
في الشكل المرافق $AB = 12$ و $AC = 9.6$ و $AD = 6.5$ و $BC = 7.2$ و $BF = 10.5$ و $AG = 18$.

1. احسب AE.

2. أثبت أنَّ المستقيمين (FG) و (BC) متوازيان.

3. احسب $\sin \widehat{ABC}$.

20 مع النسب الثلاث والمتوسط



ABC مثلث فيه $[BB']$ متوسط، و M نقطة من $[BC]$ تُحقق $BM = \frac{1}{3}BC$، و $(MN) \parallel (AC)$ و $(ME) \parallel (AN)$.

1. أثبت أن $\frac{2}{3} = \frac{AN}{AB}$.

2. أثبت أن $\frac{2}{3} = \frac{AE}{AB'}$، واستنتج أنّ $(NE) \parallel (BB')$.

الوحدة الثالثة
الزوايا والمضلّعات في الدائرة المضلّعات المنتظمة

الزوايا والمضلّعات في الدّائرة، المضلّعات المنتظمة

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

1. زاويتان متكاملتان

$\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ زاويتان متكاملتان. هذا يعني

① $\widehat{A}=\widehat{B}$ ② $\widehat{A}+\widehat{B}=180^\circ$ ③ $\widehat{A}+\widehat{B}=90^\circ$

2. زاويتان متتامتان

$\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ زاويتان متتامتان. هذا يعني

① $\widehat{A}=\widehat{B}$ ② $\widehat{A}+\widehat{B}=180^\circ$ ③ $\widehat{A}+\widehat{B}=90^\circ$

3. رسم مثلث في دائرة

$\mathscr{C}$ هي دائرة قطرها $[AB]$ و M نقطة من $\mathscr{C}$ غير A و B، إذن

① المثلث AMB قائم في M ② $MA=MB$ ③ $\widehat{AMB}=100^\circ$

4. مركز ثقل المثلث

مركز ثقل المثلث هو

① نقطة تلاقي ارتفاعاته ② نقطة تلاقي منصفاته ③ نقطة تلاقي متوسطاته

5. الدائرة المرسومة المارة برؤوس مثلث قائم

ABC مثلث قائم في A. مركز الدائرة المارة برؤوسه هو

① نقطة تلاقي ارتفاعاته ② منتصف $[BC]$ ③ مركز ثقله

6. حساب قياس زاوية في مثلث متساوي الساقين

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A وفيه $\widehat{BAC}=40^\circ$. إذن

① $\widehat{ABC}=40^\circ$ ② $\widehat{ABC}=70^\circ$ ③ $\widehat{ABC}=60^\circ$

7. حساب طول

ABC مثلث قائم في B، فيه $AC=4\text{ cm}$ و $\widehat{ACB}=60^\circ$. إذن

① $BC=2\text{ cm}$ ② $BC=3.5\text{ cm}$ ③ لا يمكن حساب BC

8. مثلثات متساوية الأضلاع

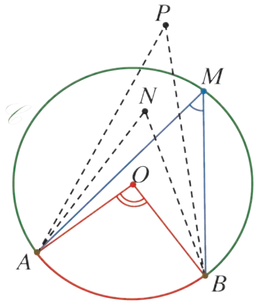
لمثلثٍ متساوي الأضلاع

① محور تناظر واحد فقط ② أكثرمن محور تناظر ③ مركز تناظر

زوايا محيطية وزوايا مركزية

نشاط 1 « تعرف الزاوية المحيطية والمركزية وقياساتها »

1. دوائر وزوايا



$\mathscr{C}$ هي دائرة مركزها O. A و B و M ثلاث نقاط من $\mathscr{C}$.

N نقطة داخل $\mathscr{C}$ و P نقطة خارجها.

نسمي $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية في الدائرة $\mathscr{C}$، تحصر (أو تقابل) القوس $\overset{\frown}{AB}$ الملون بالأحمر.

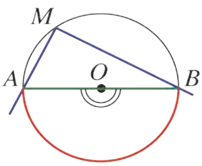
نسمي $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية في الدائرة $\mathscr{C}$، تحصر (أو تقابل) القوس $\overset{\frown}{AB}$ الملون بالأحمر.

ونقول عندئذ إنَّ الزاويتين، المحيطية $\widehat{AMB}$ والمركزية $\widehat{AOB}$ مشتركتان بالقوس $\overset{\frown}{AB}$ المشار إليه.

1. لماذا الزاويتان $\widehat{ANB}$ و $\widehat{APB}$ ليستا محيطيتين؟

2. ارسم الشكل وارسم في $\mathscr{C}$ زاوية محيطية أخرى تقابل القوس $\overset{\frown}{AB}$.

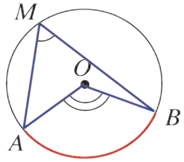
3. وضِع على $\mathscr{C}$ نقطةً E تجعل $\widehat{AEB}$ زاوية محيطية تحصر القوس الذي طرفاه A و B وتضم النقطة M. لوّن الزاوية المركزية التي تقابل هذا القوس.



4. في الشكل المرسوم جانباً، $[AB]$ قطر في الدائرة.

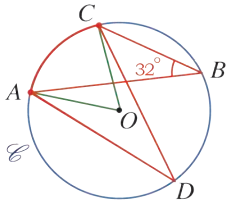
① ما نوع الزاوية $\widehat{BMA}$ وما قياسها؟

② علل المساواة $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ (*).



ملاحظة: سنرى لاحقاً أن المساواة (*) تبقى صحيحة أيا كانت النقطتان A و B من الدائرة المختلفتين عن M.

2. تطبيق



في الشكل المرافق، النقاط A و B و C و D نقاط من الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O و $\widehat{ABC} = 32^{\circ}$.

① حدّد الزاوية المركزية التي تشترك مع $\widehat{ABC}$ بالقوس. ثم احسب قياسها.

② حدّد الزاوية المحيطية التي تشترك مع $\widehat{ABC}$ بالقوس. ثم احسب قياسها. ماذا تلاحظ؟

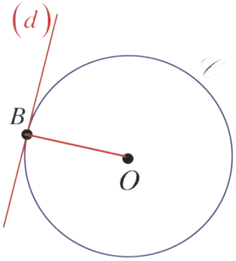
نشاط2 « المستقيم المماس لدائرة »

1. وضع مستقيم مع دائرة

① ارسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O ونصف قطرها $2\ \text{cm}$ و $[AB]$ قطر فيها.

② ارسم المستقيمان (d_1) و (d_2) اللذان يعامدان (AB) ويبعدان عن O على التوالي $3\ \text{cm}$ و $0.5\ \text{cm}$.

③ ما عدد النقاط المشتركة بين الدائرة $\mathscr{C}$ وكل من المستقيمين (d_1) و (d_2)



④ ارسم المستقيم (d) العمودي على (AB) في النقطة B.

⑤ وضِعْ على (d) نقطةً M تختلف عن B. لماذا $OM > OB$؟

⑥ استنتج أنَّ المستقيم (d) يشترك مع الدائرة $\mathscr{C}$ بالنقطة B فقط.

نسمي المستقيم (d) مماس للدائرة $\mathscr{C}$ ويمكن القول:

في الدائرة $\mathscr{C}$ إذا كان مستقيم يعامد نصف القطر $[OB]$ في النقطة B كان هذا المستقيم مماس للدائرة $\mathscr{C}$.

معنى الكلمات

العبارة	المعنى
المستقيم (d) مماس للدائرة $\mathscr{C}$	المستقيم (d) يشترك مع الدائرة $\mathscr{C}$ بنقطة واحدة والنقطة المشتركة تسمى **نقطة التماس**.
المستقيم (d_1) يقع خارج الدائرة $\mathscr{C}$	المستقيم (d_1) لا يشترك مع الدائرة $\mathscr{C}$ بأية نقطة
المستقيم (d_2) قاطع للدائرة $\mathscr{C}$	المستقيم (d_2) يشترك مع الدائرة $\mathscr{C}$ بنقطتان

2. مماسان من نقطة خارج دائرة

① ارسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O ونصف قطرها $2\ \text{cm}$.

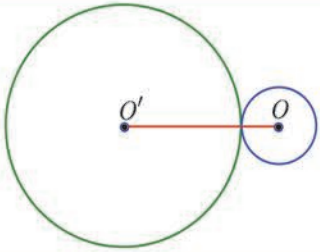
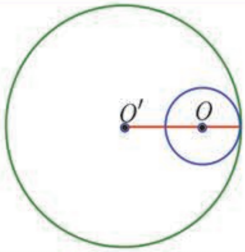
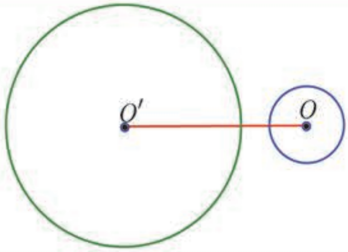
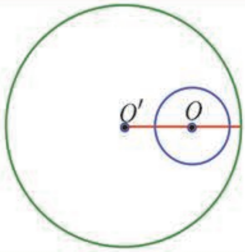
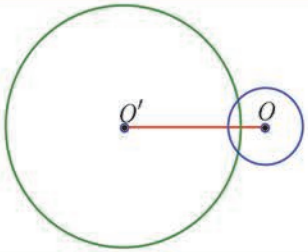
② وضّع نقطة M خارجها ثم ارسم من M مماسين للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطتين A, B

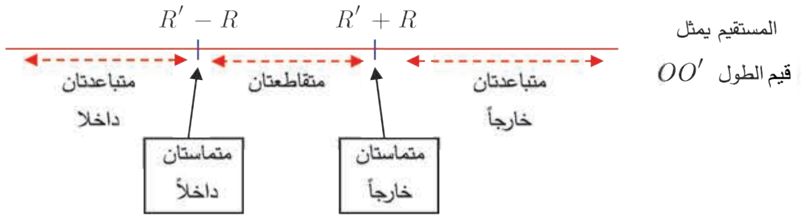
③ أثبت تطابق المثلثين AMO, BMO .

④ ماذا يمكنك أن تقول عن الطولين MA, MB.

نشاط3 « الوضع النسبي لدائرتين »

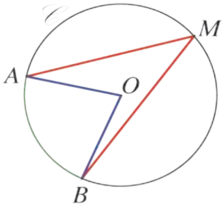
في كلّ حالة آتية لدينا دائرتان مركزيهما O, O' ونصفي قطريهما R, R' .

في الشكل المجاور الدائرتان متماستان خارجاً. قارن بين المقدارين $R + R'$ و OO' . متى تكون الدائرتان متماستان خارجاً؟	
في الشكل المجاور الدائرتان متماستان داخلاً. قارن بين المقدارين $R' - R$ و OO'. متى تكون الدائرتان متماستان داخلاً؟	
في الشكل المجاور الدائرتان متباعدتان خارجاً. قارن بين المقدارين $R' + R$ و OO'. متى تكون الدائرتان متباعدتان خارجاً؟	
في الشكل المجاور الدائرتان متباعدتان داخلاً. قارن بين المقدارين $R' - R$ و OO'. متى تكون الدائرتان متباعدتان داخلاً؟	
في الشكل المجاور الدائرتان متقاطعتان. قارن بين المقدارين $R + R'$ و OO'. قارن بين المقدارين $R' - R$ و OO'. متى تكون الدائرتان متقاطعتان؟	



تعلّم

تعريف



A و B و M ثلاث نقاط من دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O مع $M \neq A$ و $M \neq B$.

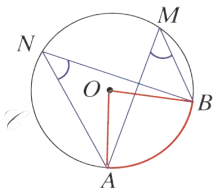
- نقول إنَّ $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية في الدائرة $\mathscr{C}$ تقابل (أو تحصر) القوس $\overset{\frown}{AB}$ التي لا تضم M.
- ونقول إنَّ $\widehat{AOB}$ زاوية مركزية في الدائرة $\mathscr{C}$ تشترك مع $\widehat{AMB}$ بالقوس $\overset{\frown}{AB}$.

خاصة

قياس الزاوية المحيطية في دائرة يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس.

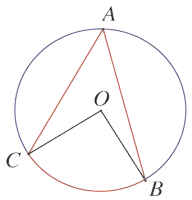
نتيجة

قياسا زاويتين محيطيتين مشتركتين بالقوس، في دائرة، متساويان.



في الشكل المرافق:

- $\widehat{AMB}$ زاوية محيطية في دائرة مركزها O تشترك مع المركزية $\widehat{AOB}$ بالقوس $\overset{\frown}{AB}$، إذن $\widehat{AMB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$.
- $\widehat{AMB}$ و $\widehat{ANB}$ زاويتان محيطيتان مشتركتان بالقوس $\overset{\frown}{AB}$، إذن $\widehat{AMB} = \widehat{ANB}$.



مصطلح نرمز إلى قياس الزاوية المركزية $\widehat{BOC}$ بالرمز $\overset{\frown}{BC}$. فإذا كانت $\widehat{BAC}$ زاوية محيطية، ويمكن كتابة: $\widehat{BOC} = \overset{\frown}{BC}$ و $\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$.

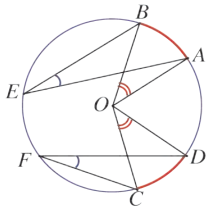
ونقول عندها: إنَّ الزاوية المركزية تقاس بالقوس المقابل لها والمحيطية تقاس بنصف القوس المقابل لها.

خواص الزوايا المحيطية والمركزية

① قياسا زاويتين مركزيتين تقابلان قوسين متساويين في دائرة متساويان، وبالعكس.

② قياسا زاويتين محيطيتين تقابلان قوسين متساويين في دائرة متساويان، وبالعكس.

في الشكل المرافق:

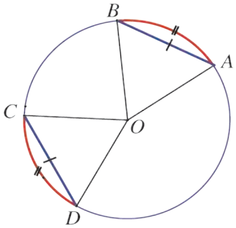


① $\widehat{AOB}$ مركزية تقابل $\overset{\frown}{AB}$ و $\widehat{COD}$ مركزية تقابل $\overset{\frown}{CD}$، إذا كان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ، كان $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

وبالعكس، إذا كان $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ ، كان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

② $\widehat{AEB}$ محيطية تقابل $\overset{\frown}{AB}$ و $\widehat{CFD}$ محيطية تقابل $\overset{\frown}{CD}$، إذا كان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ، كان $\widehat{AEB} = \widehat{CFD}$. وبالعكس، إذا كان $\widehat{AEB} = \widehat{CFD}$ ، كان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$.

أوتار وأقواس

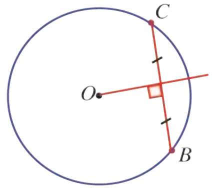


الوتران المتساويان في دائرة يحددان قوسين متساويين، وبالعكس.

في الشكل المرافق:

- إذا كان $AB = CD$ ، كان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ، ومن ثمَّ $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.
- وإذا كان $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ ، كان $AB = CD$.

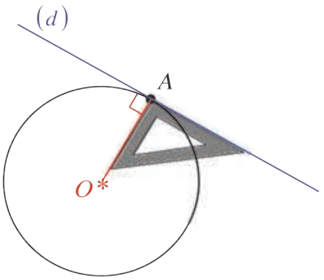
خاصّة



المستقيم المار من مركز دائرة ويعامد وتر فيها يمر من منتصف ذلك الوتر.

وكذلك المستقيم المارّ من مركز دائرة ويمر من منتصف وتر فيها يعامد ذلك الوتر.

تعريف المماس



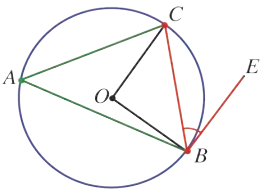
A نقطة من الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O.

مماس الدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة A منها، هو المستقيم (d) المرسوم من A والعمودي على المستقيم (OA).

خواصّ

- بُعد مركز الدائرة عن مماس لها يساوي نصف قطرها.
- مماس الدائرة في نقطةٍ A منها، يشترك معها بنقطة واحدة فقط، هي النقطة A .
- مماس الدائرة في نقطةٍ A منها، يعامد نصف القطر $[OA]$.
- المستقيم الذي يعامد نصف القطر $[OA]$ في نقطةٍ A من الدائرة التي مركزها O هو مماس الدائرة .
- من نقطة M خارج دائرة يمكن رسم مماسين لها وتكون المسافتين بين M وكل من نقطتي التماس متساويتين.

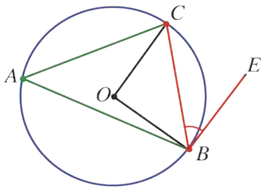
الزاوية المماسية



تسمّى الزاوية التي رأسها على دائرة وأحد ضلعيها وتر في هذه الدائرة وضلعها الآخر مماس لها **زاوية مماسية**. تعامل الزاوية المماسيّة معاملة الزاوية المحيطية من حيث القياس. في الشكل المرافق: $\widehat{COB}$ زاوية مركزية و $\widehat{CAB}$ زاوية محيطية و $\widehat{CBE}$ زاوية مماسية وهذه الزوايا تشترك جميعها بالقوس $\overset{\frown}{BC}$ ، فيكون:

$$\widehat{CBE} = \widehat{CAB} = \tfrac{1}{2}\widehat{COB}.$$

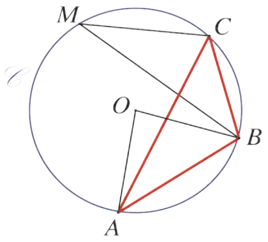
تقاس الزاوية المماسية بقياس نصف القوس التي تقابلها.



مثال في الشكل المرسوم جانباً، إذا كان $\widehat{COB} = 100^\circ$ ، فاحسب قياس القوس $\overset{\frown}{BC}$ ثم احسب قياس $\widehat{CAB}$ و $\widehat{CBE}$.

اكتساب معارف

كيف يتم التعامل مع الزوايا المحيطة والزوايا المركزية؟



مثال A و B و C و M تنتمي إلى دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. $\widehat{AOB} = 84^\circ$ و $\widehat{BMC} = 31^\circ$. احسب قياسات زوايا المثلث ABC.

الحلّ

لحساب قياس $\widehat{ACB}$ نبحث عن القوس المقابل لها، ثم نبحث عن الزاوية المركزية المقابلة لذلك القوس.

- الزاوية المحيطية $\widehat{ACB}$ والمركزية $\widehat{AOB}$ مشتركتان بالقوس $\overset{\frown}{AB}$ ، إذن $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2}\widehat{AOB}$. وحسب النص $\widehat{AOB} = 84^\circ$ ، إذن $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2} \times 84^\circ = 42^\circ$.

لحساب قياس $\widehat{BAC}$ نبحث عن القوس المقابل لها، ثم نبحث، عن الزاوية المركزية أو المحيطية المقابلة لذلك القوس.

- الزاويتان المحيطيتان $\widehat{BAC}$ و $\widehat{BMC}$ مشتركتان بالقوس $\overset{\frown}{BC}$ ، فقياساهما متساويان. أي إنّ $\widehat{BAC} = \widehat{BMC}$. وحسب النص $\widehat{BMC} = 31^\circ$ ، إذن $\widehat{BAC} = 31^\circ$.
- يبقى حساب قياس $\widehat{ABC}$. نعلم أنَّ مجموع قياسات زوايا مثلث يساوي 180°، إذن

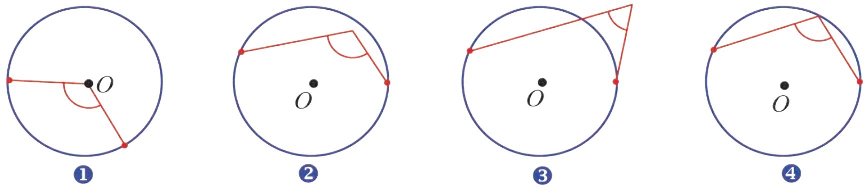
$$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180^\circ$$

أي $\widehat{ABC} + 42^\circ + 31^\circ = 180^\circ$ ، إذن $\widehat{ABC} + 73^\circ = 180^\circ$ ، ومنها

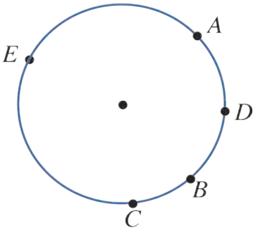
$$\widehat{ABC} + 73^\circ = 180^\circ - 73^\circ = 107^\circ.$$

تحقّق من فهمك

في كل حالة، O هي مركز الدائرة. قل إن كانت الزاوية المشار إليها في الشكل محيطية أو مركزية أم ليست مركزية وليست محيطية. اذكر السبب إن كانت إجابتك نفياً أو إيجاباً.



تدرّب



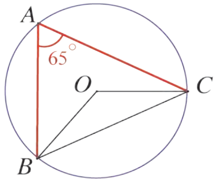
① A و B و C و D و E نقاطٌ من دائرة مركزها O.

❶ ارسم شكلاً ولا تستعمل في إجاباتك سوى هذه النقاط الخمس.

❷ لوّن بالأزرق القوس الذي تقابله الزاوية المحيطية $\widehat{ABC}$.

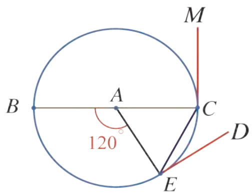
❸ ارسم زاوية محيطية أخرى تقابل القوس نفسه. هل الزاوية المحيطية $\widehat{AEC}$ تقابل القوس نفسه؟

❹ ارسم الزوايا المحيطية التي تشترك مع المركزية $\widehat{DOE}$ بالقوس نفسه.



② A و B و C ثلاث نقاطٍ من دائرة مركزها O. نعلم أنَّ $\widehat{BAC} = 65^\circ$.

احسب قياس كلٍ من: ❶ $\widehat{BOC}$ ❷ $\widehat{OBC}$ ❸ $\widehat{OCB}$



③ $[BC]$ قطر في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها A. E نقطة من هذه الدائرة تُحقّق. $\widehat{BAE} = 120^\circ$ و $(ED), (CM)$ مماسان للدائرة $\mathscr{C}$

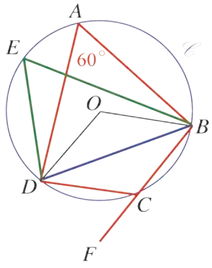
❶ احسب قياسات الزوايا الآتية: $\widehat{CAE}$، $\widehat{ECB}$، $\widehat{CBE}$.

❷ احسب قياس الزاوية المماسية $\widehat{CED}$ وقياس $\widehat{BCM}$.

❷ الرباعي الدائري

نشاط « نقاط تقع على دائرة واحدة »

1. دراسة تجريبية

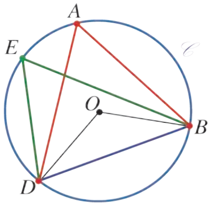


في الشكل المرافق، النقاط A و B و C و D و E واقعة على دائرة واحدة $\mathscr{C}$ مركزها O. $\widehat{BAD} = 60^{\circ}$.

1. ما قياس الزاوية $\widehat{BED}$ ؟
2. احسب قياس كلٍّ من الزاويتين $\widehat{BOD}$ المباشرة والمنعكسة.
3. استنتج قياس الزاوية المحيطية $\widehat{BCD}$.
4. ما العلاقة بين قياسي الزاويتين المحيطيتين $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAD}$؟
5. تقع النقطة F على امتداد $[BC)$، وازن بين قياسي الزاويتين $\widehat{DCF}$ و $\widehat{BAD}$.

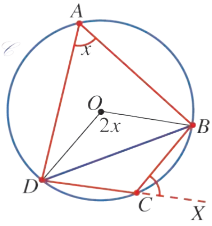
2. إثبات

$[BD]$ وتر في دائرة $\mathscr{C}$، A و E نقطتان من هذه الدائرة غير B و D.



① إذا كانت النقطتان A و E واقعتين في جهة واحدة بالنسبة إلى (BD)، كانت الزاويتان $\widehat{BED}$ و $\widehat{BAD}$ في هذه الحالة محيطيتين مشتركتين بالقوس $\widehat{BD}$، فهما متساويتان.

الزاويتان المحيطيتان المشتركتان بقوس من دائرة متساويتان.



② إذا كانت النقطتان A و C في جهتين مختلفتين بالنسبة إلى (BD)، ورمزنا إلى قياس الزاوية $\widehat{BAD}$ بالرمز x، استنتجنا من كونها محيطية تشترك مع المركزية $\widehat{BOD}$ بالقوس $\widehat{BCD}$، أنّ $\widehat{BOD} = 2x$، فقياس الزاوية المنعكسة $\widehat{BOD}$ يساوي $360^{\circ} - 2x$.

ولما كانت الزاوية المنعكسة $\widehat{BOD}$ مركزية وتشترك مع المحيطة $\widehat{BCD}$ بالقوس $\widehat{BAD}$، استنتجنا أنَّ قياس الزاوية $\widehat{BCD}$ يساوي نصف قياس المركزية المنعكسة $\widehat{BOD}$، أي $\frac{1}{2}(360^{\circ} - 2x) = 180^{\circ} - x$. وبهذا يكون

$$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = x + (180^{\circ} - x) = 180^{\circ}.$$

فالزاويتان $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAD}$ متكاملتين.

مجموع قياسات زوايا أي رباعي يساوي 360°.

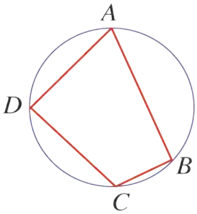
③ إذا مدّدنا $[DC)$ إلى X، لكان $\widehat{BCX} = \widehat{BAD}$ لأنَّ كلّاً منهما تكمل الزاوية $\widehat{BCD}$.

تعلّمْ

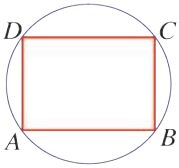
تعريف

الرباعي الدائري هو رباعي تقع رؤوسه على دائرة.

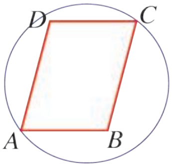
مثال



(1)



(2)



(3)

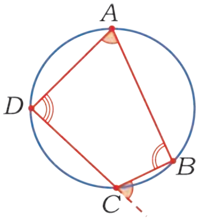
في الشكل (1) $ABCD$ رباعي دائري لأن رؤوسه تقع على دائرة واحدة.

في الشكل (2) $ABCD$ رباعي دائري لأن رؤوسه تقع على دائرة واحدة.

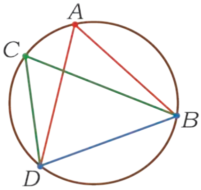
وهنا $ABCD$ مستطيل ونعلم أنّ قطري المستطيل متناصفان ومتساويان إذن رؤوسه متساوية البعد عن نقطة واحدة هي نقطة تلاقي قطريه.

في الشكل (3) $ABCD$ متوازي أضلاع وهو عموماً ليس رباعي دائري لأن قطري متوازي الأضلاع متناصفان وغير متساويين في الحالة العامة فرؤوسه غير متساوية البعد عن نقطة تلاقي قطريه. في هذه الحالة رؤوسه لا تقع على دائرة واحدة.

خواصّ



- الزاويتان المتقابلتان في رباعي دائري متكاملتان.
- الزاوية الخارجية في رباعي دائري تساوي الزاوية المقابلة لمجاورتها.
- إذا كانت النقاط A و B و C و D واقعة على دائرة واحدة وكانت النقطتان A و C تقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى (BD)، كانت الزاويتان $\widehat{BCD}$ و $\widehat{BAD}$ متساويتين.

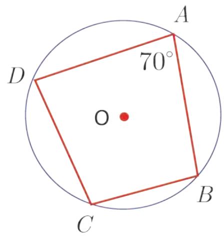


نقبل بصحة العكس:

- إذا تساوت الزاويتان $\widehat{BAD}$ و $\widehat{BCD}$، وكانت النقطتان A و C في جهة واحدة بالنسبة للمستقيم (BD)، كان الرباعي $ABDC$ دائرياً.
- إذا تكاملت زاويتان متقابلتان في شكل رباعي، كان الرباعي دائرياً.

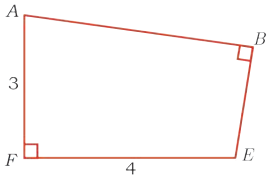
الزاوية الخارجية لمضلّع تكون محصورة بين ضلع وامتداد ضلع أخرى.

مثال



لدينا في الشّكل المجاور $\widehat{A} = 70^o$ ، ونلاحظ من الشكل أنّ $ABCD$ رُباعيّ دائريّ، إذن الزاويتان $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ متكاملتان، أي $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^o$ ومنه قياس الزّاوية $\widehat{C}$ هو 110^o.

مثال



في الشّكل المرسوم جانباً لدينا رُباعي $ABEF$ فيه $\widehat{B} = \widehat{F} = 90^o$ و $FE = 4$ و $AF = 3$

① أثبت أنّ النّقاط A, B, E, F تقعُ على دائرةٍ واحدةٍ.

② عيّن مركز هذه الدائرة وطول نصف قطرها.

الحل

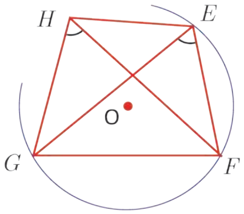
① لما كان $\widehat{B} + \widehat{F} = 180^o$ استنتجنا أن الزاويتين $\widehat{B}$ و $\widehat{F}$ متكاملتان. إذن الرُباعيّ $ABEF$ دائري. أي تقع النّقاط A, B, E, F على دائرةٍ واحدةٍ.

② نعلم أن كل ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة. فالدائرة التي تمر بالنقاط A, B, E, F هي الدائرة نفسها الدائرة التي تمر بالنقاط A, F, E. ولكن AFE قائم في F ومنه فمركز هذه الدائرة هو منتصف الوتر $[AE]$. وطول نصف قطرها R هو نصف طول القطعة $[AE]$.

استناداً إلى مبرهنة فيثاغورث لدينا $AE^2 = AF^2 + FE^2 = 9 + 16 = 25$ ، أي $AE = 5$ ، إذن

$$R = \frac{AE}{2} = \frac{5}{2}$$

مثال



في الشّكل المجاور: $EFGH$ رباعي فيه $\widehat{GEF} = \widehat{GHF}$ هل الدائرة التي تمر بالنقاط E, G, F تمر من H؟

الحل

بكل ثلاث نقاط لا تقع على استقامة واحدة تمرّ دائرة واحدة. إذن هناك دائرة واحدة تمر بالنقاط E, G, F وحيدة. ومن جهة أخرى الزاويتان $\widehat{GHF}$ و $\widehat{GEF}$ زاويتان متساويتان وتقعان في جهة واحدة بالنسبة إلى المستقيم (FG)، أي أنّ الرباعي $EFGH$ رباعي دائري. إذن الدائرة التي تمر بالنقاط E, G, F تمر أيضاً بالنقطة H.

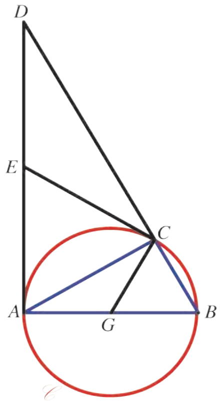
تحقّق من فهمك

ABC مثلث متساوي الساقين، قياس زاوية رأسه A يساوي $120°$، G مركز الدائرة $\mathscr{C}$ المارة برؤوسه. ويتقاطع في النقطة M مماسا الدائرة $\mathscr{C}$ في B و C.

❶ ارسم شكلاً يتفق مع معطيات المسألة.

❷ أثبت أنَّ الرباعي $MBGC$ دائري.

تدرّبْ



① ABC مثلث قائم في C ومرسوم في الدائرة $\mathscr{C}$، فيه $AB = 12$ و $\widehat{BAC} = 30°$. مماس الدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة A يتقاطع مع المستقيم (BC) في النقطة D.

❶ احسب مساحة المثلث ACD.

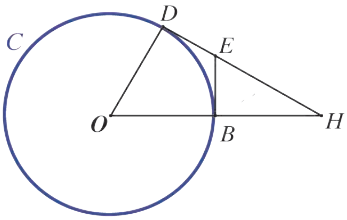
❷ لتكن E منتصف القطعة $[AD]$، و G مركز الدائرة $\mathscr{C}$.
أثبت أنَّ المستقيم (CE) مماس للدائرة $\mathscr{C}$.

❸ أثبت أنَّ الرباعي $AGCE$ رباعي دائري.

② ABE و DBE مثلثان قائمان، $[BE]$ وترٌ مشتركٌ لهما.

❶ أثبت أنَّ النقاط A و D و B و E واقعة على دائرة واحدة $\mathcal{C}$. عيِّنْ مركز هذه الدائرة وارسمها. (لاحظ وجود حالتين)

❷ في الحالة التي تكون فيها النقطتان A و D بجهةٍ واحدةٍ نسبةً إلى المستقيم (BE). نضع النقطة H على نصف المستقيم $[ED)$ بحيث يكون $DH = DB$، ونضع النقطة T على نصف المستقيم $[BA)$ بحيث يكون $AT = AE$. أثبت أنَّ النقاط B و E و T و H واقعة على دائرة واحدة $\mathcal{C}'$.



③ في الشكل المرسوم جانباً: (BE) و (DH) مماسان للدائرة $\mathcal{C}(O,6)$ في النقطتين B و D على التوالي و $\widehat{BOD} = 60°$.

❶ احسب DH.

❷ أثبت أنَّ النقاط O و B و E و D واقعة على دائرة واحدة $\mathcal{C}'$. عيِّنْ مركزها وارسمها.

❸ احسب طول نصف قطر الدائرة $\mathcal{C}'$.

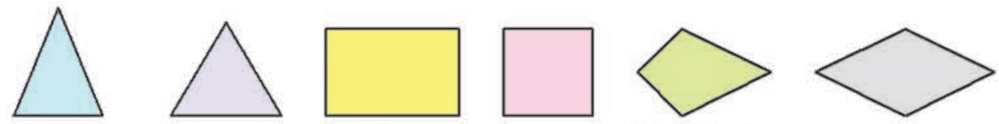
3 المضلّعات المنتظمة

نشاط «تعرّف مضلعات منتظمة»

نقول إنَّ مضلعاً منتظمٌ، إذا كانت أطوال أضلاعه متساوية وكانت قياسات زواياه متساوية.

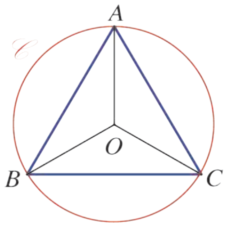
1. مضلّعات ثلاثية أو رباعيّة

في كلّ من الحالات الآتية. هل المضلّع منتظم؟



معين — رباعي قطراه متعامدان — مربع — مستطيل — مثلث متساوي الأضلاع — مثلث متساوي الساقين

2. مثلث متساوي الأضلاع في دائرة

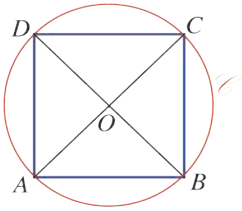


① ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. ما قياسات زوايا المثلث ABC؟ استنتج قياسات الزوايا $\widehat{AOB}$ و $\widehat{BOC}$ و $\widehat{COA}$.

نقول إنَّ O هي مركز المثلث المتساوي الأضلاع ABC.

② وضِع على ورقة بيضاء نقطتين O و M بحيث يكون $OM = 3\text{ cm}$. ارسم المثلث المتساوي الأضلاع MNP الذي مركزه O.

3. مربع في دائرة

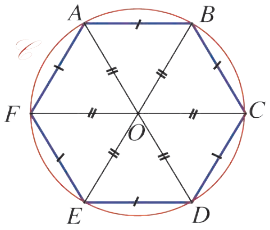


① $ABCD$ مربع مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. ما قياسات الزوايا $\widehat{AOB}$ و $\widehat{BOC}$ و $\widehat{COD}$ و $\widehat{DOA}$.

نقول إنَّ O هي مركز المربع $ABCD$.

② وضِع على ورقة بيضاء نقطتين O و M بحيث يكون $OM = 3\text{ cm}$. ارسم المربع $MNPQ$ الذي مركزه O.

4. مسدس في دائرة



$ABCDEF$ مسدس منتظم مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. المثلثات المتساوية الساقين OBA و OAF و ... و OCB طبوقة، إذن $\widehat{BOC} = \cdots = \widehat{AOF} = \widehat{BOA}$.

① احسب القياس المشترك لتلك الزوايا المركزية.

② استنتج أنَّ طول ضلع المسدس المنتظم يساوي نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

تعلّمْ

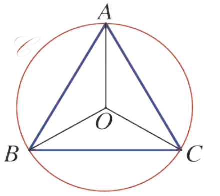
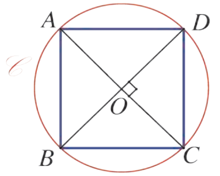
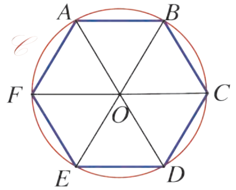
تعريف

المضلع المنتظم هو مضلع قياسات زواياه متساوية وأطوال أضلاعه متساوية.

خواصّ

1. كل مضلع منتظم قابل للارتسام في دائرة (بمعنى وجود دائرة مارة برؤوسه). يسمى مركز الدائرة المارة برؤوس مضلعٍ منتظمٍ أيضاً **مركز المضلع المنتظم**.

2. إذا كان $[AB]$ ضلعاً في مضلعٍ منتظم مركزه O وعدد أضلاعه n، كان $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$.

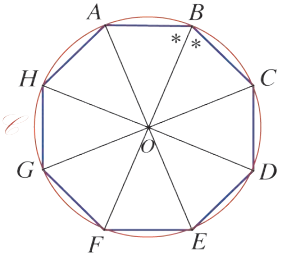
ثلاثي (مثلث متساوي الأضلاع)	رباعي (مربع)	سداسي (مسدس)
		
ABC مثلث متساوي الأضلاع	$ABCD$ مربع	$ABCDEF$ مسدس
$\widehat{ABC} = 60^\circ$ $\widehat{AOB} = 120^\circ$	$\widehat{ABC} = 90^\circ$ $\widehat{AOB} = 90^\circ$	$\widehat{ABC} = 120^\circ$ $\widehat{AOB} = 60^\circ$

اكتساب معارف

كيف نحسب زاوية مضلع منتظم ؟

مثال $ABCDEFGH$ مثمن منتظم مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. ما قياس الزاوية $\widehat{ABC}$.

الحلّ



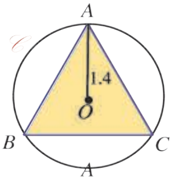
نعلم أنَّ $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$ حيث n عدد الأضلاع. للمُثمَّن المنتظم ثمانية أضلاع، أي $n = 8$، إذن $\widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

ومن المثلث المتساوي الساقين OAB، $\widehat{ABO} = \frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 67.5^\circ$.

ونجد بحساب مماثل في المثلث OBC أنَّ $\widehat{CBO} = 67.5^\circ$، ثمّ

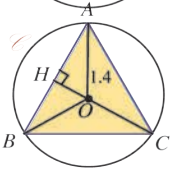
$\widehat{ABC} = 67.5^\circ + 67.5^\circ = 135^\circ$

كيف نحسب طول ضلع مضلع منتظم ؟



مثال ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O ونصف قطرها $OA = OB = OC = 1.4 \text{ cm}$. احسب الطول AB.

الحلّ

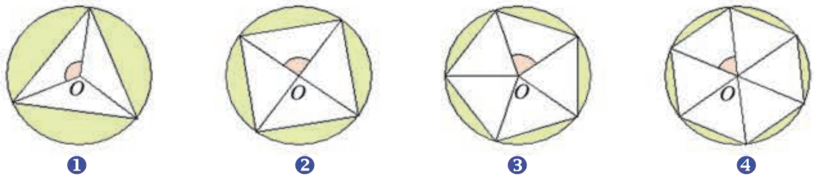


نتأمّل المثلث OAB، ضلعاه $[OA]$ و $[OB]$ هما نصفا قطرين في الدائرة $\mathscr{C}$، فهو متساوي الساقين رأسه O مركز الدائرة $\mathscr{C}$. نرسم ارتفاع هذا المثلث من O. ونرمز إلى مسقط O على $[AB]$ بالرمز H، ولدينا (OA) محور في المثلث ABC فهو منصف للزاوية $\widehat{CAB}$. إذن $\widehat{OAH} = 30^\circ$.

في المثلث OAH، $\cos \widehat{OAH} = \frac{AH}{AO}$ أي $\cos 30^\circ = \frac{AH}{1.4}$، ومنها $AH = 1.4 \times \cos 30^\circ$. ويكون أيضاً (OH) محور القطعة $[AB]$ إذن $AB = 2\,AH$. نستنتج أنّ $AB = 2 \times 1.4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.4\sqrt{3}$.

تحقّق من فهمك

في كل حالة، اذكر نوع المضلع المنتظم المرسوم في الدائرة التي مركزها O واحسب قياس الزاوية المشار إليها باللون الأحمر.



تدرّب

① $ABCD$ مربع مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O ونصف قطرها 4cm.

❶ احسب الطول AB.

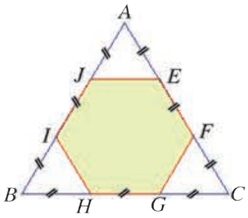
❷ احسب محيط هذا المربع.

❸ احسب مساحة المربع $ABCD$.

② ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. وM نقطة من القوس $\overset{\frown}{AB}$.

❶ احسب قياس كلٍّ من الزوايا: ① $\widehat{AMC}$ ② $\widehat{BMC}$ ③ $\widehat{AMB}$

❷ ماذا تسمى نصف المستقيم $[MC)$؟

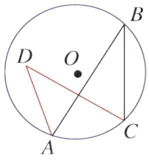


③ ABC مثلث متساوي الأضلاع. و $EFGHIJ$ مسدس مشار إليه في الشكل المرافق. هل المسدس $EFGHIJ$ منتظم؟ اشرح.

تمرينات ومسائل

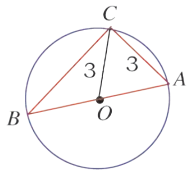
1 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.

(1) يرمز O إلى مركز الدائرة المرسومة. $\widehat{ABC}=20^\circ$ في الشكل



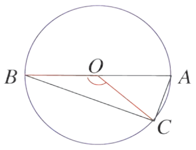
$\widehat{ADC}=40^\circ$

①



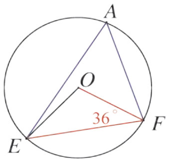
A و B و O على استقامة واحدة

②



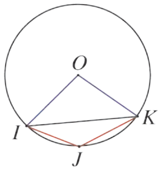
A و O و B على استقامة واحدة . و $\widehat{ACO}=70^\circ$

③



(2) A و E و F ثلاث نقاط من دائرة مركزها O . $\widehat{OFE}=36^\circ$ ، إذن

① $\widehat{EAF}=54^\circ$ ② $\widehat{EAF}=72^\circ$ ③ $\widehat{EAF}=108^\circ$



(3) I و J و K ثلاث نقاط من دائرة مركزها O . $\widehat{IOK}=100^\circ$ ، إذن

① $\widehat{KJI}=100^\circ$ ② $\widehat{KJI}=110^\circ$ ③ $\widehat{KJI}=130^\circ$

(4) $ABCDEF$ مسدس منتظم، فقياس الزاوية $\widehat{EDC}$ يساوي

① 60° ② 120° ③ 135°

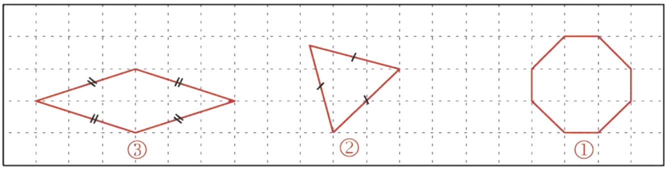
(5) النقطة O هي مركز مثمن منتظم أحد أضلاعه $[AB]$ ، فقياس الزاوية $\widehat{AOB}$ يساوي

① 30° ② 45° ③ 60°

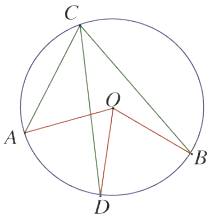
(6) $ABCD$ مربع مرسوم في دائرة نصف قطرها $3\ cm$ ، فطول ضلع هذا المربع يساوي

① $3\ cm$ ② $4.2\ cm$ ③ $3\sqrt{2}\ cm$

(7) المضلّع المنتظم من بين المضلعات الآتية هو:



2 في كلّ حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.



(1) A و B و C و D أربع نقاط من دائرة مركزها O. $\widehat{BOD} = 66^\circ$ و $\widehat{DCA} = 33^\circ$. إذن

① $\widehat{AOD} = 66^\circ$ ② $\widehat{DCB} = 33^\circ$ ③ $[CD]$ هو المنصف الداخلي للزاوية $\widehat{BCA}$.

(2) ABC مثلث متساوي الأضلاع مرسوم في دائرة نصف قطرها $4\ \text{cm}$. إذن الطّول AB بالسنتيمتر يساوي: ① $8 \times \cos 30^\circ$ ② $8 \times \sin 60^\circ$ ③ 8

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) A و B و C و D أربع نقاط من دائرة واحدة. إذن $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$.

(2) $BDCE$ رباعي مرسوم في دائرة $\mathscr{C}$، قطراه متقاطعان في A. $\widehat{EDC} = 35^\circ$ و $\widehat{EAC} = 72^\circ$. إذن A هي مركز الدائرة $\mathscr{C}$.

(3) ABC مثلث، فيه $\widehat{BAC} = 90^\circ$ و $BC = 4\ \text{cm}$. إذن نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه يساوي $4\ \text{cm}$.

(4) ABC مثلث، فيه $\widehat{ABC} = 85^\circ$ و $\widehat{ACB} = 50^\circ$. O مركز الدائرة المارة برؤوسه. إذن المثلث OBC قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

(5) مسدس منتظم مرسوم في دائرة قطرها $5\ \text{cm}$. محيط هذا المسدس يساوي $30\ \text{cm}$.

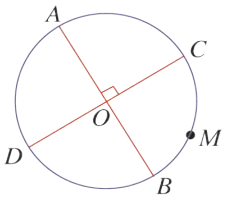
(6) $ABCDEF$ مسدس منتظم. إذن المثلث ACE متساوي الأضلاع.

(7) للمخمس المنتظم خمسة محاور تناظرية.

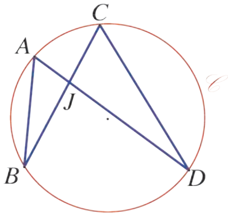
(8) للمسدس المنتظم ستة محاور تناظرية.

4 $[AB]$ و $[CD]$ قطران متعامدان في دائرة مركزها O. M نقطة من القوس الصغرى $\overset{\frown}{BC}$. احسب قياس كلٍ من:

① $\widehat{AMB}$ ② $\widehat{AMC}$ ③ $\widehat{BMC}$



5 A و B و C و D نقاطٌ من دائرة $\mathscr{C}$. نعلم أنَّ $\widehat{ABC} = 22°$ و $\widehat{BAD} = 58°$. الوتران $[AD]$ و $[BC]$ متقاطعان في J. احسب قياس كلٍّ من: ① $\widehat{BCD}$ ② $\widehat{CDA}$ ③ $\widehat{CJD}$

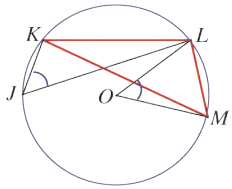


6
1. ارسم نقطتين O و A المسافة بينهما 4 cm.
2. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O وتمر بالنقطة A.
3. استعمل مسطرة ومنقلة لرسم مثلث ABC متساوي الأضلاع في الدائرة $\mathscr{C}$.
4. ارسم المثلث ABC المتساوي الأضلاع في الدائرة $\mathscr{C}$، دون استعمال منقلة.

7 J و K و L و M نقاط من دائرة مركزها O.

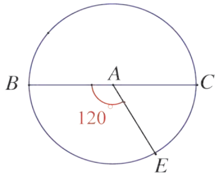
$$\widehat{KJL} = \widehat{LOM} = 52°$$

احسب قياسات زوايا المثلث LMK.



8 $[BC]$ قطر في دائرة $\mathscr{C}$ مركزها A. E نقطة من هذه الدائرة تُحقّق $\widehat{BAE} = 120°$. احسب قياسات الزوايا الآتية:

① $\widehat{CAE}$ ② $\widehat{ECB}$ ③ $\widehat{CBE}$



9 $[AB]$ قطعة مستقيمة طولها 7 cm.
1. ارسم $[AB]$ وارسم نقطةً C بحيث تحصل على $\widehat{BAC} = 70°$ و $\widehat{ABC} = 60°$. ثم ارسم الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC. ارمز إلى مركزها بالرمز O.
2. احسب قياس الزاوية $\widehat{AOB}$.

10 $\mathscr{C}$ دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$ حيث $AB = 8 \text{ cm}$.
1. ارسم شكلاً، حسب معطيات النص، وضَع على $\mathscr{C}$ نقطةً E تحقق $\widehat{BAE} = 52°$.
2. أثبت أنَّ المثلث AEB قائم الزاوية.
3. ضَع على القوس $\overset{\frown}{AB}$ التي لا تضم E نقطةً K. احسب قياس كلٍّ من $\widehat{BOE}$ و $\widehat{BKE}$.

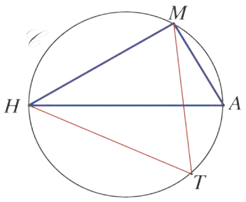
11 $\mathscr{C}$ دائرة مركزها O ونصف قطرها $4\ cm$. A و B نقطتان من $\mathscr{C}$ تحقّقان $\widehat{AOB} = 70°$، C هي النقطة المقابلة قطرياً للنقطة A.

1. ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص، ثم أثبت أنَّ المثلث ABC قائم الزاوية.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{ACB}$.

3. احسب الطول AB مقرباً إلى أقرب ميليمتر.

12 $\mathscr{C}$ دائرة قطرها $AH = 9\ cm$. و M نقطة من الدائرة $\mathscr{C}$ تحقّق $AM = 4.5\ cm$ و T نقطة أخرى من $\mathscr{C}$.



1. تحقّق من أنَّ المثلث MAH قائم الزاوية.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{MHA}$.

3. ما قياس الزاوية $\widehat{HTM}$ ؟

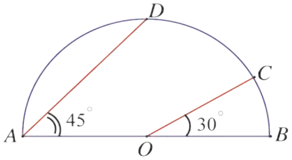
13 $\mathscr{C}$ دائرة مركزها O.

1. وضِع النقاط A و B و C، بهذا الترتيب، على $\mathscr{C}$ بحيث يكون $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = 100°$. ثم وضِع نقطةً D على القوس $\overset{\frown}{AC}$ التي لا تضم B.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{ADB}$.

3. أثبت أنَّ نصف المستقيم $[DB)$ منصف للزاوية $\widehat{ADC}$.

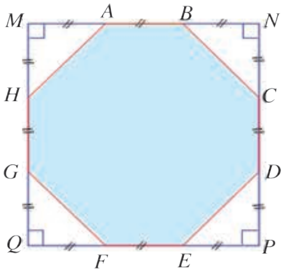
14 C و D نقطتان من نصف دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$ تحقّقان $\widehat{BOC} = 30°$ و $\widehat{BAD} = 45°$.



1. ما طبيعة المثلث ADB ؟ اشرح إجابتك.

2. ما طبيعة المثلث COD ؟ اشرح إجابتك.

15 $MNPQ$ مربع. و $ABCDEFGH$ مثمن مشار إليه في الشكل المرافق.



1. هل هذا المثمن منتظم؟ اشرح.

2. $\mathcal{A}$ هي مساحة المربع $MNPQ$ و $\mathcal{A}'$ مساحة المثمن. اشرح لماذا $\mathcal{A}' = \frac{7}{9}\mathcal{A}$ ؟

لإحراز تقدّم

16 رباعي دائري

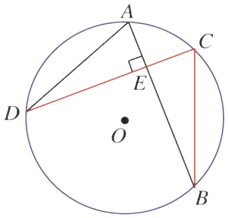
$ABCD$ رباعي دائري (رباعي مرسوم في دائرة) مركزها O. نعلم أنَّ $\widehat{ADC} = 72^\circ$. احسب قياس الزاوية $\widehat{ABC}$.

17 وتران متعامدان

A و B و C و D أربع نقاط من دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. الوتران $[AB]$ و $[CD]$ متعامدان في E. $\widehat{BCD} = 69^\circ$.

1. احسب قياس الزاوية $\widehat{ADC}$.

2. ① ارسم المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلّث EBC، ولتكن F نقطة تلاقيه مع $[BC]$.



② ما طبيعة المثلّث EFC ؟ تحقق من إجابتك.

③ استنتج قياس الزاوية $\widehat{CEF}$.

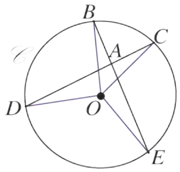
3. يقطع المستقيمُ (EF) القطعة المستقيمة $[AD]$ في النقطة H.

① ما قياس الزاوية $\widehat{DEH}$ ؟ لماذا؟

② استنتج قياس الزاوية $\widehat{DHE}$ في المثلث DEH.

③ استنتج أيضاً دور المستقيم (EH) في المثلث ADE.

18 زاوية داخلية في دائرة

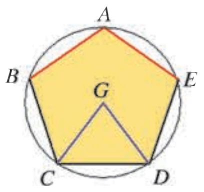


E و B و C و D أربع نقاط من دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O. $\widehat{BOC} = 50^\circ$ و $\widehat{DOE} = 120^\circ$. (BE) و (DC) متقاطعان في A.

1. احسب قياس الزاوية $\widehat{DAE}$. ($\widehat{DAE}$ زاوية داخلية في الدائرة)

2. اكتب نصّاً بحساب قياس الزاوية الداخلية في الدائرة.

19 مخمّس منتظم ودائرة

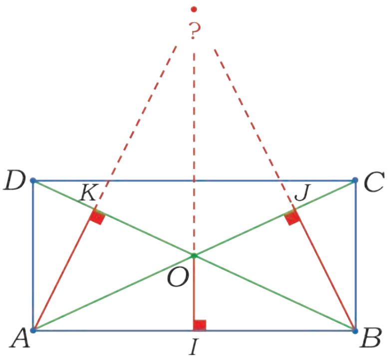


$ABCDE$ مخمّس منتظم مركزه G.

1. احسب قياس الزاوية $\widehat{CGD}$.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{EAB}$.

20

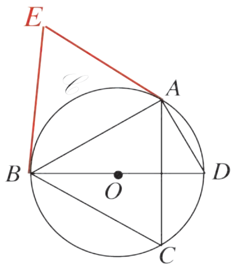


نتأمّل مستطيلاً $ABCD$ يتقاطع قطراه في O.

1. سمِّ كل رباعي دائري في الشكل مع التعليل.

2. أثبت أن المستقيمات (BJ) و (AK) و (IO) تتلاقى في نقطة واحدة.

21 العمل انطلاقاً من مثلثٍ متساوي الأضلاع



في الشكل المرافق:

- ABC مثلث متساوي الأضلاع.
- النقطة O هي مركز الدائرة $\mathscr{C}$ المارة برؤوسه.
- النقطة D هي النقطة المقابلة قطرياً للنقطة B في الدائرة $\mathscr{C}$.

1. ما طبيعة المثلث ABD؟

2. ما قياس الزاوية $\widehat{ADB}$؟ معللاً إجابتك.

3. (EA) و (EB) مماسان للدائرة في A و B أثبت أن المثلث EBA متساوي الاضلاع.

4. لتكن I منتصف القطعة $[CD]$، ولتكن J نظيرة O بالنسبة إلى النقطة I.

أثبت أنَّ (DC) و (OJ) متعامدان.

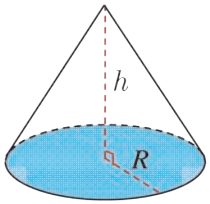
الوحدة الرابعة

مجسّمات ومقاطع

مجسّمات ومقاطع

انطلاقة نشطة

في كلٍّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات ① و ② و ③ صحيحة، أشر إليها:

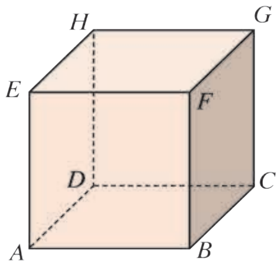


.1 حجم هرم ارتفاعه h ومساحة قاعدته S:

① $V = \frac{1}{3} S \times h$ ② $V = \frac{\pi}{3} S \times h$ ③ $V = S \times h$

.2 حجم مخروط ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته R هو:

① $V = \frac{\pi}{3} Rh$ ② $V = \pi R^2 h$ ③ $V = \frac{\pi}{3} R^2 h$



.3 تعرُّف وجهين متوازيين

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات. الوجه الموازي للوجه $EFGH$ هو

① $CDHG$ ② $BCGF$ ③ $ABCD$

.4 تعرُّف وجه يوازيه حرف

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات. الحرف HD يوازي الوجه

① $EFGH$ ② $ABCD$ ③ $ABFE$

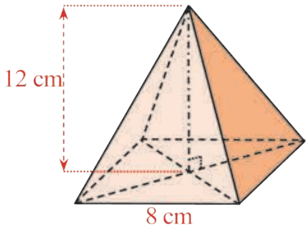
.5 تمايز مفردات

الهرم المنتظم الذي رأسه S، وأحد رؤوس قاعدته A، هو الهرم الذي.

① ارتفاعه هو الحرف $[SA]$.

② قاعدته مضلع منتظم مركزه O وارتفاع الهرم هو $[SO]$

③ أطوال أضلاع قاعدته متساوية.



.6 حساب حجم هرم

هرم منتظم ارتفاعه 12 cm وقاعدته مربع طول ضلعه 8 cm. حجم هذا الهرم يساوي.

① $256\ cm^3$ ② $220\ cm^3$ ③ $1232\ cm^3$

7. حساب حجم مخروط دوراني

مخروط دوراني ارتفاعه 24 cm ومساحة قاعدته $32\ cm^2$. حجم هذا المخروط يساوي

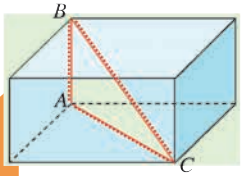
① $256\ cm^3$ ② $220\ cm^3$ ③ $1232\ cm^3$

8. تكبير

إذا كبرنا العدد 1.6 بنسبة $5/4$، حصلنا على

① 2 ② 2.5 ③ 3.125

9. استعمال مبرهنة فيثاغورث



في متوازي المستطيلات المرسوم جانباً، المثلث ABC قائم الزاوية في A،

$BC = 29\ cm$ و $AC = 20\ cm$. الطول AB يساوي

① 9 cm ② 21 cm ③ 35.2 cm

10. حساب طول محيط دائرة

دائرة، طول قطرها 7 cm، طول محيطها يساوي

① $7\pi\ cm$ ② $3.5\pi\ cm$ ③ $12.25\pi\ cm$

11. حساب مساحة قرص دائري

دائرة، طول قطرها 6 cm، مساحتها تساوي

① $6\pi\ cm^2$ ② $9\pi\ cm^2$ ③ $36\pi\ cm^2$

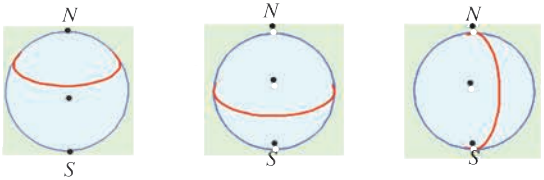
12. تغيير وحدة قياس السعة

235 L يساوي

① $0.235\ m^3$ ② $2.35\ m^3$ ③ $23.5\ m^3$

13. مصطلحات في الكرة الأرضية

يرمز N إلى القطب الشمالي، ويرمز S إلى القطب الجنوبي. خط الاستواء مرسوم على الشكل



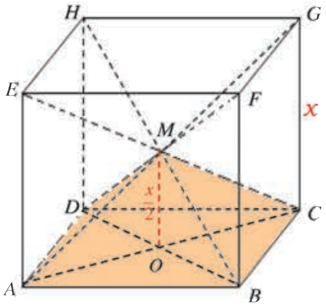
① ② ③

تذكرة بالمجسّمات

نشاط « صيغة لحجم هرم في حالة خاصة وتوليد المخروط »

1. حجم الهرم

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه x نرمز إلى مساحة المربع $ABCD$ بالرمز S. وبالرمز $\mathcal{V}'$ إلى حجم المكعّب $ABCDEFGH$. وبالرمز $\mathcal{V}$ إلى حجم الهرم $M-ABCD$. و بالرمز h إلى الارتفاع $[OM]$ لهذا الهرم.



① أثبت أن: $AEGC$ متوازي الأضلاع .

② استنتج : $OM=\frac{1}{2}CG$

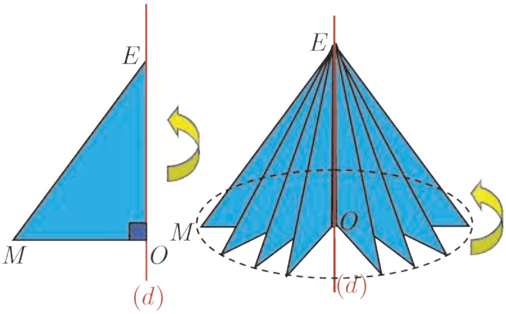
③ اكتب $\mathcal{V}'$ بدلالة x و S.

④ اشرح لماذا $\mathcal{V}=\frac{1}{6}\times S\times x$.

⑤ جد العدد k الذي يحقق $\mathcal{V}=k\times S\times h$.

⑥ استنتج حجم الهرم.

2. المخروط الدوراني



1. ارسم على ورق مقوى، مثلثاً EMO قائم الزاوية في O بحيث يكون $EO=12\text{ cm}$ و $EM=13\text{ cm}$.
2. ثبّتْ الضلع $[EO]$ على قلمٍ بشريط لاصق ثم دوِّر القلم.
3. في حالة الدوران دورةً كاملة حول المحور (d)، ما طبيعة الخط الذي ترسمه النقطة M ؟

تعلّمْ

الموشور والأسطوانة

- **المساحة الجانبيَّة للموشور القائم أو للأسطوانة الدورانيَّة** يساوي: محيط القاعدة × الارتفاع.
- إذا أردنا حساب **المساحة الكليَّة للموشور أو للأسطوانة**، أضفنا مساحتي القاعدتين للمساحة الجانبيَّة.

المساحة الكليَّة تساوي: المساحة الجانبيَّة + ضعفي مساحة القاعدة.

- **حجم الموشور أو الأسطوانة** يساوي: مساحة القاعدة × الارتفاع.
- **حجم متوازي المستطيلات** أبعاده x و y و z: $\boxed{V = x \times y \times z}$.
- **حجم المكعّب** طول حرفه x: $\boxed{V = x^3}$.

مثال أسطوانة دورانيَّة ارتفاعها $40\ \text{cm}$ ، طول نصف قطر قاعدتها $7.5\ \text{cm}$، أوجدْ مساحتها الجانبيَّة ثم مساحتها الكليَّة ثم حجمها.

الحلّ

حساب المساحة الجانبيَّة:

$$S_L = 2\pi \times 7.5 \times 40 = 600\pi\ \text{cm}^2$$

حساب المساحة الكليَّة:

$$S_T = 600\pi + 2 \times \pi \times 7.5^2$$
$$= 600\pi + 112.5 \times \pi = 712.5\pi\ \text{cm}^2$$

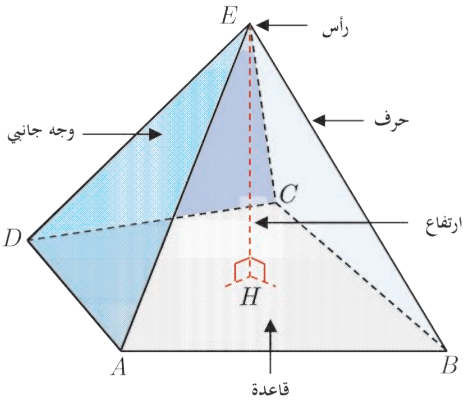
حساب الحجم:

$$V = \pi r^2 \times h = \pi \times (7.5)^2 \times 40 = 2250\pi\ \text{cm}^3$$

الهرم

الهرم مجسم يميزه:

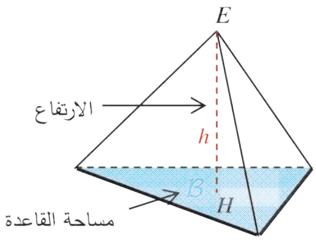
- مضلع يسمى قاعدة الهرم.
- نقطة E لا تنتمي إلى القاعدة تسمى رأس الهرم.
- مثلثات مشتركة بالرأس E وقواعدها هي أضلاع قاعدة الهرم، يسمى كل منها وجهاً جانبياً.
- السطح الجانبي، وهو السطح المؤلف من مجموعة الأوجه الجانبية.
- **ارتفاع** الهرم من رأسه E، هو العمود $[EH]$ على مستوي قاعدته، حيث H نقطة من القاعدة.



• **الهرم المنتظم** نقول إنَّ هرماً رأسه E هو هرم منتظم، إذا استوفى الشرطين:

① قاعدته $\mathcal{P}$ مضلع منتظم مركزه O (مثلث متساوي الأضلاع أو مربع أو ......)

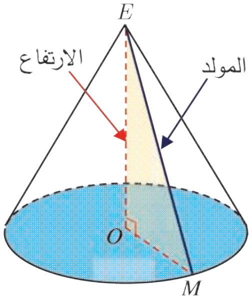
② ارتفاعه هو القطعة المستقيمة $[EO]$ (الواصلة بين رأس الهرم ومركز القاعدة)



• **حجم الهرم،** (وليكن $\mathcal{V}$)، يساوي ثلث جداء ضرب مساحة قاعدته $\mathcal{S}$ بارتفاعه h.

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{S}h}$$

المخروط الدوراني



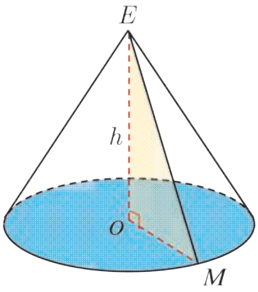
المخروط الدوراني الذي رأسه E هو المجسم المتولد من دوران مثلث EOM قائم في O، حول المستقيم (OE). القرص المتولد من دوران $[OM]$ هو قاعدة المخروط.

• **ارتفاع** المخروط الدوراني الذي رأسه E ومركز قاعدته O، هو القطعة المستقيمة $[EO]$. وهو أيضاً الطول EO.

• المستقيم (EO) عمودي على مستوي القاعدة.

• حجم مخروط دوراني، وليكن $\mathcal{V}$ يساوي ثلث جداء ضرب مساحة قاعدته $\mathcal{S}$ بارتفاعه h.

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{S}h}$$



مثال

مخروط دوراني ارتفاعه $h = 4$ cm ونصف قطر قاعدته $r = 1.5$ cm،

حجمه:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}(\pi r^2)h = \frac{1}{3}(\pi \times 1.5^2) \times 4 = 3\pi$$

فحجم هذا المخروط يساوي $3\pi \text{ cm}^3$.

تحقّق من فهمك

① احسب حجم هرم ارتفاعه 15 cm، وقاعدته مربع طول ضلعه 12 cm.

② مخروط دوراني ارتفاعه 12 cm وطول قطر قاعدته 20 cm. احسب مساحة القاعدة وحجمه.

تدرّبْ

① احسب، في كل حالة، محيط ومساحة الشكل.

❶ مربع طول ضلعه $6\ \text{cm}$.

❷ مستطيل بعداه $3\ \text{cm}$ و $4\ \text{cm}$.

❸ مثلث ABC قائم في A و $AB = 4\ \text{cm}$ و $AC = 3\ \text{cm}$ و $BC = 5\ \text{cm}$.

② $[AH]$ و $[BK]$ ارتفاعان في المثلث ABC. احسب مساحة هذا المثلث في كل من الحالتين:

❶ $AB = 5\ \text{cm}$ و $AC = 6\ \text{cm}$ و $BK = 3\ \text{cm}$.

❷ $AB = 13\ \text{cm}$ و $AH = 12\ \text{cm}$ و $BC = 15\ \text{cm}$.

③ أسطوانة دورانية، ارتفاعها $h = 10\ \text{dm}$ ونصف قطر قاعدتها $r = 3\ \text{dm}$.

❶ احسب محيط قاعدة الأسطوانة.

❷ احسب مساحة قاعدة الأسطوانة.

❸ احسب حجم الأسطوانة.

④ احسب حجم ومساحة سطح مكعب طول حرفه $6\ \text{cm}$.

⑤ احسب المساحة الجانبيَّة لموشور قائم قاعدته مثلَّث أطوال أضلاعه $12\ \text{cm}$، $10\ \text{cm}$، $8\ \text{cm}$ وارتفاعه $14\ \text{cm}$.

⑥ وعاء بهيئة مخروط دوراني، ارتفاعه $OE = 100\ \text{mm}$ ونصف قطر قاعدته $OM = 50\ \text{mm}$. احسب حجم هذا الوعاء.

⑦ هرم ارتفاعه $36\ \text{m}$ وحجمه $156\ \text{m}^3$. ما مساحة قاعدته؟

⑧ احسب مساحة السَّطح الجانبيّ لأسطوانة دورانية محيط قاعدتها $12\ \text{cm}$ وارتفاعها $22\ \text{cm}$.

⑨ احسب حجم ومساحة سطح متوازي المستطيلات أبعاده $5\ \text{cm}$ و $4\ \text{cm}$ و $3\ \text{cm}$.

⑩ احسب حجم هرم ارتفاعه $21\ \text{cm}$، وقاعدته MNP مثلث قائم في M وفيه $MN = 15\ \text{cm}$ و $NP = 25\ \text{cm}$.

4

الكرة

نشاط « استنتاج مساحة سطح الكرة وحجمها»


كرة قدم


كرة بلياردو

كرة القدم: شكل كروي مجوَّف، له في الرياضيات شكل سطح كروي.

كرة البلياردو: شكل كروي مليء، له في الرياضيات شكل مجسم كروي.

1. مساحة كرة، حجم كرة

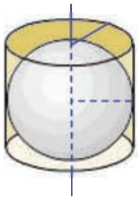
نُقش على مدفن أرخميدس الشكل المرسوم جانباً، وهو عبارة عن أسطوانة بداخلها كرة تمس قاعدتيها وجوانبها.

1. مساحة كرة

① احسب ارتفاع الأسطوانة ونصف قطر قاعدتها بدلالة R نصف قطر الكرة.

② احسب مساحة السطح الجانبي للأسطوانة بدلالة R.

③ دوَّن أرخميدس النص الآتي « مساحة سطح هذه الكرة تساوي مساحة السطح الجانبي للأسطوانة التي تحوي الكرة». استفد من مقولة أرخميدس لكتابة مساحة سطح الكرة بدلالة R ولتكن S.



2. حجم كرة

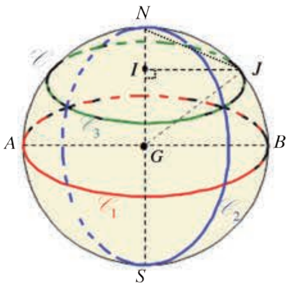
① احسب حجم الأسطوانة بدلالة R.

② كما دوَّن أرخميدس النص «حجم تلك الكرة يساوي ثُلثي حجم الأسطوانة التي تحوي الكرة».

استفد من مقولة أرخميدس لكتابة حجم الكرة بدلالة R وليكن هذا الحجم $\mathcal{V}$.

2. دوائر على سطح كروي

الشكل المرافق تمثيل لسطح كروي مركزه G ونصف قطره 2.5 cm. $[NS]$ و $[AB]$ اثنان من أقطاره.



الدوائر: $\mathscr{C}$ (بالأسود ومركزها G) و $\mathscr{C}_1$ (بالأحمر ومركزها G) و $\mathscr{C}_2$ (بالأزرق ومركزها G) و $\mathscr{C}_3$ (بالأخضر ومركزها I) مرسومة على هذا السطح.

1. أيّ الدوائر الأربع تمتلك أصغر نصف قطر؟

2. نسمي كلاً من الدوائر $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}_1$ و $\mathscr{C}_2$ المشتركة بالمركز G، دائرة كبرى في السطح الكروي. ما طول نصف قطر كلٍّ منها؟

3. I نقطة من $[NS]$ تُحقّق $IN = 1.5\text{ cm}$. احسب طول نصف قطر الدائرة $\mathscr{C}_3$.

تعلّمْ

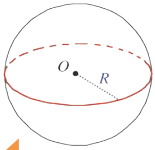
سطوح كروية (كرات)

السطح الكروي ذو المركز O ونصف القطر R هو مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM = R$.

مجسمات كروية

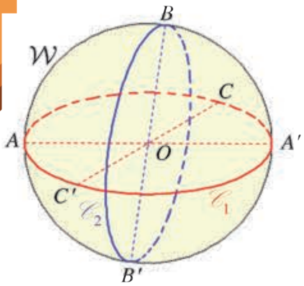
المجسم الكروي ذات المركز O ونصف القطر R هي مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق $OM \leq R$.

دساتير



- دستور حساب مساحة سطح كرة بدلالة نصف قطرها R: $S = 4\pi R^2$.
- دستور حساب حجم الكرة بدلالة نصف قطرها R: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

خطوط مميزة



- **قطر** الكرة W هو قطعة مستقيمة منتصفها مركز الكرة O وطرفاها نقطتان من الكرة.
- أقطار الكرة لها الطول ذاته وهو $2R$. يسمى هذا الطول أيضاً قطر الكرة.
- **الدائرة الكبرى** هي دائرة واقعة على الكرة وقطرها يساوي قطر الكرة.
- في الشكل المرافق: $[AA']$ و $[BB']$ و $[CC']$ **أقطار** في الكرة W.

النقطتان A و A' متقابلتان قطرياً، كذلك النقطتان B و B' متقابلتان قطرياً والنقطتان C و C' متقابلتان قطرياً أيضاً. $\mathscr{C}_1$ دائرة كبرى و $\mathscr{C}_2$ دائرة كبرى.

اكتساب معارف

كيف نحسب مساحة سطح كروي (مساحة كرة)؟

مثال كرة قطرها $60\ \text{cm}$. احسب مساحة سطحها بالسنتيمترات المربعة.

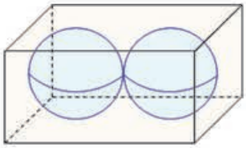
الحلّ

علينا بدايةً حساب نصف قطر الكرة كي نستعمل دستور مساحة سطح كروي. **نصف قطر الكرة** $R = \frac{60}{2} = 30\ \text{cm}$. ودستور **مساحة سطح كروي هو** $S = 4\pi \times R^2$، إذن:

$$S = 4\pi \times 30^2 = 3\ 600\pi\ \text{cm}^2$$

كيف نحسب حجم كرة؟

مثال علبة بشكل متوازي المستطيلات، أبعادها 4 cm، 4 cm، 8 cm.



تحوي هذه العلبة كرتين متساويتين نصف قطر كلٍّ منهما 2 cm تمسان أوجه العلبة (كما ترى في الشكل المرافق) احسب حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة.

الحل

- نعلم أنَّ حجم متوازي المستطيلات يساوي جداء ضرب أبعاده الثلاثة، فإذا رمزنا إلى حجم العلبة بالرمز $\mathcal{V}$، كان $\mathcal{V} = 4 \times 4 \times 8 = 128\ \text{cm}^3$.

نرمز إلى حجم إحدى الكرتين بالرمز $\mathcal{V}'$، وحسب دستور حجم الكرة $\mathcal{V}' = \frac{4}{3}\pi \times R^3$، يكون:

$$\mathcal{V}' = \frac{4}{3}\pi \times 2^3\ \text{cm}^3 = \frac{32}{3}\pi\ \text{cm}^3.$$

- حجم الفراغ المحصور بين الكرتين والعلبة هو $\mathcal{V} - 2\mathcal{V}'$.

$$\mathcal{V} - 2\mathcal{V}' = 128 - \frac{64}{3}\pi = (128 - \frac{64}{3}\pi)\ \text{cm}^3.$$

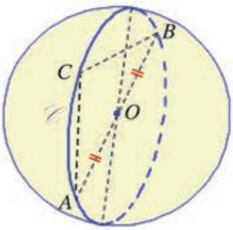
تحقّق من فهمك

① احسب مساحة سطح كروي نصف قطره 7.5 cm.

② احسب حجم كرة نصف قطرها 24 m.

تدرّب

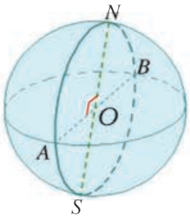
① $\mathcal{W}$ هي الكرة التي مركزها O ونصف قطرها 5 cm. A و B و C و D نقاط من الفراغ تحقق $OA = 3$ cm و $OB = 5$ cm و $OC = 7$ cm و $BD = 16$ cm. ما وضع كلٍّ من تلك النقاط بالنسبة إلى الكرة $\mathcal{W}$؟



② A و B نقطتان متقابلتان قطرياً على سطح كروي $\mathcal{W}$ مركزه O ونصف قطره 2.5 cm، C نقطة من الدائرة الكبرى $\mathscr{C}$ المارة بالنقطتين A و B مع العلم أن $AC = 4$ cm.

1. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ بأبعادها التامة وضَع عليها النقاط A و B و C.

2. ما طبيعة المثلث ABC؟ احسب الطول BC.



③ سطح كروي مركزه O ونصف قطره $5\ cm$. $[AB]$ و $[NS]$ قطران متعامدان في هذا السطح .

1. ما طبيعة الرباعي $ANBS$ ؟
2. ارسم $ANBS$ بأبعاده التامة.

④ حساب حجم كرة بدلالة قطرها

كرة قطرها d.

1. أثبت أنَّ حجم هذه الكرة $\mathcal{V}$ يُعطى بالقانون $\mathcal{V} = \frac{1}{6}\pi d^3$.
2. احسب بدلالة d مساحة سطح هذه الكرة.

⑤ مخروط ، أسطوانة ، كرة

لدينا مخروط C وأسطوانة A وكرة S نصف قطر الكرة R يساوي نصف قطر قاعدة المخروط ويساوي نصف قطر قاعدة الأسطوانة. ارتفاع المخروط $2R$ يساوي ارتفاع الأسطوانة.

1. احسب بدلالة R القيمة التامة لحجم كل من هذه المجسمات.
2. جد علاقة بين حجوم هذه المجسمات.

⑥ عددان متساويان

كرة S نصف قطرها R سنتيمتر. كم يجب أن تكون قيمة R ليكون العدد الدال على حجم هذه الكرة مساوياً العدد الدال على مساحة سطح هذه الكرة ؟

⑦ حجم الكرة الأرضية

سنعتبر في هذه المسألة أنَّ نصف قطر الكرة الأرضية يساوي $6400\ km$.

1. احسب حجم الكرة الأرضية بالكيلومترات المكعبة.
2. الشمس هي الأخرى مجسم كروي نصف قطرها يساوي 109 أمثال نصف قطر الكرة الأرضية.

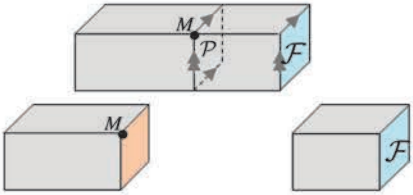
انسخ وأكمل: « حجم الشمس يساوي ...... أمثال حجم الأرض »

4

3 مقاطع مجسّمات

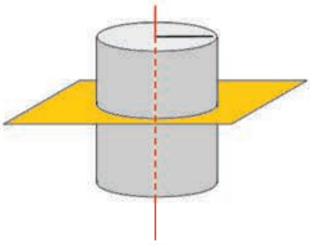
نشاط «مقاطع مجسّمات شهيرة»

- مقطع مجسم بمستوٍ هو مجموعة النقاط المشتركة بين المجسم والمستوي.
- عند الرسم الفراغي يمكن أن تبدو الأطوال والزوايا غير حقيقية مثلاً يظهر أحياناً المربع في الرسم الفراغي وكأنه متوازي الأضلاع. لذلك يكون من المناسب رسم هذا الشكل جانباً بأبعاده التامة.



1. مقطع يوازي وجه في متوازي المستطيلات

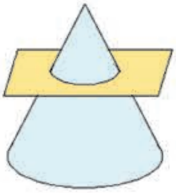
السطح الملون بالأحمر هو مقطع لمتوازي المستطيلات بمستوٍ $\mathcal{P}$ يمر بالنقطة M ويوازي الوجه $\mathcal{F}$ الملون بالأزرق.



2. مقطع يوازي قاعدة أسطوانة دورانية

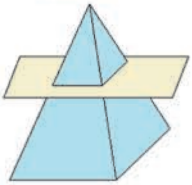
نقطع أسطوانة دورانية نصف قطر قاعدتها 4 cm بمستوٍ يوازي قاعدتها.

- ما طبيعة المقطع؟ ارسم هذا المقطع.
- هذا المقطع يعامد محور الأسطوانة.



3. مقطع مخروط دوراني بمستوٍ يوازي قاعدته

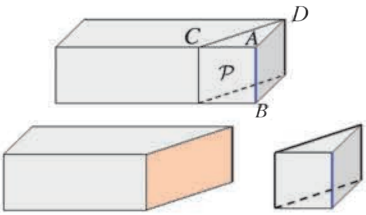
تجد في الشكل المرافق مستوياً يقطع مخروطاً ويوازي مستوي قاعدته. بأية هيئة يبدو لك المقطع؟



4. مقطع هرم بمستوٍ يوازي قاعدته

تجد في الشكل المرافق مستوياً يقطع هرماً منتظماً قاعدته مربع بمستوٍ يوازي مستوي قاعدته.

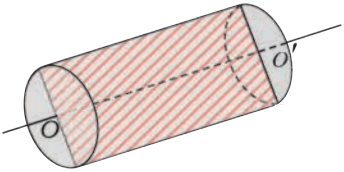
بأية هيئة يبدو لك المقطع؟



5. مقطع يوازي حرف في متوازي المستطيلات

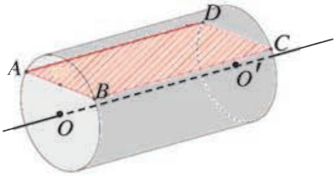
السطح الملون بالأحمر هو مقطع لمتوازي المستطيلات بمستوٍ $\mathcal{P}$ يحوي القطعة المستقيمة $[CD]$ ويوازي الحرف $[AB]$.

6. مقطع يوازي محور أسطوانة



قرصا قاعدتي أسطوانة دورانية مركزاهما O و O' ونصف قطر كلٍّ منهما $3\ \text{cm}$. ارتفاع هذه الأسطوانة $OO' = 6\ \text{cm}$.

A و B نقطتان من القاعدة التي مركزها O حيث $AB = 4\ \text{cm}$.



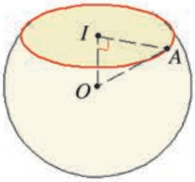
نقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ $(\mathcal{P})$ يوازي محورها (OO').

ما طبيعة المقطع؟ وما الأبعاد التامة لهذا المقطع في كلٍّ من الحالتين:

① المستوي $(\mathcal{P})$ يمر بالنقطة O.

② المستوي $(\mathcal{P})$ يمر بالنقطتين A و B.

7. مقطع سطح كروي بمستوٍ



كرة تنس (جوفاء) نصف قطرها $2\ \text{cm}$. قُطعت هذه الكرة بمستوٍ يمر بنقطة I على بعد $1.2\ \text{cm}$ عن مركزها O.

1. كيف يبدو لك مقطع الكرة بذلك المستوي؟

2. لتكن A نقطة من المقطع.

① ما طول $[OA]$ ؟

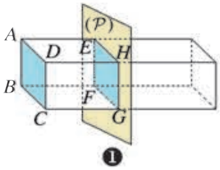
② استعمل مبرهنة فيثاغورث في المثلث OIA القائم في I لحساب الطول IA.

3. استنتج طبيعة هذا المقطع.

4

تعلّم

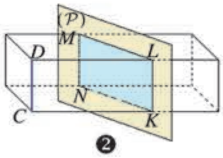
مقطع متوازي المستطيلات بمستوٍ



❶

① مقطع متوازي المستطيلات بمستوٍ **يوازي أحد أوجهه** هو **مستطيل يطابق ذلك الوجه.**

في الشكل ❶، مقطع متوازي المستطيلات بالمستوي $(\mathcal{P})$ الموازي للوجه $ABCD$ هو المستطيل $EFGH$. ويكون $EF = AB$ و $EH = AD$.

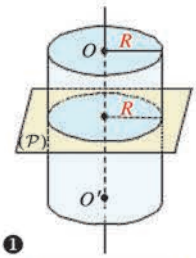


❷

② مقطع متوازي المستطيلات بمستوٍ **يوازي أحد أحرفه** هو **مستطيل أحد بعديه يساوي ذلك الحرف.**

في الشكل ❷، مقطع متوازي المستطيلات بالمستوي $(\mathcal{P})$ الموازي للحرف CD هو المستطيل $MNKL$. ويكون $KL = NM = CD$.

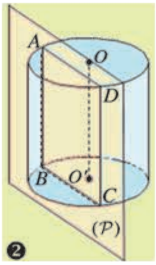
مقطع أسطوانة دورانية بمستوٍ



❶

• مقطع أسطوانة دورانية بمستوٍ **يوازي قاعدتها أو يعامد محورها** هو **دائرة تطابق القاعدة.** (الشكل ❶)

في الشكل ❶، محور الأسطوانة هو (OO') ونصف قطر قاعدتها R. مقطع الأسطوانة بالمستوي $(\mathcal{P})$ الموازي لمستوي القاعدة هو دائرة مركزها على (OO') ونصف قطرها R.

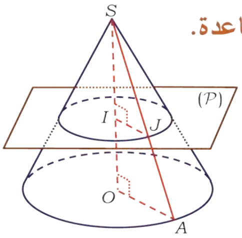


❷

• مقطع أسطوانة دورانية بمستوٍ **يوازي محورها** هو **مستطيل أحد بعديه يساوي ارتفاع الأسطوانة.** (الشكل ❷)

في الشكل ❷، محور الأسطوانة هو (OO'). مقطع الأسطوانة بالمستوي $(\mathcal{P})$ الموازي لمحور الأسطوانة هو المستطيل $ABCD$، $AB = CD = OO'$

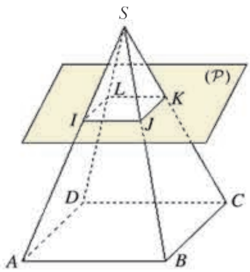
مقطع مخروط دوراني بمستوٍ



• مقطع مخروط دوراني بمستوٍ **يوازي قاعدته** هو **دائرة مصغرة عن دائرة القاعدة.**

في الشكل المرافق، مخروط ومستوٍ $(\mathcal{P})$ يوازي قاعدته ويقطع ارتفاعه $[SO]$ في I وأحد مولداته $[SA]$ في J. المقطع هو دائرة مركزها I ونصف قطرها IJ. بحسب مبرهنة تالس تكون نسبة تصغيرها عن دائرة القاعدة تساوي $\dfrac{SJ}{SA} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{IJ}{OA}$.

مقطع هرم بمستوٍ

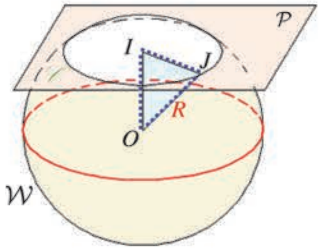


• مقطع هرم بمستوٍ **يوازي قاعدته** هو **تصغير للقاعدة.**

• أضلاع المقطع توازي مقابلاتها في القاعدة.

في الشكل المرافق، هرمٌ رأسه S وقاعدته المربع $ABCD$. المستوي $(\mathcal{P})$ يوازي قاعدته. مقطع الهرم بهذا المستوي هو المربع $IJKL$. ونسمي $ABCD - IJKL$ جذع الهرم. نسبة التصغير تساوي $\dfrac{SI}{SA} = \dfrac{SJ}{SB} = \dfrac{IJ}{AB} = \cdots$.

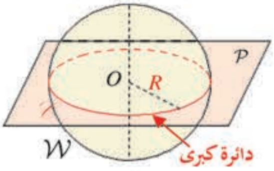
مقطع كرة بمستوٍ



- مقطع كرة بمستوٍ هو دائرة.
- مقطع مجسّم كروي بمستوٍ هو قرص دائري.

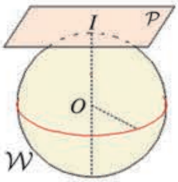
في الشكل المرافق، المستوي $\mathcal{P}$ يقطع السطح الكروي $\mathcal{W}$. النقطة I مركز الدائرة المقطع $\mathcal{C}$ هي نقطة تقاطع المستوي $\mathcal{P}$ والمستقيم العمودي عليه من النقطة O مركز الكرة. OI هو بعد مركز الكرة عن المستوي $\mathcal{P}$. ويكون نصف قطر الكرة $R = OJ$.

حالات خاصة



❶

① عندما يمر المستوي القاطع $\mathcal{P}$ بمركز الكرة O، المقطع هو دائرة كبرى $\mathcal{C}$. كما في الشكل ❶.



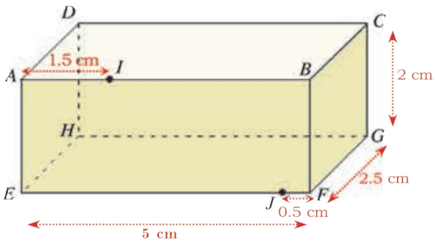
❷

② عندما يمس المستوي $\mathcal{P}$ الكرة ، المقطع هو النقطة. كما في الشكل ❷.

اكتساب معارف

كيف نرسم بالقيم التامة للأطوال؟

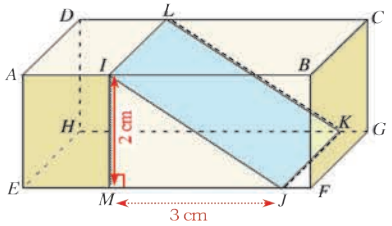
مثال $ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات و $EF = 5\text{ cm}$ و $FG = 2.5\text{ cm}$ و $GC = 2\text{ cm}$.



I نقطة من $[AB]$ تحقق $AI = 1.5\text{ cm}$. J نقطة من $[EF]$ تحقق $FJ = 0.5\text{ cm}$. قُطِع هذا المجسم بمستوٍ مارٍ بالنقطتين I و J ومواز للحرف $[BC]$.

1. ما طبيعة المقطع؟
2. ارسم المقطع بأبعاده التامة.

الحلّ

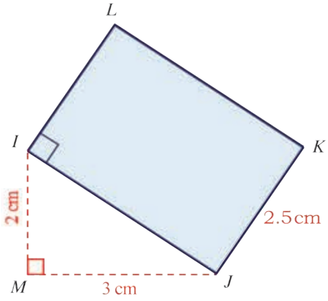


1. مقطع المجسم بمستوٍ مارٍ بالنقطتين I و J موازٍ للحرف $[BC]$ هو مستطيل $IJKL$. ويكون

$$IL = BC = FG = 2.5 \text{ cm}$$

2. نرمز إلى مسقط I على $[EF]$ بالرمز M ، فيكون $[IJ]$ وتراً في المثلث IMJ القائم في M . لدينا $IM = AE = 2 \text{ cm}$ و

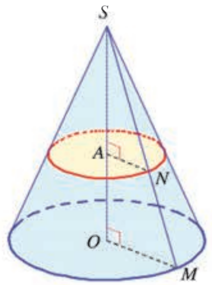
$$MJ = EF - (EM + JF) = 5 - (1.5 + 0.5) = 3 \text{ cm}$$



• نرسم المثلث IMJ القائم في M ، ثم نرسم على وتره وخارجه المستطيل $IJKL$ بحيث يكون طول $[JK]$ مساوياً 2.5 cm .

كيف نحسب مساحة مقطع مخروط؟

مثال مخروط دوراني رأسه S وقاعدته قرص دائري مركزه O وارتفاع المخروط $SO = 10 \text{ cm}$ ونصف قطر قاعدته $OM = 4 \text{ cm}$.
A نقطة من $[SO]$ تحقق $SA = 6 \text{ cm}$. المستوي $(\mathcal{P})$ المار بالنقطة A موازياً قاعدة المخروط يقطع أحد مولداته $[SM]$ في النقطة N .
احسب مساحة مقطع المخروط بالمستوي $(\mathcal{P})$.



الحلّ:

• المقطع هو تصغير لقاعدة المخروط، ونسبة التصغير: $k = \dfrac{SA}{SO}$ أي $k = \dfrac{6}{10} = 0.6$.

• نرمز إلى مساحة قاعدة المخروط بالرمز S ، وإلى مساحة المقطع بالرمز S' ، فيكون $S' = 0.6^2 S$.
ولكن $S = \pi \times OM^2 = \pi \times 4^2 = 16\pi \text{ cm}^2$ إذن $S' = 0.6^2 \times 16\pi = 5.76\pi \text{ cm}^2$.

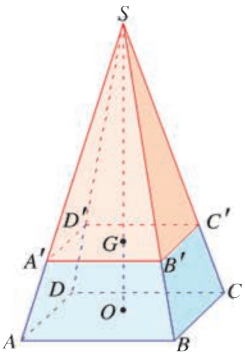
يمكن اتباع طريقة ثانية، بأن نحسب نصف قطر دائرة المقطع:

$R' = AN = k \times OM = 0.6 \times 4 = 2.4 \text{ cm}$ ،

إذن $S' = \pi R'^2 = \pi \times 2.4^2 = 5.76\pi \text{ cm}^2$

كيف نحسب حجم جذع هرم ؟

مثال $SABCD$ هرم منتظم رأسه S وقاعدته $ABCD$ مربع طول ضلعه $6\ cm$. ارتفاع الهرم $SO = 12\ cm$. G نقطة من ارتفاعه $[SO]$ تحقق $SG = 9\ cm$. مقطع الهرم بالمستوي المار بالنقطة G موازياً مستوي قاعدة الهرم هو المربع $A'B'C'D'$



1. احسب $\mathcal{V}_1$ حجم الهرم $SABCD$.
2. احسب $\mathcal{V}_2$ حجم الهرم $SA'B'C'D'$. ثم استنتج $\mathcal{V}$ حجم جذع الهرم $ABCD - A'B'C'D'$.
3. تحقق من حساباتك باستعمال الدستور

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}h(\mathcal{S} + \mathcal{S}' + \sqrt{\mathcal{S} \times \mathcal{S}'})\ (*).$$

(h ارتفاع الجذع، $\mathcal{S}$ و $\mathcal{S}'$ مساحتا قاعدتيه)

الحلّ

1. حجم الهرم $SABCD$ يعطى بالقانون $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3}\mathcal{S}h$ (1). لدينا $h = SO = 12$ و وقاعدته $ABCD$ مربع فمساحته $\mathcal{S} = AB^2 = 6^2 = 36$ إذن

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3}\mathcal{S}h = \frac{1}{3} \times 36 \times 12 = 144\ cm^3.$$

2. • الهرم $SA'B'C'D'$ تصغير للهرم $SABCD$ بنسبة $k = \frac{SG}{SO} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$. فيكون حجمه $\mathcal{V}_2 = k^3 \times \mathcal{V}_1$، أي

$$\mathcal{V}_2 = (\frac{3}{4})^3 \times 144 = \frac{27}{64} \times 144 = 60.75\ cm^3.$$

• حجم جذع الهرم هو الفرق بين حجمي الهرمين $SABCD$ و $SA'B'C'D'$، أي:

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = 144 - 60.75 = 83.25\ cm^3.$$

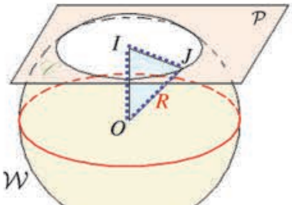
3. ارتفاع جذع الهرم هو $h = GO = SO - SG = 12 - 9 = 3\ cm$، ولدينا $\mathcal{S} = 36\ cm^2$ و $\mathcal{S}' = k^2 \times \mathcal{S} = \frac{9}{16} \times 36 = 20.25\ \ cm^2$.

بالتعويض في الدستور $(*)$ نحصل على:

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \tfrac{1}{3} \times 3 \times (36 + 20.25 + \sqrt{36 \times 20.25}) \\ &= 56.25 + 6 \times 4.5 = 56.25 + 27 \\ &= 83.25\ cm^3\end{aligned}$$

يمكن اتباع طريقة ثانية لحساب $\mathcal{S}'$، بأن نحسب طول ضلع المربع المقطع:
$A'B' = k \times AB = \frac{3}{4} \times 6 = 4.5\ cm$، إذن $\mathcal{S}' = GA^2 = 4.5^2 = 20.25\ cm^2$. ثم نتابع.

كيف نحسب نصف قطر المقطع في كرة؟



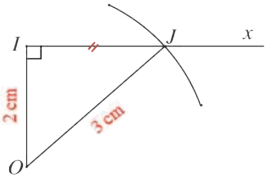
ليكن $\mathcal{W}$ سطحاً كروياً مركزه O ونصف قطره 3 cm. I نقطة تحقق $OI = 2\text{ cm}$. وليكن $(\mathcal{P})$ مستوياً يمر بالنقطة I ويعامد المستقيم (OI). ولتكن J نقطة مشتركة بين المستوي $(\mathcal{P})$ والسطح $\mathcal{W}$.

1. ارسم المثلث OIJ بقيم تامة للأطوال.

2. ارسم المقطع بأبعاده التامة.

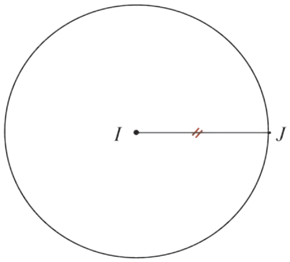
3. احسب نصف قطر المقطع.

الحلّ



1. نرسم:

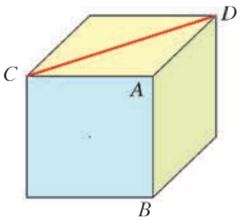
- القطعة $[OI]$ بطول 2 cm.
- نصف المستقيم $[Ix)$ عمودياً على $[OI]$.
- قوساً دائرية مركزها O ونصف قطرها 3 cm فيقطع $[Ix)$ في J.
- نرسم القطعة $[OJ]$، فنحصل على المثلث OIJ القائم في I بقيم تامة لأطوال أضلاعه: $OI = 2\text{ cm}$ و $OJ = 3\text{ cm}$.



2. نفتح الفرجار بفتحةِ $[IJ]$ ونرسم بهذه الفتحة دائرة مركزها I. الدائرة التي مركزها I ونصف قطرها IJ هي المقطع.

3. حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلث OIJ القائم في I: $IJ^2 + OI^2 = OJ^2$، أي $IJ^2 + 2^2 = 3^2$، إذن: $IJ^2 = 5$، ومنها $IJ = \sqrt{5}$.

تحقّق من فهمك

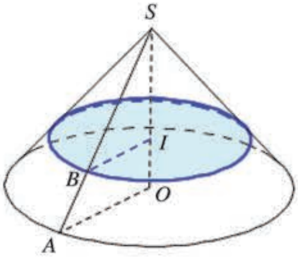


① في الشكل المرافق، ما طبيعة مقطع المكعب بمستوٍ:

① يوازي الوجه الملون بالأزرق؟

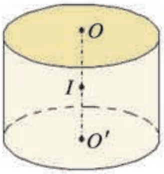
② يوازي الوجه الملون بالأخضر؟

③ يوازي الحرف $[AB]$ ويحوي القطعة $[CD]$؟



② مخروط دوراني رأسه S وارتفاعه 20cm. مركز قاعدته هو النقطة O ونصف قطرها 16cm. I نقطة من محوره $[SO]$ تحقق $SI = 14\text{ cm}$. قُطع المخروط بمستوٍ $(\mathcal{P})$ مارٍ بالنقطة I وموازٍ لمستوي قاعدته. احسب، بالسنتيمتر مربع، مساحة مقطع المخروط بالمستوي $(\mathcal{P})$.

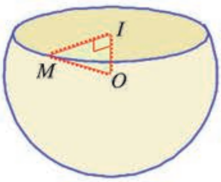
تدرّبْ



① في الشكل المرافق، O و O' هما مركزا قاعدتي الأسطوانة التي نصف قطر قاعدتها $R = 4$ cm وارتفاعها $OO' = 6$ cm. النقطة I هي منتصف القطعة $[OO']$. ارسم بقيم تامة مقطع هذه الأسطوانة:

① بمستوٍ يمر بالنقطة I ويوازي قاعدتها.

② بمستوٍ يحوي محورها (OO').



② $\mathcal{W}$ سطح كروي مركزه O ونصف قطره 5 cm. قُطع هذا السطح بمستوٍ على بعد 2 cm من O. مقطع $\mathcal{W}$ بهذا المستوي هو دائرة $\mathcal{C}$ مركزها I. M نقطة مشتركة بين السطح $\mathcal{W}$ والدائرة $\mathcal{C}$.

1. ارسم المثلث MOI بأبعاده التامة.

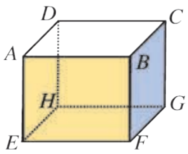
2. ارسم الدائرة $\mathcal{C}$ بأبعادها التامة.

3. احسب نصف قطر الدائرة $\mathcal{C}$.

4

تمرينات ومسائل

1 في كلّ حالة آتية، هناك إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات مقترحة. أشر إليها.



(1) ليكن متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$ الذي فيه $AB = 6\text{cm}$ و $AD = 4\text{cm}$ و $AE = 5\text{cm}$. مقطع هذا المجسم بمستوٍ يوازي الوجه $ABFE$ هو

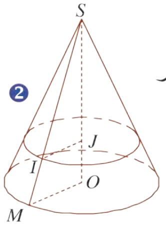
① مستطيل مساحته 24 cm^2.

② مستطيل مساحته 30 cm^2.

③ مستطيل مساحته 20 cm^2.

(2) أسطوانة دورانية، طول قطر قاعدتها 6 cm وارتفاعها 8 cm. مقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ يوازي قاعدتها هو

① دائرة مساحتها $9\pi \text{ cm}^2$ ② دائرة مساحتها $36\pi \text{ cm}^2$ ③ دائرة مساحتها 48 cm^2



(3) مخروط دوراني، نصف قطر قاعدته $OM = 20 \text{ cm}$، وارتفاعه $OS = 48 \text{ cm}$.
J نقطة من ارتفاعه $[OS]$ تحقق $SJ = 36 \text{ cm}$. مقطع هذا المخروط بمستوٍ يمر بالنقطة J ويوازي قاعدته هو قرص دائري نصف قطره JI يساوي

① 20 cm ② 15 cm ③ 10 cm

(4) في الفراغ، مجموعة النقاط التي مسافاتها متساوية وتساوي 5 cm عن نقطة ثابتة O، هي

① دائرة ② كرة ③ مجسم كروي

(5) كرة مركزها O ونصف قطرها 5 cm. M و N و P ثلاث نقاط تحقق $OM = 3 \text{ cm}$ و $ON = 5 \text{ cm}$ و $OP = 7 \text{ cm}$. النقطة التي تنتمي إلى الكرة هي

① M ② N ③ P

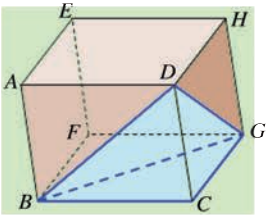
(6) كرة مركزها O وقطرها 8 cm. مقطع هذه الكرة بمستوٍ يبعد عن O بمقدار 4 cm هو

① دائرة نصف قطرها 3 cm ② قرص دائري نصف قطره 3 cm ③ نقطة

(7) كرة نصف قطرها 6 cm. حجمها يساوي

① $12\pi \text{ cm}^3$ ② $144\ \pi \text{ cm}^3$ ③ $288\pi \text{ cm}^3$

2 في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة على الأقل من بين ثلاث إجابات. أشر إلى كل إجابة صحيحة.



(1) $ABCDEFGH$ مكعب. مقطع الهرم $BCDG$ بمستوٍ يوازي الوجه $ABCD$ هو

① مربع

② مثلث قائم ومتساوي الساقين

③ تصغير للمثلث BCD

(2) القطعة المستقيمة $[AB]$ هي قطر في سطح كروي، إذن

① توجد على هذا السطح دائرة واحدة قطرها $[AB]$.

② دائرة قطرها $[AB]$ هي دائرة كبرى في هذا السطح .

③ A و B متقابلتان قطرياً.

(3) C و B نقطتان من سطح كروي مركزه A . النقطة I هي منتصف $[BC]$، إذن

① المستقيمان (AI) و (BC) متعامدان

② المستقيم (AI) هو محور القطعة $[BC]$

③ A و B متقابلتان قطرياً

3 قلْ إنْ كنت موافقاً أو غير موافق على الادّعاء الآتي واشرح رأيك.

(1) مقطع مكعب بمستوٍ يوازي أحد أحرفه يمكن أن يكون مربعاً.

(2) مقطع أسطوانة بمستوٍ يوازي محورها، يمكن أن يكون مربعاً.

(3) سطح كروي قطره $8\ \text{cm}$، يقطعه مستوٍ $(\mathcal{P})$ على مسافة $8\ \text{cm}$ من مركزه. $(\mathcal{P})$ مماس للكرة.

(4) نقطع مخروطاً بمستوٍ يوازي قاعدته، فكانت مساحة المقطع نصف مساحة قاعدة المخروط. نستنتج أنّ المستوي القاطع يقطع ارتفاع المخروط في منتصفه.

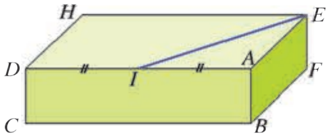
(5) نصف قطر كرة يساوي ثلاثة أمثال نصف قطر كرة أخرى، إذن مساحة سطح الكرة الكبرى تساوي ستة أمثال مساحة سطح الكرة الصغرى.

(6) بنقطةٍ M من كرة مركزها O، يمر مستقيم واحد عمودي على (OM).

(7) بنقطةٍ M من كرة مركزها O، يمر مستوٍ واحد عمودي على (OM).

4

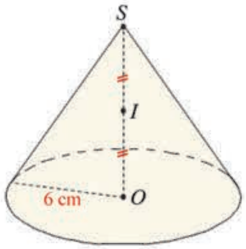
4 أبعاد متوازي المستطيلات في الشكل المرافق هي: $HE = 8\ cm$ و $BF = 3\ cm$ و $CD = 2\ cm$. النقطة I هي منتصف $[AD]$. نقطع هذا المجسم بمستوٍ يوازي الحرف $[AB]$ ويحوي القطعة $[IE]$.



1. احسب الطول IE.

2. ارسم المقطع بأبعاده التامة.

5 مخروط دوراني رأسه S ومركز قاعدته O ونصف قطرها $6\ cm$. ثمة مستوٍ يوازي قاعدة المخروط ويمر بالنقطة I منتصف $[SO]$. ارسم بقيم تامة مقطع هذا المخروط بهذا المستوي.



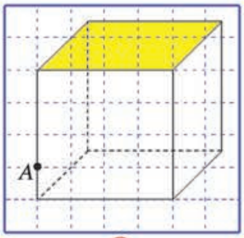
6 نقطع هرماً بمستوٍ يوازي قاعدته. ما طبيعة المقطع في كلٍ من الحالات الآتية:

① قاعدة الهرم مثلث متساوي الأضلاع.

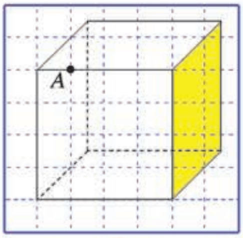
② قاعدة الهرم مثلث قائم.

③ قاعدة الهرم مربع.

7 في كلٍ من الحالتين ① و ②، ارسم المكعب، ثم ارسم مقطعه بمستوٍ يمر بالنقطة A ويوازي وجهه الملون بالأصفر.

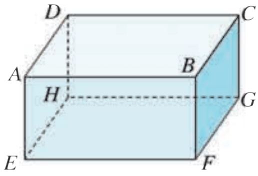


②



①

8 $ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات، أبعاده: $AE = 4\ cm$ و $EF = 8\ cm$ و $FG = 6\ cm$. احسب، في كل حالة، محيط ومساحة مقطع هذا المجسم:

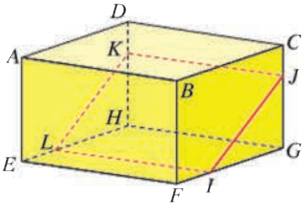


① بمستوٍ يوازي الوجه $ABCD$.

② بمستوٍ يوازي الوجه $ADHE$.

③ بمستوٍ يوازي الوجه $ABFE$.

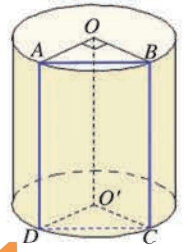
9 $ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات، فيه: $AE = 5\text{ cm}$ و $EF = 7\text{ cm}$ و $FG = 6\text{ cm}$. I نقطة من الحرف $[FG]$ تحقق $IG = 4\text{ cm}$. J نقطة من الحرف $[CG]$ تحقق $JG = 3.5\text{ cm}$. $IJKL$ مقطعٌ لهذا المجسّم بمستوٍ يوازي الحرف $[AB]$.



1. ما طبيعة المقطع $IJKL$ ؟ جد بعديه.

2. ارسم المقطع $IJKL$ بأبعاده التامة.

10 الشكل المرافق يمثّل أسطوانة دورانية ارتفاعها 7 cm ونصف قطر قاعدتها 3 cm ومركزا قاعدتها O و O'. $ABCD$ هو مقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ يوازي محورها $(O'O)$.

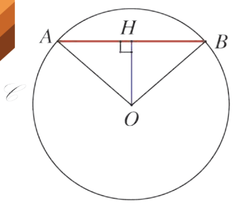


1. ما طبيعة هذا المقطع؟

2. نعلم أنَّ $\widehat{AOB} = 90^\circ$، ارسم هذا المقطع بأبعاده التامة.

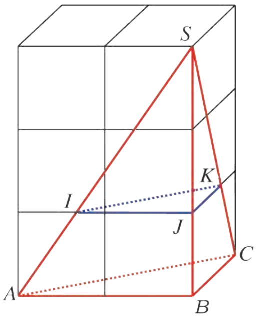
3. احسب الطول AB.

11 الشكل المرافق $\mathscr{C}$ قرص دائري يمثل قاعدة أسطوانة دورانية ارتفاعها 11cm. مركز هذه القاعدة هو النقطة O. H نقطة من $\mathscr{C}$ تحقق $OH = 6\text{ cm}$. $ABCD$ هو مقطع هذه الأسطوانة بمستوٍ يمر بالنقطة H ويوازي محور الأسطوانة. نعلم أنَّ $AB = 16\text{ cm}$، احسب نصف قطر قاعدة الأسطوانة.



12 قُطع مخروط دوراني، نصف قطر قاعدته 15cm، بمستوٍ يوازي قاعدته ويقسم ارتفاعه، بدءاً من رأس المخروط، بنسبة $\frac{1}{3}$. احسب، بالسنتيمترات المربعة، مساحة المقطع.

13 $SABC$ هرم رأسه S محتوى في ستة مكعبات طبوقة طول حرف كل منها 1 cm مرصوفة وفق الشكل المرافق. مقطع هذا الهرم بمستوٍ يوازي قاعدته هو المثلث IJK.



1. احسب حجم الهرم $SABC$.

2. احسب مساحة المثلث IJK.

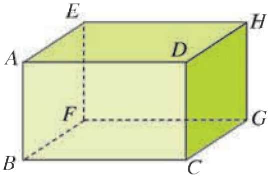
3. احسب حجم الهرم $SIJK$.

14 قطعنا هرماً منتظماً $SABCD$ بمستوٍ يوازي قاعدته، فوجدنا أنَّ المقطع هو مربع $EFGH$ مساحته تساوي $\frac{9}{25}$ من مساحة المربع $ABCD$.

1. المربّع $EFGH$ تصغيرٌ للمربع $ABCD$. ما نسبة هذا التصغير؟

2. نعلم أنَّ حجم الهرم $SABCD$ هو $125\ \text{cm}^3$. ما حجم الهرم $SEFGH$؟

15 $ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات، أبعاده: $AB = 5\ \text{cm}$ و $AD = 8\ \text{cm}$ و $AE = 6\ \text{cm}$. نقطع هذا المجسم بمستوٍ يحوي A و H ويوازي الحرف $[AB]$. احسب أبعاد المقطع.



16 مخروط دوراني، نصف قطر قاعدته $9\ \text{cm}$. قُطع بمستوٍ يوازي قاعدته وقطع ارتفاعه في نقطة تقسم الارتفاع بنسبة $\frac{2}{1}$ بدءاً من رأس المخروط. احسب مساحة المقطع.

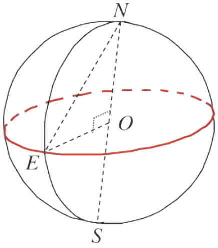
17 يدور قرص دائري (مركزه O ونصف قطره $5\ \text{cm}$) حول أحد أقطاره. صِف المجسم الحاصل.

18 **1.** ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A، طولا ضلعيه القائمتين $AB = 2\ \text{cm}$ و $AC = 4\ \text{cm}$.

2. ارسم الدائرة المارة برؤوس هذا المثلث.

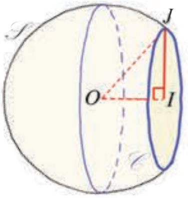
3. حول أي ضلع من أضلاع المثلث علينا أن ندور الشكل كي نحصل على سطح كروي؟

19 الشكل المرافق تمثيل للكرة الأرضية التي نصف قطرها $6\ 400\ \text{km}$. N و S يرمزان على التوالي إلى القطبين الشمالي والجنوبي. E نقطة من خط الاستواء.



احسب المسافة بين النقطتين N و E.

20 $\mathcal{W}$ سطح كروي مركزه O ونصف قطره 12 cm. قُطع هذا السطح بمستوٍ $(\mathcal{P})$، فكان المقطع الدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها I و نصف قطرها 8 cm. احسب المسافة OI.



21 احسب مساحة سطح كروي في كلٍ من الحالات الآتية:

① طول قطره 10 cm.

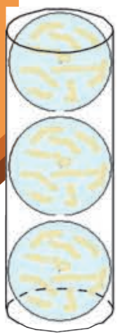
② محيط دائرة كبرى فيه $28\pi\text{ cm}$.

22 احسب حجم كرة في كلٍ من الحالات الآتية:

① طول قطرها 10 cm.

② طول دائرة كبرى فيها $14\pi\text{ cm}$.

③ مساحة دائرة كبرى فيها $36\pi\text{ cm}^2$.



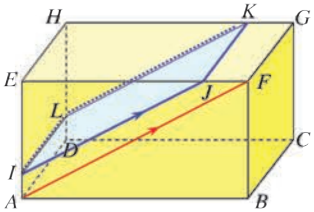
23 في الشكل المرافق، الدحلات الثلاث متماسة وتمس السطح الجانبي للأنبوبة الأسطوانية التي نصف قطر قاعدتها يساوي 2.1 cm وارتفاعها يساوي 12.6 cm. كما أنَّ الكرة السفلى تمس قاعدة الأنبوبة والعليا تمس سطحها. احسب بالسنتيمتر المكعب حجم الفراغ بين الأنبوبة والدحل.

24 ربط المراحل

$ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات فيه $AB = 15\text{ cm}$ و $BC = 6\text{ cm}$ و $CG = 8\text{ cm}$. J نقطة من $[EF]$ تُحقق $EJ = 12\text{ cm}$. $IJKL$ هو مقطع $ABCDEFGH$ بمستوٍ يوازي الحرف $[FG]$ كما أنَّ (IJ) و (AF) متوازيان.

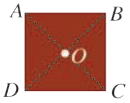
1. ما طبيعة المقطع $IJKL$ ؟ احسب مساحته.

2. احسب قياس الزاوية $\widehat{JIK}$ إلى أقرب درجة.



لإحراز تقدّم

25 جذع شجرة أسطواني ارتفاعه $6\ m$ وقاعدته قرص دائري مركزه O ونصف قطره $20\ cm$. نريد أن نفتح مجرىً في هذا الجذع بهيئة متوازي المستطيلات ارتفاعه $6\ m$ وقاعدته $ABCD$ مربع مركزه O وطول قطره $40\ cm$.



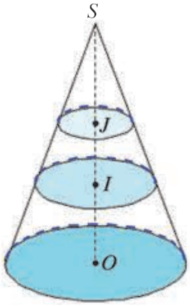
1. احسب القيمة التامة لحجم جذع الشجرة.

2. احسب مساحة المربع $ABCD$.

3. احسب حجم المجرى.

26 مخروط ومقاطع

في الشكل المرافق، $(\mathscr{C})$ مخروط رأسه S وقاعدته الدائرة التي مركزها O. قُطع هذا المخروط بمستويين يوازيان مستوي قاعدته. فكان المقطع بأحد المستويين الدائرة $\mathscr{C}_I$ التي مركزها I ونصف قطرها $8\ cm$، وبالمستوي الآخر، كان المقطع الدائرة $\mathscr{C}_J$ التي مركزها J ونصف قطرها $5\ cm$. نعلم أيضاً أنَّ $SJ = 15\ cm$ و $OI = 12\ cm$.



1. احسب الطول SI، ثم استنتج كلاً من JI و SO ارتفاع المخروط (C).

2. احسب نصف قطر قاعدة المخروط (C)، استنتج حجمه.

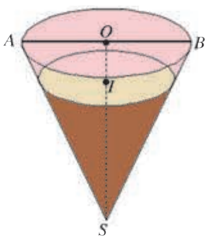
3. احسب حجم المخروط الذي قاعدته الدائرة التي مركزها J.

4. احسب حجم المخروط الذي قاعدته الدائرة التي مركزها I.

5. احسب حجم جذع المخروط الذي قاعدتاه الدائرتان $\mathscr{C}_I$ و $\mathscr{C}_J$.

27 قرن بوظة

قرن بوظة بهيئة مخروط دوراني $(\mathscr{C})$. ارتفاعه $SO = 12\ cm$ وقطر قاعدته $AB = 10\ cm$.



1. احسب باللترات سعة هذا القرن، واحسب طول المولد $[SA]$.

2. إذا كان $51.2\ \%$ من البوظة هي من الشوكولا ممثلة بالمخروط $(\mathscr{C}_1)$ الذي رأسه S وقاعدته الدائرة التي مركزها I والباقي من الفريز ممثلة بجذع المخروط الذي قاعدتاه الدائرتان اللتان مركزاهما I و O.

① احسب باللترات سعة المخروط $(\mathscr{C}_1)$.

② المخروط $(\mathscr{C}_1)$ تصغير للمخروط $(\mathscr{C})$ بنسبة k. اشرح لماذا $k^3 = 0.512$. تحقق من أنَّ $k = 0.8$.

③ استنتج كلاً من ارتفاع المخروط $(\mathscr{C}_1)$ ونصف قطر قاعدته.