الجُمهوريَّةُ العربيَّةُ السُّوريَّةُ
وزارة التَّربية والتَّعليم

الرّياضيّات

الهندسة

كتاب الطالب
الصفّ الأوّل الثّانوي

2025 - 2026 م
1447 هـ

طُبع أوَّل مرَّة للعام الدّراسيّ 2013 – 2014 م

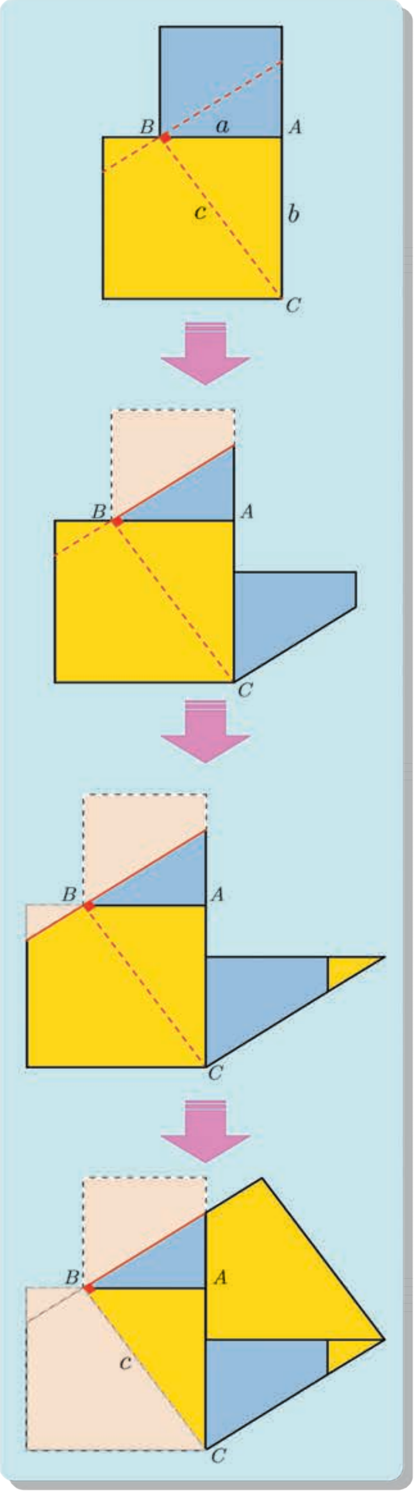
المحتوى

1 التحويلات الهندسيّة في المستوي

لقد كان كتابُ «عناصر الهندسة» لإقليدس (300 قبل الميلاد) واحداً من أهمِّ النصوصِ القديمةِ في الهندسة، حيثُ عرضَ فيه الهندسةَ انطلاقاً من موضوعاتٍ أساسية، وأطلقَ ما يُعرفُ اليومَ باسم الهندسةِ الإقليدية.

في القرن السّابع عشر، وقع تطوُّران أساسيّان في مجال الهندسة، الأوّل هو اختراع ديكارت **Descartes** وفِرما **Fermat** الهندسةَ التحليليّة، والثاني هو الدراسة المنهجية للهندسة الإسقاطيّة من قبل دوزارغ **Desargues**.

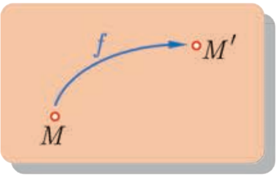
وفي نهاية القرن التّاسع عشر اقترح كلاين **Klein**، منهجيّةً جديدةً تنصّ على دراسة الهندسة انطلاقاً من التحويلات الهندسيّة، بدلاً من الأشكال. تأمّلِ الشّكلَ المجاورَ وانظرْ كيف تُبَرهَنُ مُبرهَنَةُ فيثاغورث في المثلّث القائمِ اعتماداً على الانسحابات، وعيّن عند الانتقال من شكل إلى الذي يليه الانسحابَ المطبّق والجزءَ من الشّكل الّذي طبّق عليه هذا الانسحاب.



التّحويلاتُ الهندسيّةُ في المستوي

1 التّحويلات المألوفة في المستوي

سنطلق في هذا الفصل تسمية **تحويل مألوف** على كلّ من التحويلات الهندسية الآتية : **التّناظر المحوريّ** (ويسمّى أيضاً انعكاساً) و**التّناظر المركزيّ** و**الانسحاب** و**الدوران**، ولقد مررتَ بها في دراستك السّابقة، لذلك نهدف في هذا الفصل إلى تثبيت الأفكار المتعلّقة بها.

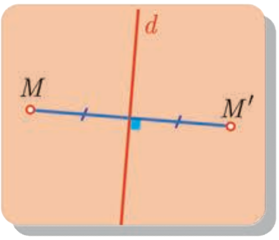


ليكن f تحويلاً مألوفاً في المستوي، يقرن هذا التّحويل بكل نقطةٍ M من المستوي نقطةً M' تسمّى صورةَ M وفق f. وبالعكس، تكون كلُّ نقطةٍ N في المستوي صورةَ نقطةٍ M وفق f. نرمز إلى هذا التّحويل بالرّمز $f : M \mapsto M'$ أو $M' = f(M)$.

التّناظرُ المحوريُّ (الانعكاس)

تعريف

ليكن d مستقيماً. **الانعكاس** S_d الذي محوره d هو التحويل الذي يقرن بنقطة M من المستوي النّقطة M' المعرّفة كما يأتي :



- إذا كانت M غيرَ واقعة على المستقيم d، كان d محورَ القطعةِ المستقيمة $[MM']$.
- وإذا كانت M واقعة على المستقيم d كان $M = M'$.

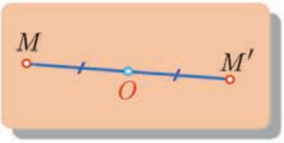
فكّر

- إذا كانت النّقطةُ M' صورةَ نقطة M وفق انعكاسٍ محوره d، فما هي صورةُ النّقطة M' وفق هذا الانعكاس ؟
- إذا كان Δ و Δ' مستقيمين متقاطعين في نقطةٍ I وكانا متناظرين بالنسبة إلى مستقيمٍ d، فلماذا تقع النّقطة I على المستقيم d ؟

عندما تكون صورة شكلٍ $\mathcal{F}$ وفق انعكاسٍ محوره d هي الشكل $\mathcal{F}$ نفسه، نقول إنّ d **محورُ تناظرٍ** لهذا الشكل.

التّناظرُ المركزيُّ

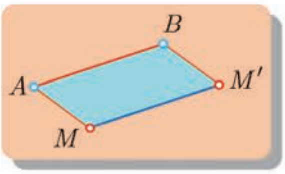
تعريف



لتكن O نقطة من المستوي، **التّناظر** S_O الذي مركزه O هو التّحويل الذي يقرن بنقطةٍ M من المستوي، مختلفة عن O، النّقطةَ M' التي تجعل النّقطة O منتصف القطعة المستقيمة $[MM']$.
صورة النّقطة O وفق هذا التناظر هي النّقطة O نفسُها.

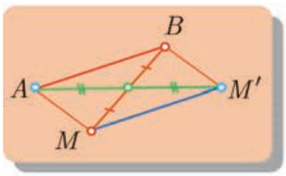
الانسحاب

تعريف



لتكن A و B نقطتين في المستوي، نعرّف **الانسحاب** $\mathcal{T}_{A\to B}$ بأنّه التّحويل الذي يقرن بنقطةٍ M من المستوي النّقطةَ M' التي تجعل الرباعي $AMM'B$ متوازي الأضلاع.

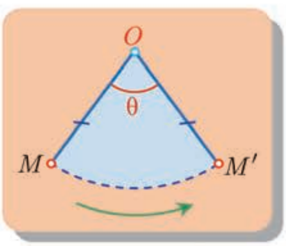
فكّر



في التعريف السابق افترضنا أنّ النّقاط A و B و M لا تقعُ على استقامة واحدة. يمكننا أن نضع تعريفاً يأخذ هذه الحالة في الحسبان بأن نقول أنّ M' هي نظيرة A وفق التّناظر المركزي بالنسبة إلى منتصف القطعة المستقيمة $[MB]$، علّل ذلك ؟

الدّورانُ

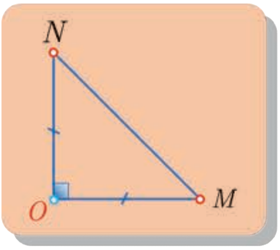
تعريف



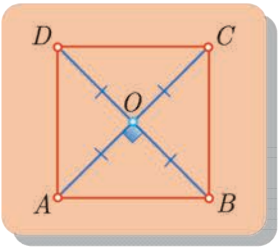
لتكن O نقطةً من المستوي، **الدّوران** $\mathcal{R}_{O,\theta}$ الذي مركزه O وزاويتُه θ هو التحويل الذي يقرن بنقطةٍ M من المستوي، مختلفة عن O، النّقطة M' التي تحقق : $OM' = OM$ و $\angle MOM' = \theta$.
وتكون صورة النّقطة O وفق هذا الدوران هي النّقطة O نفسها.

نسمّي الاتّجاه المبيّن في الشّكل اتّجاهاً مباشراً، نسمّي **ربع دورة** كلّ دوران زاويته $\pm 90°$.
يتوافقُ الاتجاه **المباشر** للدوران مع **عكس اتّجاه دوران عقارب السّاعة** $(\theta > 0)$. ويكون اتّجاه الدّوران غير مباشر إذا كان متّفقاً مع اتّجاه دوران عقارب السّاعة $(\theta < 0)$.

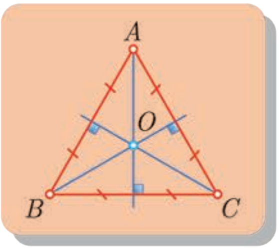
مثال



- إذا كانت النّقطة N هي صورة M وفق ربع دورة مركزها نقطة O، فإنّ MON هو مثلّث قائم الزاوية ومتساوي السّاقين رأسه O.



- في المربّع $ABCD$ الذي مركزه O :
  - ربع دورة مباشرة مركزها النّقطة A تنقل النّقطة B إلى D.
  - ربع دورة مباشرة مركزها النّقطة O تنقل النّقطة A إلى B.



- في المثلّث المتساوي الأضلاع ABC الذي مركزه O :
  - الدّوران الّذي مركزه النّقطة A وزاويته $60°$ بالاتّجاه المباشر ينقل النّقطة B إلى النّقطة C.
  - الدّوران الذي مركزه النّقطة O وزاويته $120°$ بالاتّجاه المباشر ينقل النّقطة B إلى النّقطة C أيضاً.

تدرّب

① عيّن المقولات الصحيحة فيما يأتي وعلل إجاباتك :

❶ للمثلّث المتساوي الأضلاع ثلاثة محاور تناظر.

❷ إذا كانت صورة نقطة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{I\to J}$ هي النّقطة C، كانت القطعتان المستقيمتان $[BJ]$ و $[IC]$ متناصفتين.

❸ إذا كانت $\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتين مركزاهما O و O' بالتّرتيب، ولهما نصف القطر نفسه وكانتا متقاطعتين في نقطتين A و B، كان المستقيمان (OO') و (AB) محوري تناظر للشّكل المكوّن من الدّائرتين.

❹ إذا كانت N صورة نقطة M وفق دورانٍ مركزه O وزاويته $60°$ كان المثلّث MON متساوي الأضلاع.

② ليكن ABC مثلّثاً قائماً في A، وليكن I منتصف القطعة $[BC]$. نرمز بالرّمز S_I إلى التّناظر الذي مركزه I.

❶ أنشئ صورة المثلّث ABC وفق التّحويل S_I.

❷ لتكن A' صورة A وفق S_I. ما طبيعة الرباعيّ $ABA'C$ ؟

② أثرُ التّحويلاتِ الهندسيّةِ على الأشكالِ المألوفة

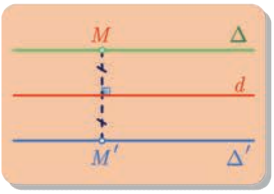
صورة مستقيم

بوجه عام صورة مستقيم وفق انعكاس أو تناظر مركزيّ أو انسحاب أو دوران هي أيضاً مستقيم.

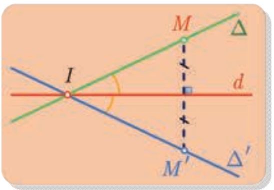
ويمكننا أن نكون أكثر تحديداً في بعض الحالات الخاصّة، كما نوضّح فيما يأتي :

① حالة الانعكاس أو التّناظر المحوريّ

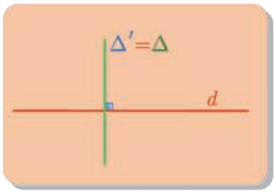
ليكن المستقيمُ Δ' صورةَ المستقيم Δ وفق الانعكاس S_d عندئذ نميّز الحالات الآتية :



- إذا كان $d \parallel \Delta$ كان $d \parallel \Delta'$ أيضاً.

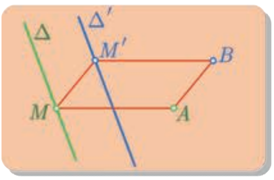


- وإذا تقاطع Δ مع d في I مرّ المستقيم Δ' من I أيضاً وكان d منصّف الزّاوية التي يصنعُها المستقيمان Δ و Δ'.

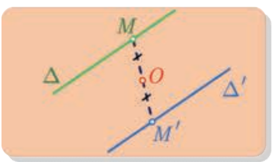


- وإذا كان $d \perp \Delta$ كان $\Delta' = \Delta$.

② حالة التّناظر المركزيّ أو الانسحاب

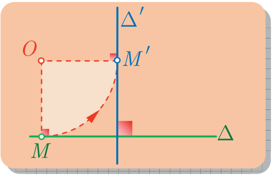


ليكن المستقيمُ Δ' صورةَ المستقيم Δ وفق الانسحاب $T_{A\to B}$ أو التّناظر المركزيّ S_O عندئذ يكون $\Delta' \parallel \Delta$.



في حالة التّناظر المركزيّ S_O، صورةُ مستقيم Δ مارٍّ بمركز التّناظر O هي المستقيمُ Δ نفسه.

③ حالة الدّوران بربع دورة



ليكن المستقيمُ Δ' صورةَ المستقيم Δ وفق الدّوران ربع دورة $\mathcal{R}$ حول O عندئذ يكون $\Delta' \perp \Delta$.

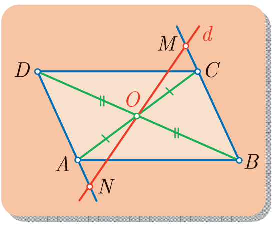
صورةُ دائرة، وصورةُ قطعة مستقيمة

- بوجهٍ عام، صورة دائرة $\mathcal{C}$ مركزها O، وفق انعكاس أو تناظر مركزيّ أو انسحاب أو دوران، هي دائرة $\mathcal{C}'$ لها نصفُ القطر نفسه ومركزها O' هو صورة O وفق التّحويل نفسه.
- صورة قطعة مستقيمة، وفق انعكاس أو تناظر مركزي أو انسحاب أو دوران، هي قطعة مستقيمة لها الطّول نفسه.

صورةُ نقطة تقاطع مستقيمين

ليكن d و Δ مستقيمين متقاطعين في M. وليكن d' و Δ' صورتي هذين المستقيمين بالتّرتيب وفق واحدٍ من التّحويلات المألوفة. عندئذ يتقاطع d' و Δ' في M' هي صورة النّقطة M وفق التّحويل نفسه.

مثال إثبات أنّ لقطعتين مستقيمتين الطّول نفسه



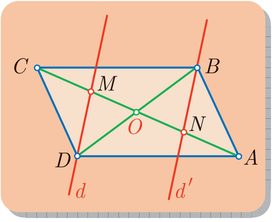
ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، وليكن d مستقيماً ماراً بالنّقطة O ويقطع (BC) في النّقطة M، ويقطع (AD) في النّقطة N. أثبت أنّ $CM = AN$.

لإثبات تَساوي طول قطعتين مستقيمتين، نبرهن أنّ إحداهما صورةُ الأخرى وفق تحويلٍ مألوف.

الحل

إنّ متوازي الأضلاع $ABCD$ وأقطاره شكلٌ نموذجيٌّ للتّناظر المركزيّ $\mathcal{S}_O$، ونعلم أنّ $\mathcal{S}_O(B) = D$ وأنّ $\mathcal{S}_O(C) = A$. نستنتج من ذلك أنّ صورةَ المستقيم (BC) هي المستقيمُ (AD).
ولمّا كان المستقيمَ d يمرّ بالنّقطة O فإنّ صورته وفق $\mathcal{S}_O$ هي المستقيم d نفسه.
النّقطة M هي نقطة تقاطع المستقيمين (BC) و d، ومن ثمّ تكون صورتها وفق $\mathcal{S}_O$ نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و d أي النّقطة N. ولمّا كان $\mathcal{S}_O(M) = N$ و $\mathcal{S}_O(C) = A$ كانت صورة القطعة المستقيمة $[CM]$ هي القطعة المستقيمة $[AN]$. إذن $CM = AN$.

مثال إثبات أنّ لقطعتين مستقيمتين الطّول نفسه



ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، وليكن d مستقيماً مارّاً بالنّقطة D ويقطع القطعة المستقيمة $[AC]$ في M، وليكن d' مستقيماً مارّاً بالنّقطة B موازياً للمستقيم d. المستقيم d' يقطع القطعة المستقيمة $[AC]$ في N.

❶ أثبت أنّ d' هو صورة d وفق التّناظر المركزيّ S_O الذي مركزه O.

❷ أثبت أنّ O هي منتصف القطعة المستقيمة $[MN]$.

إذا كان f انسحاباً أو تناظراً مركزيّاً وكان $f(G) = G'$ كانت صورةُ أيّ مستقيم d مارٍّ بالنّقطة G هي المستقيمُ الذي يمرّ بالنّقطة G' موازياً d.

الحل

❶ ليكن S_O التّناظر المركزيّ الذي مركزه O، نعلم أنّ $S_O(D) = B$، وعليه فإنّ صورة المستقيم d المارّ بالنّقطة D وفق S_O هي المستقيم المارّ بالنّقطة B موازياً للمستقيم d أي d'.

❷ نعلم أنّ صورة المستقيم (AC) المارّ بالنّقطة O وفق S_O هي المستقيم (AC) نفسه. النّقطة M هي نقطة تقاطع القطعة المستقيمة $[AC]$ مع المستقيم d، إذن صورة هذه النّقطة وفق S_O هي نقطة تقاطع المستقيم (AC) مع المستقيم d'، أيْ إنّها النّقطة N. ولمّا كانت N هي صورة M وفق تناظر مركزه O فإنّ المركز O يقع في منتصف القطعة المستقيمة $[MN]$.

تدرّب

① ليكن المثلّث ABC. أنشئ النّقطة C' صورة النّقطة C وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to B}$ أي الّذي ينقل A إلى B. لماذا تكون أيضاً النّقطة C' صورةَ النّقطة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to C}$؟

② ليكن ABC مثلّثاً متساوي الأضلاع. وليكن H المسقط القائم للنقطة A على القطعة المستقيمة $[BC]$. أنشئ صورة المثلّث ABC وفق الانسحاب الذي شعاعه $\mathcal{T}_{A\to H}$.

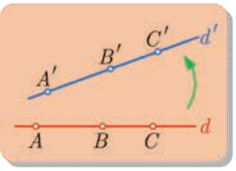
③ ليكن AOC مثلّثاً متساوي الأضلاع، طول ضلعه $2\,\text{cm}$. ولتكن B نظيرة النّقطة O بالنسبة إلى النّقطة A. أنشئ صورة المثلّث AOC وفق الانسحاب الذي شعاعه $\mathcal{T}_{B\to C}$.

④ لتكن $\mathcal{C}$ دائرة مركزها O، وليكن d مستقيماً مماسّاً لها في النّقطة A. أنشئ الدّائرة $\mathcal{C}'$ صورة $\mathcal{C}$ وفق الانعكاس الّذي محوره d.

③ الخواصُّ المشتركةُ للتّحويلاتِ المألوفة

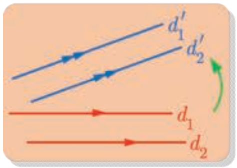
تشترك التّحويلات المألوفة من الانعكاس والتّناظر المركزيّ والانسحاب والدّوران بالخواصّ الآتية :

① المحافظة على خاصّة الوقوع على استقامةٍ واحدة



صورة مستقيم هي مستقيم أيضاً، فإذا كانت A و B و C ثلاث نقاط واقعة على استقامة واحدة وقعت صورها A' و B' و C' أيضاً على استقامة واحدة.

② المحافظة على توازي المستقيمات

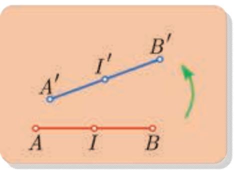


إذا كان المستقيمان d_1 و d_2 متوازيين، كانت صورتاهما d_1' و d_2' متوازيتين. ينتج من ذلك أنّ صورة متوازي الأضلاع هي أيضاً متوازي الأضلاع.

③ المحافظة على المسافات والمساحات

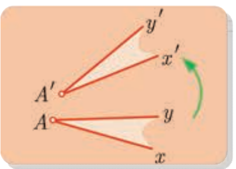
- صورة مثلّث هي مثلّث طبوق عليه.
- صورة منطقة $\mathcal{D}$ هي منطقة $\mathcal{D}'$ لها المساحة نفسها.

④ المحافظة على منتصف قطعة مستقيمة



لتكن $[AB]$ قطعة مستقيمة، ولتكن $[A'B']$ صورة هذه القطعة وفق تحويل مألوف. عندئذ تكون صورة النّقطة I منتصف $[AB]$ هي النّقطة I' منتصف القطعة المستقيمة $[A'B']$.

⑤ المحافظة على قياس الزّوايا

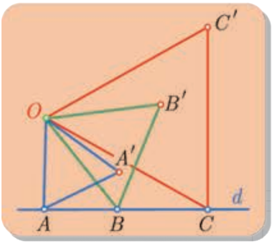


قياس زاوية $\widehat{xAy}$ يساوي قياس صورتها $\widehat{x'A'y'}$. وبوجهٍ خاص، عندما يكون مستقيمان d و Δ متعامدين تكون صورتاهما d' و Δ' متعامدتين أيضاً. نقول إنّ التّحويلات المألوفة تحافظ على التّعامد.

يمكننا مثلاً أن نستخلص مما سبق النتائج الآتية :

- صورة معيّن هي معيّن أيضاً.
- صورة مستطيل هي مستطيل أيضاً.
- صورة مربّع هي مربّع أيضاً.

مثال إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة



لتكن A و B و C ثلاثُ نقاط من مستقيمٍ d، ولتكن O نقطة غير واقعة على d، ولتكن AOA' و BOB' و COC' مثلّثات متساوية الأضلاع متوضعة في المستوي كما في الشكل المجاور.

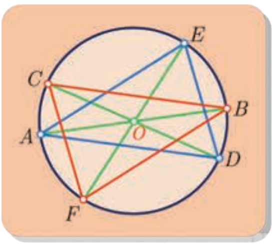
أثبت أنّ النّقاط A' و B' و C' واقعة على استقامة واحدة.

لبرهان وقوع النّقاط A و B و C على استقامة واحدة نبرهن أنّ هذه النّقاط هي صور ثلاث نقاط واقعة على استقامة واحدة وفق تحويلٍ مألوف.

الحل

المثلّثات المتساوية الأضلاع هي أشكالٌ نموذجيّة مرتبطة بالدّوران. تشترك المثلّثات AOA' و BOB' و COC' بالرأس O، لذلك يبدو من الحكمة أن نستعمل الدّوران R الذي مركزه O وزاويته $60°$ بالاتّجاه المباشر. ينقل هذا التّحويل النّقطة A إلى A'، و B إلى B'، وكذلك C إلى C'. النّقاط A و B و C تقع على d فهي على استقامة واحدة، إذن، تقع النّقاط A' و B' و C' على استقامة واحدة.

مثال إثبات أنّ لمثلّثين المساحة ذاتها



لتكن $\mathcal{C}$ دائرة مركزها O، ولتكن $[AB]$، $[CD]$، $[EF]$ ثلاثة أقطار لهذه الدّائرة، متوضّعة كما في الشّكل المجاور. أثبت أن للمثلّثين AED و CFB مساحتين متساويتين.

لإثبات أنّ للمثلّثين AED و CFB مساحتين متساويتين، نثبتُ أنّ أحد هذين المثلّثين هو صورة المثلّث الآخر وفق تحويلٍ مألوف، فيكون المثلّثان طبوقين، (ولهما من ثَمّ المساحة نفسها).

الحل

بتفحّص الشكل نجد أنّ النّقطة O هي منتصف القطع المستقيمة $[AB]$، $[CD]$، $[EF]$. تقودنا هذه الملاحظة إلى استعمال التّناظر المركزيّ S_O الّذي مركزه النّقطة O. هذا التّناظر ينقل النّقطة A إلى B وينقل النّقطة D إلى C كما ينقل النّقطة E إلى F؛ وبذا تكون صورة المثلّث ADE وفق التّناظر S_O هي المثلّث BCF. نستنتج من ذلك أنّ هذين المثلّثين طبوقان ومن ثمّ تكون لهما المساحة ذاتها.

تدرّب

① ليكن المربّع $ABCD$، ولتكن النّقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أنشئ صورة المربّع $ABCD$ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to I}$ الذي ينقل A إلى I.

② ليكن المثلّث ABC، وليكن G مركز ثقله.

❶ أنشئ G' صورة النّقطة G وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to G}$ الذي ينقل A إلى G.

❷ ▲ لتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أتكون I منتصف القطعة $[GG']$؟

▲ استنتج طبيعة الرّباعي $BGCG'$.

③ ليكن d و Δ مستقيمين متعامدين، ولتكن A نقطة واقعة على المستقيم Δ. أنشئ رباعيّاً $ABCD$ يكون المستقيمان d و Δ محوري تناظر له.

④ ليكن $OABC$ مستطيلاً فيه OA يساوي $8\,\text{cm}$ و OC يساوي $6\,\text{cm}$. وليكن $\mathcal{R}$ ربع دورة مباشرة مركزها O.

❶ أنشئ النّقاط C' و A' و B' صور النّقاط C و A و B وفق التّحويل $\mathcal{R}$ بالتّرتيب.

❷ ▲ بيّن أنّ المثلّث OBB' قائم ومتساوي الساقين.

▲ استنتج أنّ BB' يساوي $10\sqrt{2}$ سنتيمتراً.

⑤ ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين رأسه A، وليكن d محور تناظره. نرسم من B العمود على المستقيم (AB) فيقطع d في نقطة E.

❶ ما هي صورة المستقيم (BE) وفق الانعكاس الذي محوره d ؟

❷ استنتج أنّ المستقيمين (EC) و (AC) متعامدان.

⑥ لتكن A و B نقطتين على الدّائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها O، تُحقّقان $\angle AOB = 90^\circ$. ليكن $\mathcal{R}$ دوراناً مباشراً مركزه O وزاويته 60°.

❶ أنشئ النّقطة C صورة النّقطة B وفق $\mathcal{R}$.

❷ احسب قياسات زوايا المثلّث ABC.

ملاحظة : في هذا التّمرين هناك حالتان.

تمرينات ومسائل

1 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O.

❶ أنشئ صورة $ABCD$ وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{O\to D}$ الذي ينقل O إلى D.

❷ إنّ صورة $ABCD$ وفق $\mathcal{T}_{O\to D}$ هي متوازي أضلاع، أثبت أنّ D مركزه.

2 ليكن لدينا المثلّث ABC، والنقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. لتكن J نظيرة النّقطة B بالنّسبة إلى النّقطة A.

❶ أنشئ النّقطة K صورة B وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{A\to C}$ الذي ينقل A إلى C.

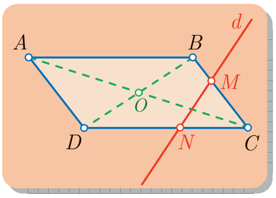
❷ ما هي صورة النّقطة J وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{C\to K}$ ؟

3 ليكن Δ و Δ' مستقيمين متقاطعين في نقطةٍ O، وليكن d و d' منصّفي الزاويتين المكوّنتين بهذين المستقيمين، وأخيراً لتكن M نقطة واقعة على المستقيم Δ.

❶ أنشئ النّقطة N صورة النّقطة M وفق الانعكاس الذي محوره d، والنّقطة P صورة النّقطة M وفق الانعكاس الذي محوره d'.

❷ علّل كون المثلّث PMN قائم الزّاوية.

4 ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. d مستقيمٌ متوضّعٌ كما في الشّكل المجاور، ويقطع القطعة المستقيمة $[CD]$ في N، كما يقطع القطعة المستقيمة $[BC]$ في M. ليكن S_O التناظر الذي مركزه O.



❶ أنشئ النقطتين M' و N' صورتي النقطتين M و N وفق S_O بالتّرتيب.

❷ استنتج أنّ المستقيم $(M'N')$ يوازي المستقيم d.

5 ليكن ABC مثلّثاً متساوي السّاقين رأسه A، وليكن H المسقط القائم للنقطة A على $[BC]$، ولتكن M نقطة من $[AH]$ مختلفة عن A وعن H. يقطع المستقيمُ (BM) المستقيمَ (AC) في I، ويقطع المستقيمُ (CM) المستقيمَ (AB) في J. ليكن S الانعكاس الذي محوره (AH).

❶ ▲ علّل كون المستقيم (CJ) صورة المستقيم (BI) وفق الانعكاس S.

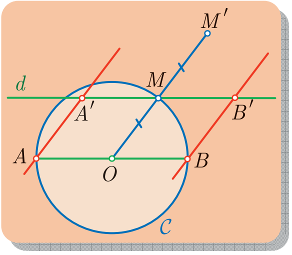
▲ ما صورة المستقيم (AC) وفق S ؟

▲ استنتج أنّ $S(I) = J$.

❷ علّل كون الرّباعيّ $BJIC$ شبه منحرف متساوي السّاقين.

لنتعلّم البحث معاً

6 تعرّفُ التّحويلات



$\mathcal{C}$ دائرة مركزها O و $[AB]$ أحد أقطارها. M نقطة واقعة على $\mathcal{C}$ مختلفة عن A وعن B. d مستقيمٌ يمر بالنّقطة M موازياً المستقيم (AB). نرسم من A و B مستقيمين يوازيان المستقيم (OM) فيقطعان المستقيم d في A' و B' على الترتيب. لتكن M' صورة O وفق التّناظر الذي مركزه M. أثبت أنّ المثلّث $A'M'B'$ مثلّثٌ قائم.

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسمياً عليه النّقاط المختلفة.

بحثاً عن نتائج مباشرة.

- $\widehat{AMB} = 90°$ لماذا ؟
- يوازي المستقيمُ d المستقيمَ (AB) والمستقيمات (AA') و (BB') و (OM) متوازية أيضاً، وهذا يشكّل متوازيات أضلاع يمكن أن نربطها بانسحابات. وهناك أيضاً قطعاً مستقيمة متساوية الطّول. أشر إلى ذلك على الشّكل، واكتب حالات المساواة هذه.

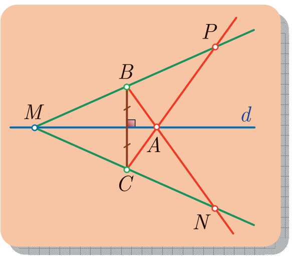
بحثاً عن طريق. المطلوب إثبات أنّ المثلّث $A'M'B'$ قائم. تقودنا الاستنتاجات السّابقة إلى طريقتين للحلّ.

الطريقة الأوّلى. استفد من الانسحاب لتثبت أنّ المثلّث $A'M'B'$ هو صورة مثلّث وفق انسحاب. ما هو هذا المثلّث ؟ ما هو الانسحاب ؟

الطريقة الثانية. استفد من القطع المستقيمة المتساوية الطول.

أنجِز الحلّ في الحالتين واكتبه بلغةٍ سليمة.

7 صورة تقاطع مستقيمات



d محور قطعة مستقيمة $[BC]$. A و M نقطتان واقعتان على d نفترض أنّ المستقيمين (AB) و (CM) يتقاطعان في N، وأنّ المستقيمين (AC) و (BM) يتقاطعان في P. أثبت أنّ النقطة P هي صورة النّقطة N وفق الانعكاس الذي محوره d.

نحو الحلّ

رسم الشكل. ارسم الشكل مسميّاً عليه النقاط المختلفة.

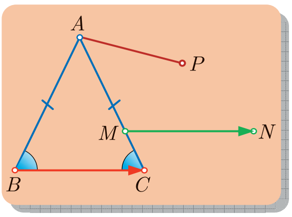
بحثاً عن نتائجَ مباشرة.

- تقع النّقطتان A و M على محور القطعة المستقيمة $[BC]$. اكتب علاقات المساواة بين أطوال القطع المستقيمة في هذه الحالة وبيّن ذلك على الشّكل.
- المستقيم d هو محور تناظر لكلٍّ من المثلّثين ABC و MBC. علّل ذلك.

بحثاً عن طريق. تقودنا الاستنتاجات السّابقة إلى الحلّ. النّقطة N هي نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (CM)، وماذا عن P؟ استعن بالخاصة المناسبة من الدرس.

أنجِز الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

8 استعمال التعاريف



ABC مثلّثٌ متساوي السّاقين، M نقطة من القطعة المستقيمة $[AC]$، N صورة النّقطة M وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{B\to C}$ الذي ينقل B إلى C، و P صورة النّقطة M وفق الدوران المباشر $\mathcal{R}$ الذي مركزه A والذي ينقل النّقطة B إلى C. أثبت أنّ المثلّث PCN متساوي السّاقين.

نحو الحلّ

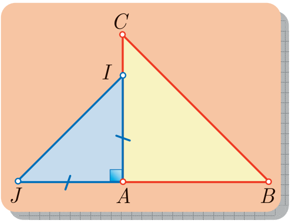
رسم الشكل. ارسم الشّكل مسمياً عليه النّقاط المختلفة.

بحثاً عن طريق.

- N هي صورةُ M وفق الانسحاب $\mathcal{T}_{B\to C}$. يوافق هذا الانسحاب متوازي أضلاع يُطلب تحديده. حدّد على الشكل القطع المستقيمة المتساوية الطّول واكتب علاقات المساواة الموافقة.
- P هي صورة M وفق الدّوران $\mathcal{R}$. يفيد تعريف الدّوران بتحديد علاقات مساواة على الشّكل: زوايا متساوية، وقطع مستقيمة متساوية الطول أيضاً. حدّد هذه العلاقات على الشكل واكتبها.
- النّقطة C هي صورة النّقطة B وفق $\mathcal{R}$، إذن : $\mathcal{R}(B) = C$ و $\mathcal{R}(M) = P$. عند معرفة نقطتين وصورتيهما وفق تحويل، من المفيد أن نصل بينهما وأن نكتب علاقات تساوي الأطوال التي يمكن استنتاجها. صِل بين النّقطتين B و M وكذلك بين P و C. أيُّ النتائج تبرّر صحّة المساواة $BM = PC$ ؟

أنجِز الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

9 استعمال ربع الدورة



ABC مثلّثٌ قائمٌ ومتساوي السّاقين رأسه A، I نقطة من القطعة المستقيمة $[AC]$، IAJ مثلّثٌ قائمٌ ومتساوي السّاقين في A والنّقطة J تقع خارج القطعة المستقيمة $[AB]$. أثبت أنّ المستقيمين (BI) و (CJ) متعامدان.

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسمياً عليه النّقاط المختلفة.

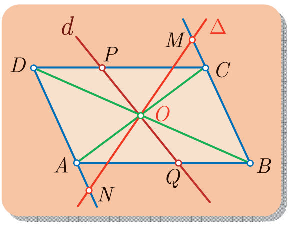
بحثاً عن نتائج مباشرة.

يرتبط المثلّثان BAC و IAJ بتحويل ربع دورة مركزه النّقطة A. فإذا كان $\mathcal{R}$ تحويل ربع دورة مباشر مركزه A، ما صورة النّقطة B؟ وما صورة النّقطة I ؟

بحثاً عن طريق. تبيّن الاستنتاجات السابقة ملامحَ منهجٍ للإجابة عن السّؤال المطلوب.

أنجِزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

10 تعرُّف التّناظر المركزيّ



$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، d مستقيمٌ مارّ بالنّقطة O ويقطع المستقيم (DC) في P ويقطع المستقيم (AB) في Q، Δ مستقيمٌ مار بالنّقطة O ويقطع المستقيم (AD) في N ويقطع المستقيم (BC) في M. أثبت أنّ الرّباعيّ $MPNQ$ متوازي الأضلاع.

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسمياً عليه النّقاط المختلفة.

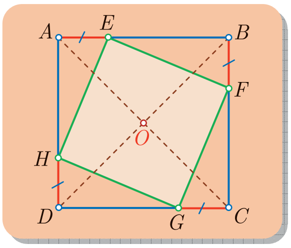
بحثاً عن نتائج مباشرة. يطرح وجودُ متوازي الأضلاع مع أقطاره فكرة الاستفادة من التّناظر S_O الذي مركزه O.

- ما هي صورة كلٍّ من النقاط A و B و C و D وفق التناظر S_O ؟
- ما صورة كلٍّ من المستقيمين d و Δ وفق S_O ؟
- ما صورة كلٍّ من المستقيمين (BC) و (CD) وفق S_O ؟

بحثاً عن طريق. تُوجّهنا الاستنتاجات السّابقة نحو محاولة إثبات أنّ النّقطة O هي منتصف كلٍّ من القطعتين المستقيمتين $[MN]$ و $[PQ]$. ولكنّ النّقطة M هي نقطة تقاطع المستقيمين Δ و (BC). عيّن صورة M وفق S_O.

أنجزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

11 استعمال الدوران



ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O. نتأمّل على القطعة المستقيمة $[AB]$ نقطة E، وعلى القطعة المستقيمة $[BC]$ نقطة F، ونقطة G على القطعة المستقيمة $[CD]$، ونقطة H على القطعة المستقيمة $[AD]$ بحيث يكون $AE = BF = CG = DH$. أثبت أنّ $EFGH$ مربّع.

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسمّياً عليه النقاط المختلفة.

بحثاً عن نتائج مباشرة.

- بيِّن لماذا يكون: $EB = FC = GD = HA$؟
- تبدو المثلّثات EBF و FCG و GDH و HAE طبوقة. أثبت ذلك.

بحثاً عن طريق. نريد إثبات أنّ الرباعي $EFGH$ مربّعٌ. توحي الاستنتاجات السّابقة بطريقتين ممكنتين للوصول إلى الحل.

الطريقة الأولى. وهي تعتمد على المثلّثات الطّبوقة. استفد من الاستنتاجات السّابقة لتثبت أنّ:

- الرّباعيّ $EFGH$ معيّن، لماذا ؟
- $\widehat{AEH} + \widehat{BEF} = 90^\circ$، لماذا ؟

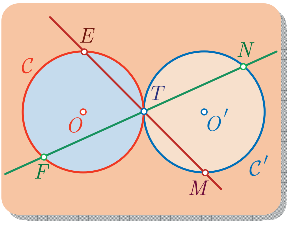
الطريقة الثانية. وهي تعتمد على ربع دورة مركزها O.

- يبدو من الشّكل أنّ النّقطة O مركز المربّع $ABCD$، هي أيضاً مركز الرّباعيّ $EFGH$. من ذلك تأتي فكرة دوران ربع دورة $\mathcal{R}$ مركزه O وينقل A إلى B. إنّ $\mathcal{R}$ ينقل أيضاً B إلى C، وينقل C إلى D، وينقل D إلى A.
- لنبرهن أنّ النّقطة F هي صورة E وفق $\mathcal{R}$. لإثبات ذلك نفترض أنّ E' هي صورة E وفق $\mathcal{R}$ ثمّ نبرهن أنّ النّقطة E' تنطبق على النّقطة F نفسها.
- لماذا تقع النّقطة E' على القطعة المستقيمة $[BC]$ ؟ ولماذا يكون $BE' = AE$ ؟ استنتج من ذلك أنّ $E' = F$ وأنّ المثلّث EOF هو مثلّثٌ قائمٌ متساوي السّاقين.
- لماذا تكون المثلّثات FOG و GOH و HOE أيضاً قائمة ومتساوية السّاقين ؟

▪ برهن أنّ النّقاط E و O و G تقع على استقامة واحدة، وكذلك أنّ النّقاط F و O و H تقع على استقامة واحدة، وأنّ النّقطة O هي منتصف كلٍّ من القطعتين $[EG]$ و $[FH]$، وأخيراً أنّ $EG = FH$.

أنجِز الحلَّ في الحالتين واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

12 استعمال التّناظر المركزيّ



$\mathcal{C}$ و $\mathcal{C}'$ دائرتان متماسّتان خارجاً في T، مركزاهما O و O' بالتّرتيب، ونصفا قطريهما متساويان. E و F نقطتان من الدائرة $\mathcal{C}$. المستقيم (ET) يقطع الدّائرة $\mathcal{C}'$ في نقطة M ويقطع المستقيم (FT) الدّائرة $\mathcal{C}'$ في نقطة N. برهن أنّ الرّباعيّ $ENMF$ متوازي الأضلاع.

نحو الحلّ

رسم الشّكل. ارسم الشّكل مسميّاً عليه النّقاط المختلفة.

بحثاً عن نتائج مباشرة. الدّائرتان متماسّتان في T، حدّد على الشّكل القطع المستقيمة المتساوية الطّول واكتب علاقات التّساوي.

بحثاً عن طريق.

▪ المطلوب إثبات أنّ الرّباعيّ $ENMF$ متوازي الأضلاع. فهل تتوفّر معلومات عن توازي الأضلاع ؟ أو تناصف القطرين ؟ أو أطوال الأضلاع ؟

▪ يبدو من الشّكل أنّ النّقطة T هي منتصف القطعة المستقيمة $[FN]$ وكذلك هي منتصف القطعة المستقيمة $[EM]$ وقد استنتجنا في الفقرة السابقة أنّ T هي أيضاً منتصف القطعة المستقيمة $[OO']$. تقودنا هذه الملاحظات للتفكير باستعمال التّناظر المركزيّ S_T الذي مركزه النّقطة T.

▪ ما صورة الدّائرة $\mathcal{C}$ وفق التّناظر S_T؟ وما صورة المستقيم (ET)؟ وما صورة المستقيم (FT) ؟ تنتمي النّقطة E إلى الدائرة $\mathcal{C}$ وتنتمي أيضاً إلى المستقيم (ET)، فعلى أيّ مستقيمٍ تقع صورة هذه النّقطة وفق التناظر S_T؟ ابحث باتّباع الأسلوب نفسه عن صورة النّقطة F وفق التّناظر S_T.

أنجِز الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

13 استعمال الدوران بربع دورة

$ABCD$ مربّعٌ مركزه O، M نقطة واقعة على القطعة المستقيمة $[AB]$، و N نقطة من القطعة المستقيمة $[BC]$ تُحقِّق $\angle MON = 90°$. برهن أنّ المثلث MON قائمٌ متساوي السّاقين.

نحو الحلّ

✍ **رسم الشّكل.** ارسم الشّكل مسميّاً عليه النّقاط المختلفة، وحدّد عليه: القطرين، والقطع المستقيمة المتساوية الطّول، والزّوايا القائمة. واكتب علاقات التساوي.

✌ **بحثاً عن نتائجَ مباشرة.** يشكّل المربّع $ABCD$ وقطراه نموذجاً يرتبط بتحويلات ربع الدّورة. الزاوية $\angle MON$ قائمة، لذلك يبدو من المناسب استعمال دوران بربع دورة مركزه O.

👌 **بحثاً عن طريق.**

- نعلم أنّ $\angle MON = 90°$، كي نثبت أنّ المثلّث MON قائمٌ ومتساوي الساقين يكفي أنْ نثبت أنّ $OM = ON$.
- كي نبرهن أنّ لقطعتين مستقيمتين الطّول نفسه، يكفي أنْ نبرهن أنّ إحدى هاتين القطعتين هي صورة للأخرى وفق تحويلٍ مألوف. ليكن $\mathcal{R}$ الدّوران بربع دورة الذي مركزه O والذي ينقل النّقطة A إلى B.

  ما هي صورة المستقيم (AB) وفق $\mathcal{R}$ ؟ وما هي صورة المستقيم (OM) وفق $\mathcal{R}$ ؟ وأخيراً ما صورة النّقطة M وفق $\mathcal{R}$ ؟

أنجِز الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

14

ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O، وليكن ABI و ADJ مثلّثين متساويَي الأضلاع مرسومين خارج المربّع $ABCD$. ليكن S الانعكاس الّذي محوره (AC).

① ❶ برهن أنّ $\angle JAC = \angle IAC = 105°$.

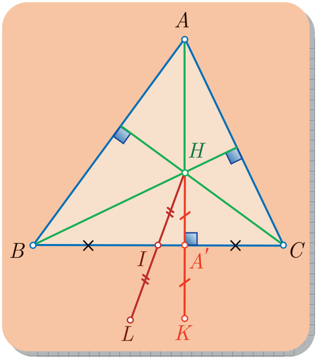
❷ استنتج أنّ المستقيم (AC) ينصّف الزاوية $\angle JAI$ وأنّه عمودي على (JI).

❸ برهن أنّ $S(I) = J$.

② ❶ ما هي صورة المستقيم (DI) وفق الانعكاس S ؟

❷ استنتج أنّ المستقيمات (DI) و (BJ) و (AC) تتلاقى في نقطة واحدة.

15 ليكن ABC مثلّثاً. ولتكن I منتصف الضلع $[BC]$، و H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلّث ABC. نسمّي K نظيرة النّقطة H بالنّسبة إلى المستقيم (BC)، ونسمّي L نظيرة H بالنسبة إلى I.



① ❶ أثبت أنّ $BHCL$ متوازي أضلاع.

❷ استنتج أنّ المثلّثين ABL و ACL قائمان.

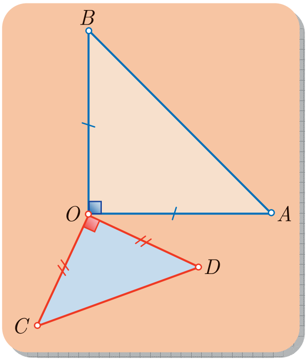
② ❶ أثبت أنّ (KL) يوازي (BC).

❷ استنتج أنّ المثلّث AKL قائم.

③ أثبت أنّ النّقاط A و B و C و K تقع على الدّائرة التي قطرها $[AL]$.

④ أثبت صحّة الخاصّة : «إذا كانت H هي نقطة تلاقي ارتفاعات مثلّث ABC، وقعت نظائر النّقطة H بالنسبة إلى أضلاع المثلّث على الدائرة المارّة برؤوس المثلّث».

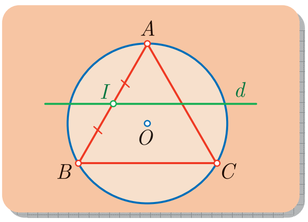
16 OAB و OCD مثلّثان قائمان ومتساويا السّاقين يشتركان بالرّأس O. ليكن الدوران ربع الدورة المباشر $\mathcal{R}$ الذي مركزه O.



① ما هي صورة النّقطة A وفق $\mathcal{R}$ ؟ ما صورة النّقطة C ؟

② استنتج أنّ $AC = BD$، وأنّ المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

17 لتكن O مركز الدّائرة $\mathcal{C}$ المارة برؤوس المثلّث المتساوي الأضلاع ABC، ولتكن I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$، و d مستقيمٌ يمرُّ بالنّقطة I موازياً (BC). نرمز بالرمز $\mathcal{R}$ إلى الدوران المباشر الذي مركزه O وزاويته $120°$.

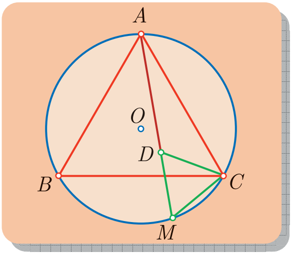


① ❶ ما صورة القطعة المستقيمة $[AB]$ وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷ استنتج أنّ صورة النّقطة I وفق $\mathcal{R}$ هي النّقطة J منتصف $[BC]$.

② ❶ ما صورة المستقيم (BC) وفق $\mathcal{R}$ ؟

❷ استنتج أنّ صورة المستقيم d وفق $\mathcal{R}$ هي المستقيم (IJ).



18 لتكن O مركز الدّائرة $\mathcal{C}$ المارّة برؤوس المثلث المتساوي الأضلاع ABC، ولتكن M نقطة من القوس $\overset{\frown}{BC}$ الذي لا يحوي A. D هي نقطة من $[AM]$ تُحقّق $MD = MC$.

① أثبت أنّ المثلّث DMC متساوي الأضلاع ؟

② نرمز بالرمز $\mathcal{R}$ إلى الدّوران المباشر الذي مركزه C وينقل A إلى B.

❶ ما صورة المثلّث ADC وفق $\mathcal{R}$ ؟

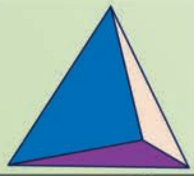
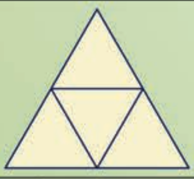
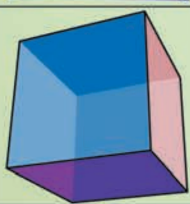
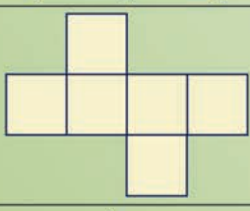
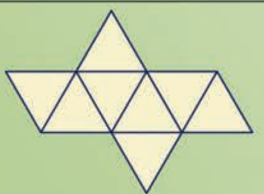
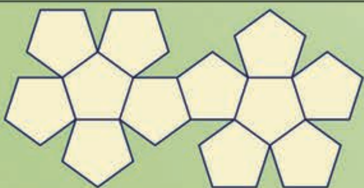
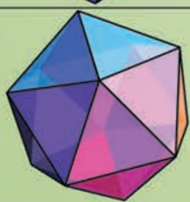
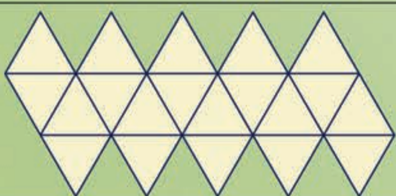
❷ استنتج أنّ $BM = AD$ وأنّ $MB + MC = MA$.

19 $ABCD$ مربّع مركزه O. M نقطة من الضلّع $[AB]$. يقطع المستقيمُ المارّ بالنّقطة B عمودياً على (CM) المستقيمَ (AD) في P. بالاستعانة بتحويل تختاره، أثبت أنّ المثلّث POM مثلّث قائم ومتساوي الساقين.

20 ليكن ABC مثلّثاً متساوي الساقين، رأسه A. ننشئ خارجه مربّعين $ABIJ$ و $ACEF$. بالاستعانة بتحويل تختاره، أثبت أنّ $JC = BF$، وأنّ المستقيمين (CJ) و (BF) متعامدان.

2 الهندسة الفراغيّة

نسمّي مجسّماً منتظماً، كلَّ مجسّمٍ فراغيّ محدّب وجوهه مضلّعات مُنتظمة طَبوقة، وكلّ رأس فيه ينتمي إلى العدد نفسه من الوجوه. هناك فقط خمسةُ مجسّمات متعدّدة الوجوه منتظمة تُسمى المجسّمات الأفلاطونيّة، وهي :

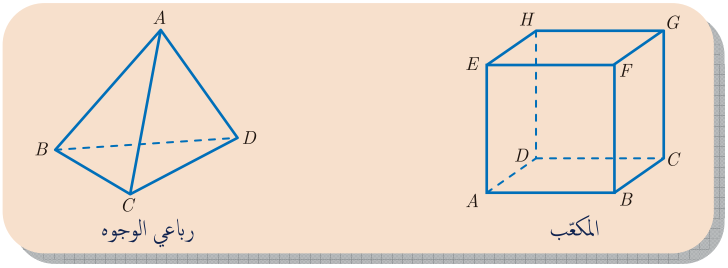
رُباعي الوجوه المنتظم Tetrahedron		
المكعّب Cube		
ثماني الوجوه المنتظم Octahedron		
ذو الاثني عشر وجهاً المنتظم Dodecahedron		
ذو العشرين وجهاً المنتظم Icosahedron		

حاولْ بالاستفادة من المخطّطات الشّبكيّة المبيّنة أعلاه أنْ تصنع بنفسك هذه المجسّمات باستعمال الورق المقوّى.

الهندسة الفراغيّة

1 رسم المجسّمات بالمنظور

كَثيراً ما نحتاج عند دراسة الهندسة الفراغيّة إلى رسم مجسّمات لأشياء ثلاثيّة الأبعاد، ولإعطاء الانطباع الصّحيح يجبُ اتّباع بعض القواعد الأساسيّة وهي :



① تُرْسَم القطعُ المستقيمة المرئيّة بخطوط مستمرّة، وتُرْسَم غير المرئيّة منها بخطوط متقطّعة.

② تُرْسَم المستقيماتُ المتوازية في الفراغ مستقيماتٍ متوازية.

③ تُرْسَم المستقيماتُ المتقاطعة في الفراغ مستقيماتٍ متقاطعة. وتُرْسَم النّقاط التي تقعُ على استقامةٍ واحدة على استقامةٍ واحدة.

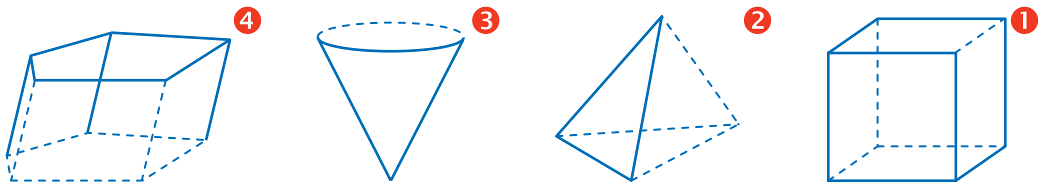
④ يُرسم منتصف قطعة مستقيمة في منتصف القطعة المرسومة.

⑤ يُرْسَم الوجهُ الواقع في المستوي الأمامي بقياسه الحقيقيّ. مثل الوجه $ABFE$ في المكعّب أعلاه.

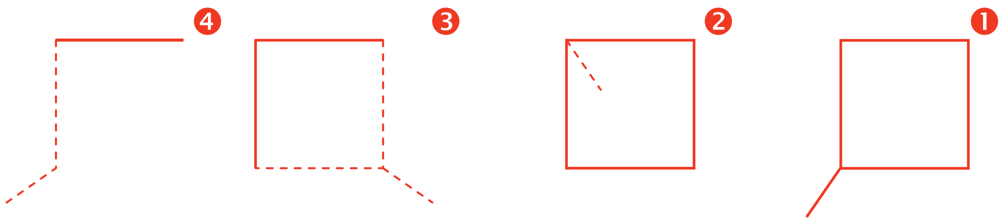
⑥ عموماً لا تُمثّلُ المستقيماتُ المتعامدةُ في الفراغ بمستقيماتٍ متعامدة. كما هي حال المستقيمات (EF) و (EH) في المكعب أعلاه.

تدرّب

① بيّن أيّ الرّسوم التالية، لا يمثّل مجسّماً تمثيلاً منظوريّاً، وأعِدْ رسمه مُصحّحاً في دفترك.

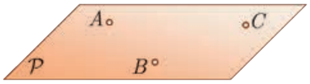


② أكملْ كلّاً من الرّسوم التّاليةِ لتمثّل مكعّباً مرسوماً منظوريّاً.



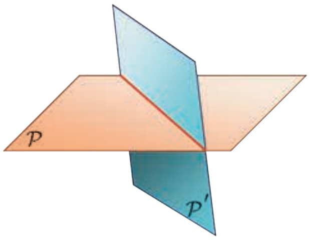
2 قواعد التّلاقي

خواصّ



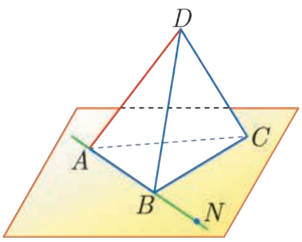
① بثلاث نقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة يمرّ مستوٍ واحدٌ، نرمز إليه (ABC).

② إذا كانت A و B نقطتين من مستوٍ $\mathcal{P}$، وقعَ كاملُ المستقيم (AB) في $\mathcal{P}$.



③ إذا تقاطع مستويان كان تقاطعهما مستقيماً نسمّيه فصلَهما المشترَك.

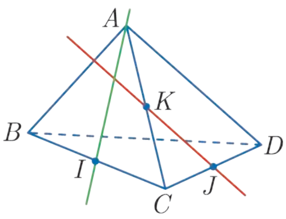
مثال



- في رباعيّ الوجوه $ABCD$، نرى أنّ المستقيم (AD) هو تقاطعُ المستويين (ABD) و (ACD).
- النّقطتان A و B هما نقطتان من المستوي (ABC)، إذن تنتمي جميعُ نقاطِ المستقيم (AB)، ومنها النقطة N مثلاً، إلى المستوي (ABC).

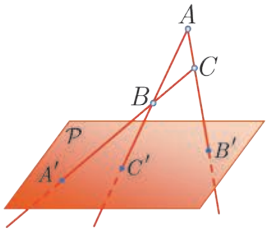
فكّر

في رباعيّ الوجوه $ABCD$ المجاور، يبدو المستقيمان (AI) و (JK) متقاطعين، ولكنّهما في الحقيقة غيرُ ذلك، لماذا ؟



لنفترض على سبيل الجدّل تقاطع المستقيمين (JK) و (AI) في نقطة M. عندئذ نستنتج من انتماء النّقطتين K و M إلى المستوي (ABC)، أنّ المستقيمَ (MK)، وهو نفسه (JK)، واقعٌ في هذا المستوي، ونستنتجُ، من ثَمّ، أنّ المستقيم (MK) هو الفصل المشترك للمستويين (ABC) و (ACD)، وهذا يناقضُ كون (AC) فصلهما المشترك.

مثال إثباتُ وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة



ليكن المستوي $\mathcal{P}$. ولتكن A و B و C ثلاثَ نقاطٍ ليست على استقامةٍ واحدة ولا تقع في $\mathcal{P}$. نفترض أنّ (AB) يقطع $\mathcal{P}$ في C'، وأنّ (AC) يقطع $\mathcal{P}$ في B'، وأنّ (BC) يقطع $\mathcal{P}$ في A'، أثبتْ أنّ النّقاط A' و B' و C' تقع على استقامة واحدة.

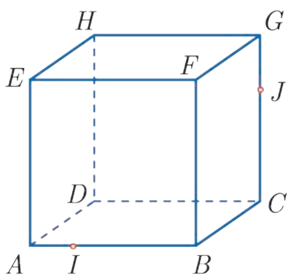
لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة يكفي أن نثبت انتماء هذه النقاط معاً إلى مستويين مختلفين.

الحل

- لمّا كانت النّقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة، فهي تعيِّن مستوياً (ABC).
- النّقطة A' تنتمي إلى (ABC) لأنّها نقطةٌ من المستقيم (BC) المحتوى في (ABC).
- وكذلك نرى أنّ النّقطتين B' و C' هما نقطتان من المستوي (ABC).
- إذن تنتمي النّقاط A' و B' و C' إلى المستوي (ABC) وهي أيضاً تنتمي إلى المستوي $\mathcal{P}$. فهي إذن تنتمي إلى تقاطعهما أي إلى فصلهما المشترك.

النّتيجة : تنتمي النِّقاط A' و B' و C' إلى الفصل المشترك للمستويين (ABC) و $\mathcal{P}$ فهي إذن تقع على استقامة واحدة.

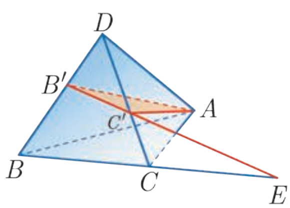
تدرّب



① ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً. ولتكن I نقطةً من الحرف $[AB]$ و J نقطة من الحرف $[CG]$.

❶ بالاستفادة من قواعد التّلاقي، أثبت أنّ النّقطتين I و J تنتميان في آن معاً إلى المستويين (ABJ) و (CGI).

❷ ما هو إذن تقاطعُ المستويين (ABJ) و (CGI)؟



② ليكن $ABCD$ رباعي وجوه. ولتكن B' نقطةً من الحرف $[BD]$ مختلفة عن B و D، و C' نقطةً من الحرف $[CD]$ مختلفةً عن C و D. نفترض أنّ المستقيمين $(B'C')$ و (BC) يتقاطعان في نقطة E. عيّن تقاطع المستويين (ABC) و $(AB'C')$.

3 التوازي في الفراغ

تعريف

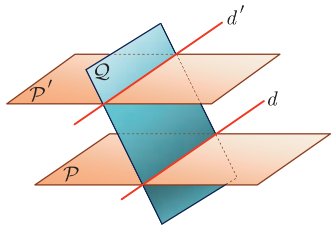
- إذا وقع مستقيمان في مستوٍ واحد ولم يشتركا بأية نقطة قلنا إنّهما متوازيان.
- إذا لم يشترك مستويان بأية نقطة قلنا إنّهما متوازيان.
- إذا لم يشترك مستقيمٌ مع مستوٍ بأية نقطة، قلنا إنهما متوازيان.

ونصطلح أنْ نطلق صفة التّوازي على مستقيمين منطبقين أو مستويين منطبقين أو مستقيم محتوى في مستوٍ.

المستقيمات المتوازية

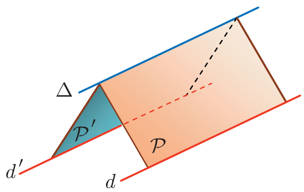
المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان. أي إذا وازى كلٌّ من المستقيمين d_1 و d_2 المستقيمَ d_3 كان المستقيمان d_1 و d_2 متوازيين.

مُبرهَنة 1



ليكن $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ مستويين متوازيين. عندئذ كلُّ مستوٍ Q قاطع للمستوي $\mathcal{P}$ يقطع أيضاً $\mathcal{P}'$ ويكون الفصلان المشتركان متوازيين.

مُبرهَنة 2

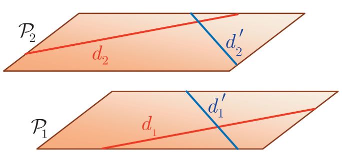


ليكن d و d' مستقيمين متوازيين، وليكن $\mathcal{P}$ مستوياً يحوي d و $\mathcal{P}'$ مستوياً يحوي d'، ولنفترض أنّ المستويين $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ يتقاطعان بفصلٍ مُشترك Δ. عندئذ يوازي Δ كلاً من d و d'.

المستويات المتوازية

المستويان الموازيان لثالث متوازيان. أي إذا وازى كلٌّ من المستويين $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ المستويَ $\mathcal{P}_3$ كان المستويان $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيين.

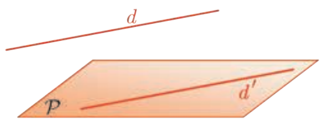
مُبرهَنة 3



إذا وازى مستقيمان متقاطعان d_1 و d'_1، محتويان في مستوٍ $\mathcal{P}_1$، على التّوالي مستقيمين متقاطعين d_2 و d'_2 محتويين في مستوٍ $\mathcal{P}_2$. عندئذ يكون المستويان $\mathcal{P}_1$ و $\mathcal{P}_2$ متوازيين.

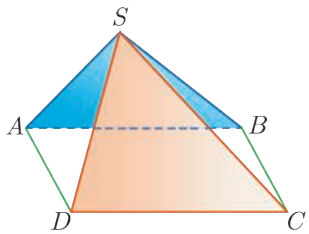
المستوي والمستقيم المتوازيان

مُبرهَنة 4



إذا كان d و d' مستقيمين متوازيين، عندئذ يكون المستقيم d موازياً لكلِّ مستوٍ $\mathcal{P}$ يحوي المستقيم d'.

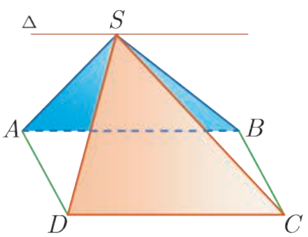
مثال تعيين الفصل المشترك لمستويين



لنتأمّل هرماً $SABCD$ قاعدتُه متوازي الأضلاع $ABCD$. وليكن Δ الفصل المشترك للمستويين (SAB) و (SCD). أثبت أنّ Δ هو المستقيم المارّ بالنّقطة S موازياً للمستقيم (AB) أو (CD).

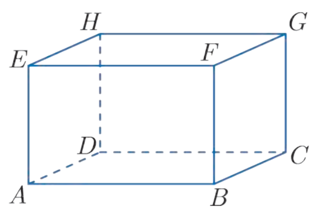
الحل

- لا يظهرُ المستقيمُ Δ في الشّكل، ولكن يشترك المستويان (SAB) و (SCD) بالنّقطة S، فهي إذن تقعُ على الفصل المشترك Δ.
- المستقيمان $d = (AB)$ و $d' = (CD)$ متوازيان، لأنّ $ABCD$ متوازي أضلاع، ويحوي المستوي $\mathcal{P} = (SAB)$ المستقيمَ d، وكذلك يحوي المستوي $\mathcal{P}' = (SCD)$ المستقيمَ d'. إذن نستنتج مباشرةً، استناداً إلى المُبرهَنة **2**، أنّ الفصل المشترك Δ يوازي كلاً من d و d'.



- وبالنّظر إلى النّقطتين السّابقتين نرى أنّ المستقيم Δ هو المستقيم المارّ بالنّقطة S موازياً المستقيم (AB).

مثال كيف نتعرّف المستقيمات والمستويات المتوازية ؟

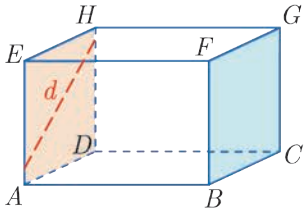


لنتأمّل متوازي المستطيلات $ABCDEFGH$.

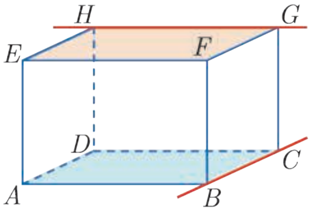
❶ عيّن مستقيماتٍ تمرُّ بالنّقطة E موازيةً للمستوي $(BCGF)$.

❷ عيّن مستقيماتٍ غيرَ متقاطعةٍ وغيرَ متوازيّة.

الحل



- لمّا كان المستويان $(ADHE)$ و $(BCGF)$ متوازيين استنتجنا أنّ كلّ مستقيم d محتوى في $(ADHE)$ يوازي المستوي $(BCGF)$. فعلى سبيل المثال نرى أنّ المستقيمات (EA) و (ED) و (EH) توازي جميعاً المستوي $(BCGF)$.



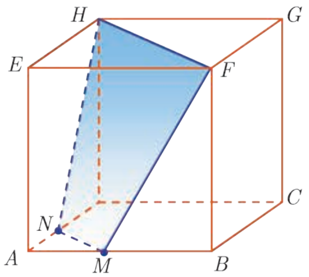
يقع المستقيمان (HG) و (BC) في مستويين متوازيين مختلفين، فهما لا يتقاطعان، ومع ذلك فهما غير متوازيين، لأنّ المستقيم (HG) يوازي المستقيم (DC) وهذا الأخير يتقاطع مع (BC).

تدرّب

① في رباعيّ الوجوه $ABCD$، لتكن I منتصفَ $[AB]$، و J منتصفَ $[BC]$، و K منتصفَ $[CD]$، وأخيراً L منتصفَ $[AD]$.

❶ أثبت أنّ المستقيمين (IL) و (JK) متوازيان، وأنّ المستقيمين (IJ) و (KL) متوازيان.

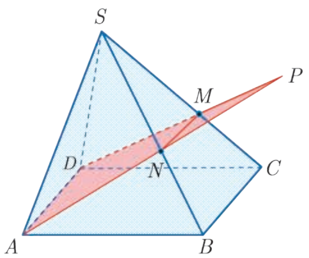
❷ ما نوعُ الرّباعيّ $IJKL$ ؟



② ليكن لدينا المكعّب $ABCDEFGH$. ولتكن M نقطةً من $[AB]$، ولتكن N نقطةَ تقاطعِ المستوي (FHM) مع المستقيم (DA). أثبت توازي المستقيمين (FH) و (MN).

③ ليكن لدينا الهرمُ $SABCD$ الّذي رأسه S وقاعدته متوازي الأضلاع $ABCD$. ولتكن M نقطةً من $[SC]$ ولتكن N نقطةً من $[SB]$. نفترض أنّ (MN) يوازي (BC).

❶ أثبت أنّ المستقيمين (AD) و (NM) متوازيان.



❷ في المستوي $(ADMN)$، يتقاطع المستقيمان (AN) و (DM) في النّقطة P.

☝ أثبت أنّ P تنتمي إلى كلٍّ من المستويين (SAB) و (SDC).

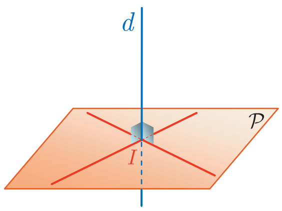
✌ أثبت أنّ المستقيم (SP) هو الفصل المشترك للمستويين (SAB) و (SDC).

👌 استنتج أنّ (SP) يوازي (AB).

4 التّعامد في الفراغ

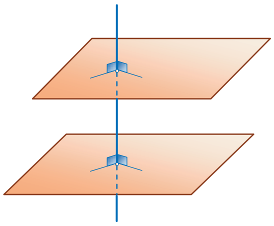
تعامد مستقيم ومستوٍ

تعريف



لتكن I نقطة تقاطع مستقيمٍ d مع مستوٍ $\mathcal{P}$. نقول إنّ المستقيم d عموديٌّ على $\mathcal{P}$ إذا كان d عموديّاً على مستقيمين مختلفين من $\mathcal{P}$ يمرّان بالنّقطة I. وعندها، **نقبل** أنّ المستقيمَ d يكون عموديّاً على جميع مستقيمات المستوي $\mathcal{P}$ المارّة بالنّقطة I.

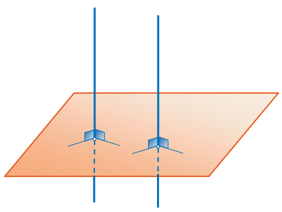
مُبرهَنة 5



المستويان العموديّان على المستقيم نفسه متوازيان.

المستقيم العموديّ على أحد مستويين متوازيين عموديٌّ على الآخر.

مُبرهَنة 6

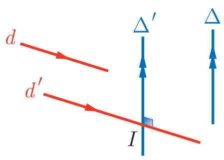


المستقيمان العموديّان على المستوي نفسه متوازيان.

المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين عموديٌّ على الآخر.

تعامد مستقيمين في الفراغ

تعريف

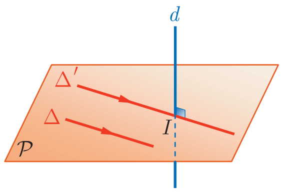


ليكن لدينا مستقيمان d و Δ غير واقعين في مستوٍ واحد بالضّرورة. نقول إنّ المستقيمين d و Δ متعامدان، إذا كان المستقيم d'، المارّ بنقطةٍ ما I موازياً d، عموديّاً على المستقيم Δ' المارّ بالنّقطة I نفسها موازياً Δ.

تبقى هذه الخاصّة صحيحة أياً كانت النقطة I.

مُبرهَنة 7

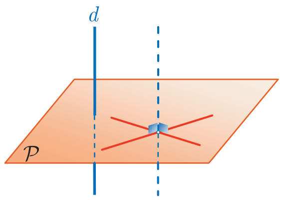
ليكن d مستقيماً عموديّاً على المستوي $\mathcal{P}$. عندئذ يكون d عموديّاً على كلِّ مستقيم Δ محتوى في $\mathcal{P}$.



لأنّ d عموديّ على المستقيم Δ' المارّ بالنّقطة I موازياً Δ.

مُبرهَنة 8

حتّى يكون مستقيم d عموديّاً على مستوٍ $\mathcal{P}$ يكفي أن يكون d عموديّاً على مستقيمين متقاطعين يحتويهما المستوي $\mathcal{P}$.

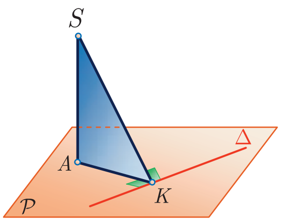


مُبرهَنة 9

كلُّ مستقيمٍ عموديٍّ على أحد مستقيمين متوازيين يكون عموديّاً على الآخر.

مثال

(SA) مستقيمٌ عموديٌّ على مستوٍ $\mathcal{P}$ في A، و Δ مستقيم في $\mathcal{P}$ **لا** يمرّ بالنّقطة A. ليكن K المسقطَ القائمَ للنّقطةِ A على Δ. برهن أنّ المستقيم Δ عموديٌّ على المستوي (SAK).



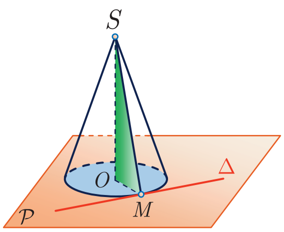
الحل

في الحقيقة، المستقيمُ Δ عموديٌّ على (AK) استناداً إلى الفرض. والمستقيم Δ عموديّ على (SA) لأنّ (SA) عموديّ على المستوي $\mathcal{P}$ فهو عموديّ على جميع مستقيماته ومن بينها Δ وذلك عَمَلاً بالمُبرهَنة 7. إذن المستقيمُ Δ عموديٌّ على المستوي (SAK) لأنّه عموديٌّ على المستقيمين المتقاطعين (AK) و (SA) اللّذين يحويهما المستوي (SAK) وذلك بناءً على المُبرهَنة 8.

مثال

إثبات تعامد مستقيم مع مستوٍ

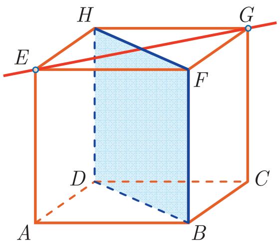
ليكن $\mathcal{C}$ مخروطاً دورانياً رأسه S. وليكن O مركزَ قاعدته الواقعة في المستوي $\mathcal{P}$. نتأمّل في المستوي $\mathcal{P}$ مستقيماً Δ يمسّ قاعدة المخروط في نقطة M منها. أثبت أنّ Δ عموديٌّ على المستوي (SOM)، واستنتج أنّه عموديٌّ على المولِّد (SM).



الحل

- لإثبات المطلوب يكفي أن نبرهن أنّ Δ عموديٌّ على مستقيمين متقاطعين في المستوي (SOM).
- ولكنّ Δ عموديٌّ على (OM) لأنّه مماسٌّ لدائرة قاعدة المخروط، و $[OM]$ نصف قطر فيها.
- نحن إذن أمام الوضع المبيّن في المثال السابق وقد استبدلنا بالمستقيم (AK) المستقيم (OM)، وبالمستقيم (SA) المستقيم (SO). وعليه يكون Δ عمودياً على المستوي (SOM). ويكون من ثَمّ عموديّاً على جميع مستقيمات المستوي (SOM) عموماً، وعلى المستقيم (SM) خصوصاً.

مثال إثبات تعامد مستقيم مع مستوٍ



ليكن المكعّب $ABCDEFGH$. أثبت أنّ المستقيم (EG) عموديٌّ على المستوي $(DBFH)$.

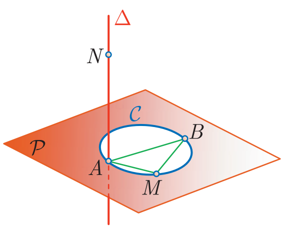
الحل

- يكفي برهان أنّ (EG) عموديٌّ على مستقيمين متقاطعين واقعين في المستوي $(DBFH)$.
- القطعتان المستقيمتان $[EG]$ و $[HF]$ هما قطرا المربّع $HEFG$. إذن المستقيمان (EG) و (HF) متعامدان.
- المستقيم (BF) عموديٌّ على المستوي $(EFGH)$ فهو عمودي على جميع مستقيماته. وبوجهٍ خاصٍّ (BF) عموديٌّ على (EG).

وهكذا نرى أنّ (EG) عموديٌّ على المستقيمين المتقاطعين (BF) و (FH)، فهو عموديٌّ على المستوي $(DBFH)$.

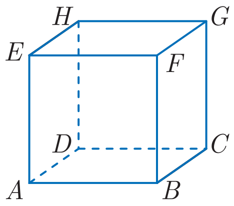
تدرّب

لتكن $\mathcal{C}$ دائرةً في المستوي P قطرها $[AB]$، وليكن Δ المستقيم العموديّ في A على المستوي P. نتأمّل نقطة M من $\mathcal{C}$، ونقطة N من Δ.



1. أثبت أنّ المستقيمين (MA) و (MB) متعامدان.
2. أثبت أنّ المستقيم (MB) عموديٌّ على المستوي (AMN).
3. استنتج أنّ المستقيمين (MB) و (MN) متعامدان.

تمرينات ومسائل



1 نتأمّل المكعّب $ABCDEFGH$. بيّن الإجابات الصحيحة من بين الإجابات الثّلاث المقترحة فيما يأتي :

♣ المستقيم (EA) يوازي :

① المستوي (HFB).　② المستقيم (HB).　③ المستقيم (CG).

♣ المستوي (EAB) يوازي :

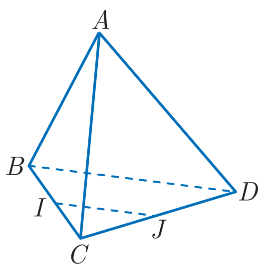
① المستقيم (HD).　② المستوي (HGC).　③ المستوي (HGB).

♣ المستقيم (HG) عمودي على :

① المستوي (FGC).　② المستوي (EAD).　③ المستقيم (AE).

♣ إذا كان $AB = 2$ فطول القطعة المستقيمة $[HB]$ يساوي :

① $2\sqrt{3}$.　② $\sqrt{3}$.　③ $\sqrt{12}$.



2 نتأمّل رباعيّ وجوه منتظمٍ $ABCD$، أي وجوهه مثلّثات متساوية الأضلاع. لتكن النّقطة I منتصفَ $[BC]$ والنّقطة J منتصفَ $[CD]$. بيّن الإجابات الصحيحة من بين الإجابات الثّلاث المقترحة فيما يأتي :

♣ المستقيم (IJ) يوازي :

① المستقيم (BD).　② المستوي (BAD).　③ المستقيم (AB).

♣ تقاطع المستويين (AIJ) و (ABC) هو :

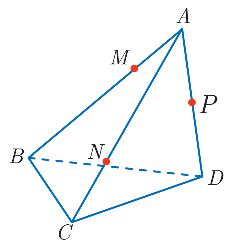
① المستقيم (AB).　② المستقيم (AI).　③ المستقيم (IJ).

♣ في رباعي الوجوه $ABCD$ يكون :

① $AI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$.　② AIJ متساوي السّاقين.　③ AIJ متساوي الأضلاع.

لنتعلّم البحث معاً

3 نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. النّقطة M هي النّقطة من القطعة المستقيمة $[AB]$ التي تُحقِّق المساواة $AM=\frac{1}{4}AB$، والنّقطة N هي النّقطة من $[AC]$ الّتي تُحقّق المساواة $AN=\frac{3}{4}AC$، وأخيراً، النّقطة P هي منتصف $[AD]$.



① أثبت أنّ (MN) يقطع (BC)، وأنّ (NP) يقطع (CD)، وأنّ (MP) يقطع (BD).

② نسمّي I و J و K نقاط التّقاطع السّابقة بالتّرتيب. أثبت وقوعَ هذه النّقاط على استقامةٍ واحدة.

نحو الحلّ

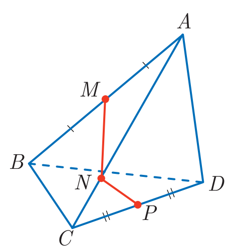
بحثاً عن نتائجَ مباشرة. المستقيم (MN) محتوى في المستوي (ABC). ارسم المثلّث ABC وضَعْ عليه النّقطتين M و N محترماً النِّسب في نصّ المسألة. هل المستقيمان (MN) و (BC) متوازيان؟ كرّر الأسلوب نفسه لإتمام حلّ السؤال الأوّل.

بحثاً عن طريق. ارسم النّقاط I و J و K؛ نقاط تقاطع المستقيمات (MN) و (NP) و (MP) مع المستوي (BCD) بالتّرتيب. كي نبرهن وقوع I و J و K على استقامة واحدة يكفي أن نبرهن أنّها تنتمي إلى تقاطع مستويين. عيّن هذين المستويين.

أنجزِ الحلَّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

4 نتأمّل رباعيّ وجوهٍ $ABCD$. لتكن M منتصفَ $[AB]$، ولتكن P منتصفَ $[CD]$، وأخيراً لتكن N نقطةً من $[AC]$ تُحقِّق $AN=\frac{3}{4}AC$.

المطلوب هو رسم تقاطع المستوي (MNP) مع وجوه رباعيّ الوجوه $ABCD$.



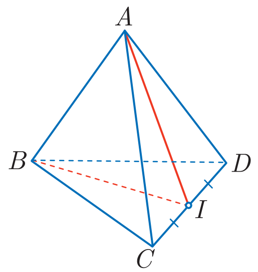
نحو الحلّ

بحثاً عن نتائجَ مباشرة. تنتمي النّقطتان M و N في آن معاً إلى كلّ من الوجه ABC والمستوي (MNP). إذن، القطعةُ المستقيمة $[MN]$ هي تقاطعُ هذا الوجه مع المستوي (MNP). ويمكننا أن نستنتج بأسلوبٍ مماثل أنّ $[NP]$ هو تقاطع الوجه ACD مع المستوي (MNP).

✌ بحثاً عن طريق. بقي أن نعيّنَ تقاطعَ المستوي (MNP) مع الوجهين الآخرين، لذلك نهتمُّ بتقاطع هذا المستوي مع مستويَيْ هذين الوجهين.

- لماذا يتقاطع المستقيم (MN) مع المستوي (BCD)؟ لتكن I نقطة التقاطع هذه.
- لماذا يكون المستقيمُ (IP) تقاطعَ المستويين (MNP) و (BCD)؟
- استنتج أنّ تقاطع (MNP) والوجه BCD هو القطعة المستقيمة $[PQ]$ وعيّن Q.

أنجزِ الرّسمَ المطلوب.



5 نتأمّل رباعيَّ وجوهٍ منتظماً $ABCD$. ونضعُ عليه النّقطة I منتصف $[CD]$. نرسم القطعتين المستقيمتين $[AI]$ و $[BI]$. المطلوب إثباتُ أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متعامدان.

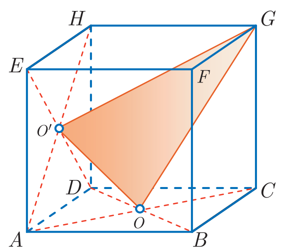
نحو الحلّ

✌ بحثاً عن نتائجَ مباشرة. وجوه $ABCD$ مثلّثات متساوية الأضلاع، والنقطة I هي منتصف الضلع $[CD]$، ماذا يمكنك القول إذن عن $[AI]$ و $[BI]$ في المثلّثين ACD و BCD ؟

✌ بحثاً عن طريق. لإثبات تعامد المستقيمين (AB) و (CD) يكفي أن نثبتَ أنّ أحدهما عمودي على مستوٍ يحوي الآخر. إذن يكفي أن نثبت أنّ (CD) عمودي على مستوٍ يحوي (AB) أو أنّ (AB) عمودي على مستوٍ يحوي (CD).

- نتائج النقطة السابقة تبيِّن لنا أيَّ الخيارين السابقين هو الأنسب.
- بيِّن لماذا يكون المستقيمُ (CD) عموديّاً على المستوي (ABI) ؟
- استنتج أنّ (CD) عموديٌّ على (AB).

أنجزِ الحلَّ واكتبه بلغةٍ سليمة.



6 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$ طول ضلعه $4\,\text{cm}$. فيه O و O' مركزَا الوجهين $ABCD$ و $ADHE$ بالترتيب. احسب أطوال أضلاع المثلّث OGO'.

نحو الحلّ

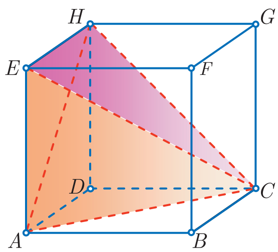
✌ بحثاً عن نتائج مباشرة. عندما نريدُ حسابَ أطوال أو زوايا في الفراغ، نبحثُ عن أشكالٍ مستوية حتّى نتمكّن من الاستفادة من المبرهنات المعروفة في الهندسة المستوية. مثل مُبرهَنة فيثاغورث، أو مُبرهَنة تالس أو غيرهما.

✌ بحثاً عن طريق. نريدُ حساب أطوال أضلاع المثلّث OGO'.

- نبحث عن شكل يفيد في حساب OO'، ولكنّ O مركز المربّع $ABCD$، إذن O منتصف $[AC]$، وكذلك O' منتصف $[AH]$. ارسم المثلّث AHC واستنتج OO'.
- لنبحث عن شكل يفيد في حساب OG. إنّ $[OG]$ ضلعٌ في كلٍّ من المثلّثات GOB، و GOC و GOF وغيرها. لماذا ترى من المفيد اختيار المثلّث GOC؟ ارسم المثلّث GOC واستنتج OG.
- أعد الطريقة السّابقة لحساب $O'G$.

أنجِزِ الحلّ واكتبه بلغةٍ سليمة.

7 نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$ طول ضلعه $4\,\text{cm}$. ارسم مخططاً شبكيّاً يمثّل الشّكل المستوي المتّصل الممثِّل لسطح رباعيّ الوجوه $EACH$.



نحو الحلّ

✌ بحثاً عن نتائج مباشرة. إنّ $[AC]$ و $[CH]$ و $[HA]$ أقطار مربّعات طول ضلع كلٍّ منها $4\,\text{cm}$. ما نوع المثلّث ACH؟

✌ بحثاً عن طريق.

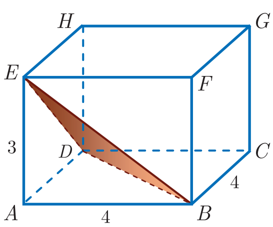
- لرسم الشّكل المستوي المتّصل الممثِّل لرباعيّ الوجوه $EACH$ نرسم وجوه هذا المجسّم واحداً تلوَ آخر بعد أن نختار للبدء وجهاً يَسْهُلُ رسمه.
- بعد المناقشة السّابقة يمكننا أن نبدأ بالمثلّث ACH. أنشئ هذا المثلّث انطلاقاً من مربّع طول ضلعه $4\,\text{cm}$.
- أثبت أنّ بقيّة أوجه رباعيِّ الوجوه في قَيْدِ الدراسة هي مثلّثات قائمة، ثُمّ عيّن الزّاوية القائمة في كلٍّ منها.
- أنجز رسم الشّكل المستوي المتّصل الذي يمثّل سطح رباعيّ الوجوه $EACH$.

8 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه :

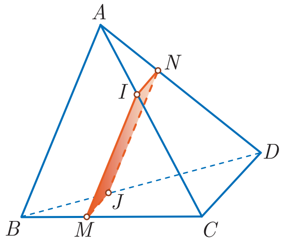
$$AB = BC = 4\,\text{cm} \quad \text{و} \quad AE = 3\,\text{cm}$$

① أثبت أنّ المثلّثَ EBD مثلّثٌ متساوي السّاقين.

② ارسم بالقياس الحقيقيّ مخططاً شبكيّاً يمثّل الشّكل المستوي المتّصل الموافق لسطح $EABD$.

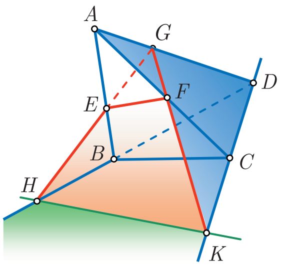


9 ليكن لدينا رباعيُّ الوجوه $ABCD$. ولتكن M نقطة من $[BC]$.
نرسمُ من M مستقيماً موازياً للمستقيم (AB) فيقطعُ (AC) في I،
ونرسمُ كذلك مستقيماً موازياً للمستقيم (CD) فيقطعُ (BD) في J،
المستوي (MIJ) يقطع المستقيم (AD) في N.



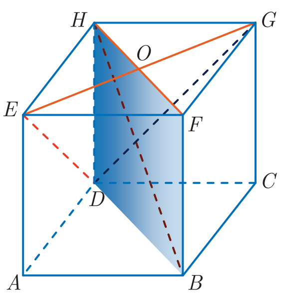
① أثبت أنّ كلاً من المستقيمين (IN) و (MJ) يوازي المستقيم (CD).
② أثبت أنّ كلاً من المستقيمين (JN) و (IM) يوازي المستقيم (AB).
③ ما نوع الرباعيّ $IMJN$؟

10 ليكن لدينا رباعيُّ الوجوه $ABCD$. ولتكن E نقطةً من $[AB]$،
و F نقطةً من $[AC]$، و G نقطةً من $[AD]$. نفترض أنّ المستقيمين
(EF) و (BC) غير متوازيين. وكذلك الأمر بالنِّسبة إلى المستقيمين
(FG) و (CD) والمستقيمين (EG) و (BD).



① عيّن تقاطع المستوي (EFG) مع كلٍّ من المستويات (ABC) و (ACD) و (ABD).
② لإنشاء تقاطع المستوي (EFG) مع المستوي (BCD) فعلنا ما يأتي :
" عرّفنا K نقطة تقاطع (GF) مع (CD)، وعرّفنا H نقطة تقاطع (GE) مع (BD).
فيكون المستقيم (HK) هو تقاطع المستويين (EFG) و (BCD). "
أثبت صحّة هذا الإنشاء.
③ لتكن I نقطة تقاطع (EF) مع (BCD). هل تتقاطعُ المستقيماتُ (BC) و (HK) و (EF)
في I؟

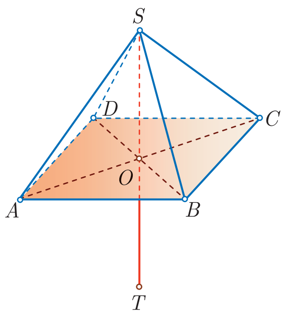
11 ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً طول ضلعه $4\,\text{cm}$، وليكن O مركز المربّع $EFGH$.



① أثبت أنّ المستقيم (OD) هو الفصل المشترك للمستويين (EDG)
و $(HDBF)$.
② ارسم بالقياس الحقيقيّ المستطيل $HFBD$ وعيِّن عليه النّقطة O.
③ أثبت أنّ المستقيمين (HB) و (OD) متعامدان.
④ أثبت كذلك تعامد المستقيمين (HD) و (EG). واستنتج أنّ (EG)
عموديٌّ على المستوي $(HFBD)$، وأنّه من ثَمّ عموديٌّ على (HB).
⑤ أثبت أنّ (HB) عموديٌّ على المستوي (DEG).

12 ليكن $ABCDEF$ موشوراً قائماً قاعدتاه ABC و DEF. ولتكن النّقطة I منتصف (EF) و O مركز المستطيل $BCFE$. وأخيراً لتكن M نقطة تقاطع (AO) مع المستوي (DEF).
أثبت أنّ الرباعيّ $EDFM$ متوازي الأضلاع.

13 ليكن $SABCD$ هرماً منتظماً قاعدته المربّع $ABCD$ الذي مركزه O. نفترض أنّ :



$$OS = OA = OB = OC = OD = a$$

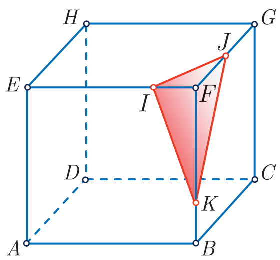
ونعرّف T نظيرة S بالنّسبة إلى O.

① أثبت أنّ $\widehat{SAC} = 45^\circ$ و $\widehat{SBD} = 45^\circ$.

② أثبت أنّ الرباعيَّين $SATC$ و $SBTD$ مربّعان.

③ أثبت أنّ الوجوه الثمانية للمجسّم $SABCDT$ مثلّثات متساوية الأضلاع. ما اسم هذا المجسّم ؟

14 ليكن $ABCDEFGH$ مكعّباً طول ضلعه $4\,\text{cm}$. ولتكن I نقطة من $[FE]$، و K نقطة من $[FB]$ و J نقطة من $[FG]$ تُحقِّق الشروط:

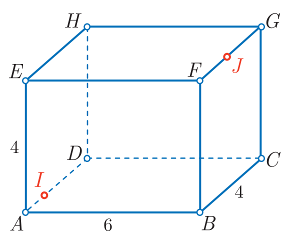


$$FI = 1\,\text{cm} \quad \text{و} \quad FJ = 3\,\text{cm} \quad \text{و} \quad FK = 2\,\text{cm}$$

ارسم بالقياس الحقيقي مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً لسطحَيْ جزأيْ المكعّب بعد قطعه وفق المستوي (IJK).

مساعدة : استعمل الفرجار لتتجنّب حساب IJ و JK و KI.

15 ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات، فيه:



$AE = BC = 4\,\text{cm}$ و $AB = 6\,\text{cm}$.

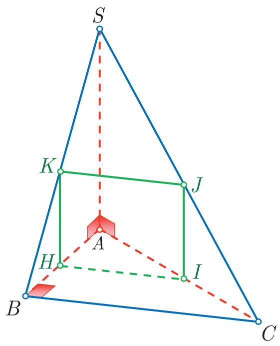
لتكن النقطة J منتصف $[FG]$، و النقطة I من $[AD]$ التي تحقّق الشّرط $AI = 1\,\text{cm}$.

ارسم، على سطح متوازي المستطيلات هذا، أقصر طريق يصل بين I و J.

مساعدة : ارسم بالقياس الحقيقيّ مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً مناسباً لسطح $ABCDEFGH$.

16 ليكن لدينا رباعيّ الوجوه المنتظم $ABCD$، نفترض أنّ $AB = 5\,\text{cm}$. ولتكن I و J و K منتصفات حروفه $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ بالترتيب. ارسم بالقياس الحقيقيّ مخطّطاً شبكيّاً مستوياً متّصلاً يمثّل سطح المجسّم الذي نحصل عليه بعد حذف رباعيّ الوجوه $AIJK$ من رباعيّ الوجوه $ABCD$.

17 ليكن رباعيّ الوجوه $SABC$ الذي نفترض فيه أنّ (SA) عموديٌّ على (ABC) وأنّ المثلّث ABC قائمٌ في B.



① ❶ أثبت أنّ المستقيمين (BC) و (SA) متعامدان.

❷ أثبت أنّ المثلّث SBC قائم في B.

② لتكن H نقطة من $[AB]$، نرسم المستوي المارّ بالنّقطة H عموديّاً على (AB)، فيقطع (AC) في النّقطة I، ويقطع (SC) في J، ويقطع (SB) في K.

❶ أثبت أنّ المستقيمين (BC) و (HI) متوازيان.

❷ أثبت أنّ المستقيمين (HI) و (KJ) متوازيان.

❸ أثبت كذلك أنّ المستقيمين (KH) و (SA) متوازيان. واستنتج توازي (KH) و (IJ).

❹ أثبت أنّ $HIJK$ مستطيل.

③ نفترض أنّ $AB = 1$ وأنّ $SA = BC = 2$ وأنّ $AH = x$.

❶ أثبت أنّ $HI = 2x$ بتطبيق نظريّة تالس في المثلّث ABC.

❷ أثبت أنّ $HK = 2(1-x)$ بتطبيق نظريّة تالس في المثلّث SAB.

❸ احسب $\mathcal{A}(x)$: مساحة المستطيل $HIJK$ بدلالة x.

④ ❶ أثبت أنّ $4x(1-x) = 1-(1-2x)^2$.

❷ ما هي قيمة x الّتي تجعل $\mathcal{A}(x)$ أكبر ما يمكن؟ عيِّن عندئذ موضع H على $[AB]$ وبيِّن طبيعةَ الرّباعيّ $HIJK$ في هذه الحالة.

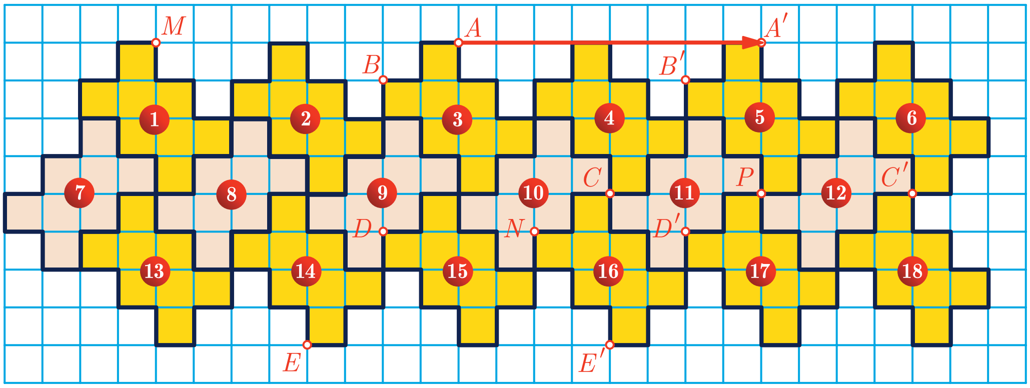
3 الأشعّة والهندسة التّحليليّة

لا يُعرفُ أصلُ قاعدةِ متوازي الأضلاعِ في جمع الأشعَّة نظراً إلى بساطتها وحدسيتها، وقد تكون قد وردت في عمل ضاعت آثاره لأرسطوطاليس، وهي موجودة في ميكانيك هيرون الاسكندري من القرن الأوّل للميلاد، وهي أوّل النّتائج الواردة في كتاب اسحق نيوتن الّذي حمل اسم مبادئ الرياضيات **Principia Mathematicæ (1687)**.
لقد تعامل نيوتن حصرياً مع مقادير شعاعيّة مثل السّرعة والقوّة، ولم يذكر مفهوم الشّعاع بصفته مفهوماً قائماً بذاته. أمّا الدّراسة المنهجيّة للأشعة فهي من نتاج القرنين التّاسع عشر والعشرين.

نَشَأَت الأشعّة أوّل ما نشأت في العقدين الأوّلين من القرن التّاسع عشر مع التّمثيل الهندسيّ للأعداد العقديّة، حيثُ نظر عددٌ من العلماء، مثل وِسل **Wessel** وآرغاند **Argand** وغاوس **Gauss** وغيرهم، إلى الأعداد العقديّة بصفتها نقاطاً في المستوي، أو أشعّة ثنائيّة الأبعاد. ثُمّ تتالتْ أعمالُ العديد من العلماء مثل هاملتون وغراسمان وغيرهما لتضعَ هذا المفهوم في صيغته الحاليّة، حيثُ أصبحت الأشعّة في صُلب العديد من المفاهيم في الفيزياء والرّياضيّات التطبيقيّة.

1 مقدّمة عامّة

لنتأمّل الشّكل الآتي النّاتج عن رصف مقاطع زخرفيّة متماثلة، ولنحاول الإجابة عن الأسئلة الآتية :



① انسحاباتٌ مختلفة

❶ في كلٍّ من الحالات الآتية عيّن صورة كلٍّ من المقطعين ❸ و ❹ وفق الانسحاب:

- $T_{A\to A'}$ الّذي ينقل A إلى A'.
- $T_{A\to P}$ الّذي ينقل A إلى P.
- $T_{A\to M}$ الّذي ينقل A إلى M.
- $T_{D\to N}$ الّذي ينقل D إلى N.

❷ لنحاول فهم لماذا كان لهذه الانسحابات تأثيرات مختلفة على المقاطع الزخرفية.

- أيكون للمستقيمين (AA') و (AP) **المنحى** نفسه ؟ أي هل هما متوزيان ؟
- للمستقيمات (AA') و (AM) و (DN) المنحى نفسه. قارن **جهة** الانتقال، من A إلى A'، ومن A إلى M، ومن D إلى N.
- قارن **طولَي** AA' و DN.

② انسحابات متماثلة

❶ في كلٍّ من الحالات الآتية عيّن صورة كلٍّ من المقاطع ❷ و ❸ و ❹ و ❼ وفق الانسحاب:

- $T_{A\to A'}$ الّذي ينقل A إلى A'.
- $T_{B\to B'}$ الّذي ينقل B إلى B'.
- $T_{C\to C'}$ الّذي ينقل C إلى C'.
- $T_{D\to D'}$ الّذي ينقل D إلى D'.
- $T_{E\to E'}$ الّذي ينقل E إلى E'.

❷ اشرح لماذا كان لهذه الانسحابات التأثير نفسه على المقاطع الزخرفيّة.

❸ باستعمال نقاط أخرى من الشّكل، اذكر انسحاباً آخر تأثيره على المقاطع الزخرفية يماثل تأثير الانسحاب $T_{A\to A'}$.

③ الأشعّة

الانسحاب الّذي ينقل A إلى A' ينقل أيضاً B إلى B'، وكذلك ينقل C إلى C'، .... نقول إنّ الأزواج (A,A')، (B,B')، (C,C')، ...، التي تكوَّن كلّ منها من نقطة وصورتها وفق هذا الانسحاب تعرّف كائناً واحداً نسميه **شعاعاً** ونرمز إليه بالرّمز $\vec{u}$ (ونقرؤه "الشّعاع u").

نرمز أيضاً إلى هذا الشّعاع بالرّمز $\overrightarrow{AA'}$ للتّذكير بمُمَثّل هذا الشّعاع الّذي مبدؤه A، أو $\overrightarrow{BB'}$ أو $\overrightarrow{CC'}$ أو .... فنكتب

$$\vec{u} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \cdots$$

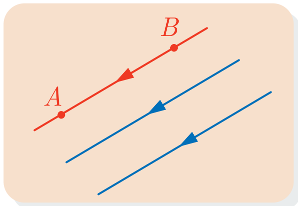
❶ يقول ساطع "الشّعاعان $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{A'A}$ متماثلان". اشرح لماذا جافاه الصواب.

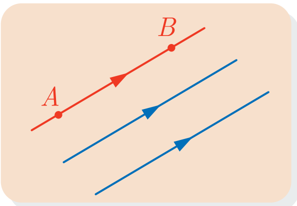
❷ باستعمال النّقاط في الشّكل ، اذكر أشعة أخرى تمثّل كلاً من الشّعاعين $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{ED}$.

2 الأشعّة والمساواة الشّعاعية

المَنحى والجهة

عندما يكون مستقيمان متوازيين نقول إنّ لهما **المنحى** نفسه. وعندما نُعطى منحى ما بواسطة مستقيم (AB) يكون لدينا **جهتان** ممكنتان : جهةٌ من A إلى B، وجهةٌ أخرى من B إلى A.



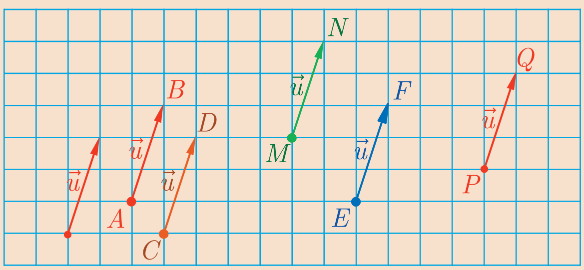


الانسحاب والمساواة الشّعاعيّة

لتكن A و B نقطتين مختلفتين كما في الشّكل . الانسحاب الّذي ينقل A إلى B، ينقل أيضاً C إلى D، و E إلى F، و M إلى N، و P إلى Q. نقرن بهذا الانسحاب **الشّعاع $\vec{u}$** الّذي

- ⊡ **منحاه** : محدد بالمستقيم (AB).
- ⊡ **جهته** : من A إلى B.
- ⊡ **طوله** : طول القطعة المستقيمة $[AB]$.

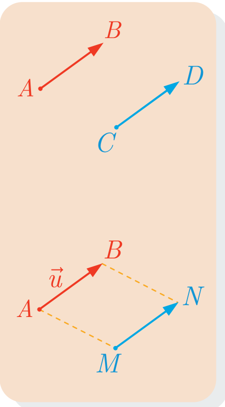
ويمكن أن نرمز إلى هذا الشّعاع أيضاً بالرّمز $\overrightarrow{AB}$ (**بداية** الشّعاع A **ونهايته** B)، أو $\overrightarrow{CD}$ أو $\overrightarrow{EF}$ أو ....



$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$

هذه جميعاً تمثل الشّعاع $\vec{u}$

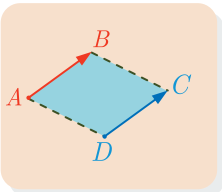
تعريف



- القول إنّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ يعني أنّ الانسحاب الّذي ينقل A إلى B ينقل أيضاً C إلى D، وعندها نسمي هذا الانسحاب : **الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$**.
- القول إنّ شعاعين **متساويان** يعني أنّ لهما **المنحى** نفسه **والجهة** نفسها **والطّول** نفسه.
- لتمثيل شعاع ما $\vec{u}$ يمكننا اختيار **مبدأ** كيفيٍّ لهذا الشّعاع، فإذا كان $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ وكانت M نقطة من المستوي أمكن رسم الشّعاع $\overrightarrow{MN}$ الّذي يحقّق $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.

في الحقيقة لدينا الخاصّة المهمّة الآتية :

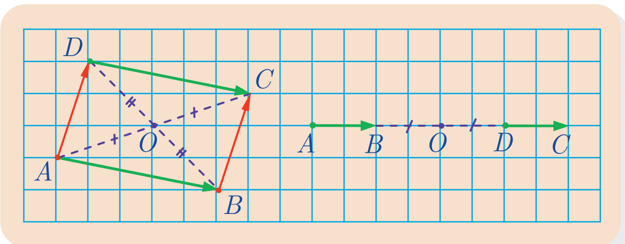
خاصة مهمّة



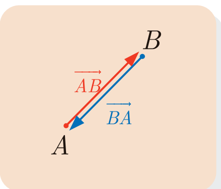
- إذا كان الرّباعيّ $ABCD$ متوازي الأضلاع كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
- وبالعكس، إذا لم تكن النّقاط A و B و C على استقامة واحدة، وكان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ كان الرّباعيّ $ABCD$ متوازي الأضلاع.

فكّر

أصحيح أنّ الشّرط اللازم والكافي لتحقّق المساواة الشّعاعيّة $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ هو أن تكون القطعتان المستقيمتان $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتين، أي أن يكون منتصف $[AC]$ منطبقاً على منتصف $[BD]$ ؟

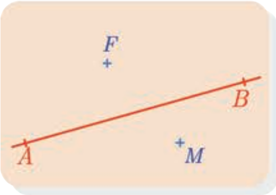


بعض الأشعّة الخاصّة



- **الشّعاع الصّفري** $\vec{0}$: أيّاً كانت النّقطة M من المستوي، كان $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.
- **الشّعاع المعاكس** لشّعاع $\overrightarrow{AB}$: هو الشّعاع الذي منحاه منحى الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ وطويلته تساوي طويلة الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ وجهته عكس جهة الشّعاع $\overrightarrow{AB}$. إنّه إذن الشّعاع $\overrightarrow{BA}$. ونكتب : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

تدرّب

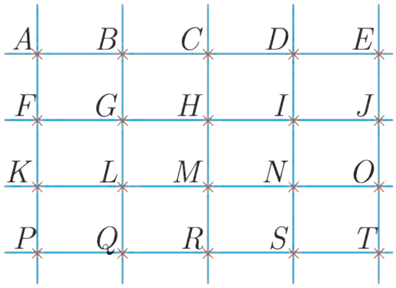


① ليكن $\vec{u}$ الشّعاع الّذي منحاه (AB) وجهته من A إلى B وطوله $3\,\text{cm}$.

❶ ارسم الشّكل المجاور في دفترك.

❷ أنشئ الشّعاعين $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{EF}$ بحيث $\vec{u} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MN}$.

② تأمّل الشّكل التالي، ثمّ املأ الفراغات $\square$ فيما يلي.



❶ $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{M\square}$ ، ❷ $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{M\square}$ ، ❸ $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{\square O}$.

❹ $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{\square L}$ ، ❺ $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{H\square}$ ، ❻ $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{G\square}$.

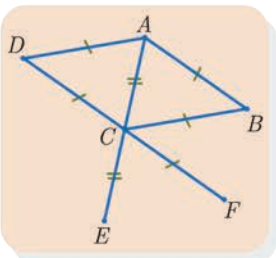
❼ النّقطة I هي صورة $\square$ وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{KC}$.

❽ النّقطة $\square$ هي صورة P وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{GD}$.

❾ النّقطة T هي صورة G وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{S\square}$.

❿ النّقطة N هي صورة C وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\overrightarrow{G\square}$.

③ نتأمّل في الشّكل المجاور معيّناً $ABCD$. لتكن E و F نظيرتي A و D بالنّسبة إلى C بالترتيب. علّل ما يأتي:



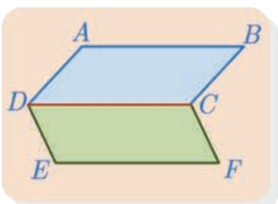
❶ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CF}$

❷ $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

❸ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CE}$

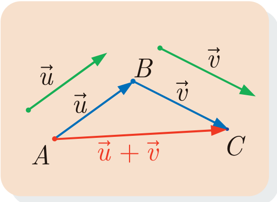
④ $ABCD$ و $CDEF$ هما متوازيا أضلاع بحيث لا تقع النّقاط A و B و E و F على استقامة واحدة.

أثبت أنّ الرّباعيّ $ABFE$ متوازي أضلاع.



3 جمعُ الأشعّة وطرحُها

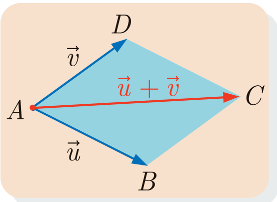
علاقة شال Chasles، طريقة المثلّث



لحساب مجموع الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نختار نقطة A من المستوي ثم نعرّف النّقطة B بالشرط $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$، ونعرّف النّقطة C بالشرط $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. عندئذ يكون $\overrightarrow{AC}=\vec{u}+\vec{v}$.

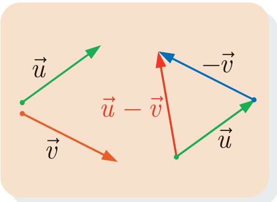
تسمّى المساواة $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ **علاقة شال**، وهي محقّقة أياً كانت النّقاط A و B و C في المستوي.

طريقة متوازي الأضلاع



عندما يكون للشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ المبدأ نفسه A ويكون $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$، عندئذ $\vec{u}+\vec{v}$ يساوي الشّعاع $\overrightarrow{AC}$ حيث C هي النّقطة من المستوي التي تجعل المضلّع $ABCD$ متوازي الأضلاع.

طرح شعاعين



نحصل على حاصل طرح الشّعاع $\vec{v}$ من $\vec{u}$ بجمع الشّعاع $\vec{u}$ إلى الشّعاع المعاكس للشّعاع $\vec{v}$ أي نكتب : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$. كما هو مُوضَّحٌ في الشّكل .

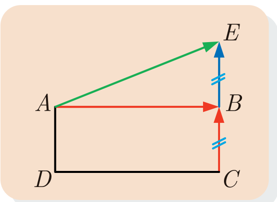
مثال

ليكن $ABCD$ مستطيلاً مركزه O. أنشئ على شكلين مختلفين :

❶ النّقطة E التي تحقّق $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

❷ النّقطة F التي تحقّق $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

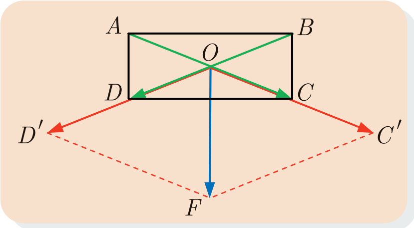
الحل



❶ نعيّن E بالشّرط $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CB}$.

عندها يكون لدينا استناداً إلى علاقة شال :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}$.



❷ هنا لدينا عملية طرح، ولنتذكّر أنّ $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{DB}$، إذن تؤول المسألة إلى تعيين النّقطة F التي تحقّق:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

ننشئ من O الشّعاعين $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{BD}$ فيكون

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}.$$

ثُم ننشئ F باستعمال طريقة متوازي الأضلاع.

مثال

إثبات صحّة مساواة شعاعيّة

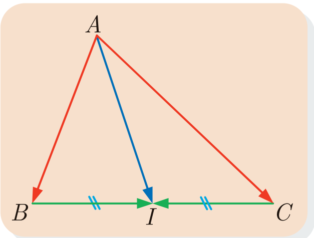
❶ أثبت أنّه أيّاً كانت النّقاط O و A و B من المستوي، فإنّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

❷ لتكن A و B و C ثلاث نقاط في المستوي، وليكن I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$. أثبت أنّ $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

الحل

❶ لنلاحظ أنّ :

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \left(-\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}.$$



❷ للتّعبير عن الشّعاع $\overrightarrow{AI}$ بدلالة الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$، سنحلّل الشّعاع $\overrightarrow{AI}$ بأسلوب يُظهر كلاً من الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

أولاً. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$، وهكذا نحصل على علاقة فيها الشّعاع $\overrightarrow{AB}$.

ثانياً. $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}$، فنحصل على علاقة فيها الشّعاع $\overrightarrow{AC}$.

بجمع العلاقتين السّابقتين طرفاً مع طرف نجد :

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI}$$

ولكنّ النّقطة I هي منتصف $[BC]$ والشّعاعان $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعاكسان أي $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$. إذن

$$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

تدرّب

① لتكن A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. نضع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. أنشئ النّقاط E و F و G و H التي تُحقّق

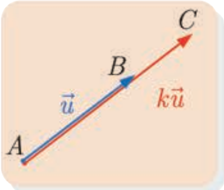
$$\overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v},\quad \overrightarrow{AF} = \vec{u} - \vec{v},\quad \overrightarrow{AG} = -\vec{u} - \vec{v},\quad \overrightarrow{AH} = -\vec{u} + \vec{v}$$

4 ضربُ شعاعٍ بعدد حقيقيّ

تعريف

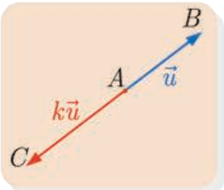
ليكن $\vec{u}$ شعاعاً غير معدوم وليكن k عدداً حقيقيّاً غير معدوم، عندئذ

- جداء ضرب الشّعاع $\vec{u}$ بالعدد الحقيقيّ **الموجب** $k > 0$ هو الشّعاع $k\vec{u}$ المعرّف بالخواصّ الآتية:



1. للشّعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ المنحى نفسه.
2. للشّعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ الجهة نفسها.
3. طول الشّعاع $k\vec{u}$ يساوي جداء ضرب طول الشّعاع $\vec{u}$ بالعدد k.

- جداء ضرب الشّعاع $\vec{u}$ بالعدد الحقيقيّ **السالب** $k < 0$ هو الشّعاع $k\vec{u}$ المعرّف بالخواصّ الآتية:

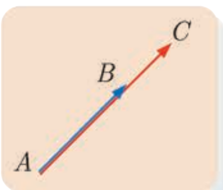


1. للشّعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ المنحى نفسه.
2. للشّعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ جهتان متعاكستان.
3. طول الشّعاع $k\vec{u}$ يساوي جداء ضرب طول الشّعاع $\vec{u}$ بالعدد $-k = |k|$.

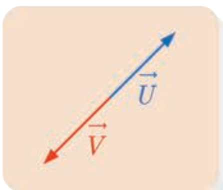
- جرت العادة أن نرمزَ إلى طول شعاع $\vec{u}$ بالرمز $|\vec{u}|$، وعليه يمكن تلخيص العلاقة بين طولَي الشّعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ بالقول إنّ طول الشّعاع $k\vec{u}$ يساوي طول الشّعاع مضروباً بالقيمة المطلقة للعدد k، أي $|k\vec{u}| = |k|\cdot|\vec{u}|$.

عندما يكون $\vec{u} = \vec{0}$ أو $k = 0$، يكون $k\vec{u} = \vec{0}$.

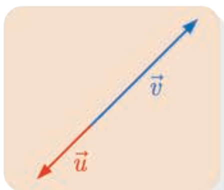
مثال



$\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



$\vec{V} = -\vec{U}$



$\vec{v} = -2\vec{u}$

قواعد الحساب

يمكن إجراء العديد من الحسابات على الأشعّة بأسلوب يشبه ما نفعله مع الأعداد. وبهدف تثبيت هذه العمليات نلخصها فيما يأتي :

مُبرهَنة

ليكن k و k' عددين حقيقيّين، وليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين. عندئذ

1. $k\vec{u} = \vec{0}$ إذا وفقط إذا كان $k = 0$ أو $\vec{u} = \vec{0}$.
2. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
3. $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
4. $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.
5. $1\vec{u} = \vec{u}$.

مثال

- وفق القاعدة الثّالثة : $2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AB} = (2-5)\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AB}$.
- ثُمّ من القاعدة الرّابعة : $-3\overrightarrow{AB} = 3\left(-\overrightarrow{AB}\right) = 3\overrightarrow{BA}$
- بتطبيق القاعدة الثّانية ثُمّ علاقة شال نجد :

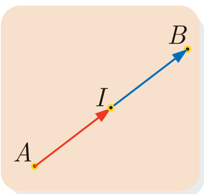
$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 3\overrightarrow{AC}.$$

- من القاعدة الرّابعة نجد : $-5 \times \left(\frac{2}{5}\vec{v}\right) = \left(-5 \times \frac{2}{5}\right)\vec{v} = -2\vec{v}$.
- $3\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ تُكافئ $\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ أي $M = A$ وذلك استناداً إلى القاعدة الأولى.
- يمكننا أن نكتب وفق القاعدة الثّانية : $-5\left(\vec{i} + \vec{j}\right) = -5\vec{i} - 5\vec{j}$.
- تعطينا القاعدة الثّالثة الخاصّة الآتية : أيّاً كان العدد الحقيقيّ x، كان

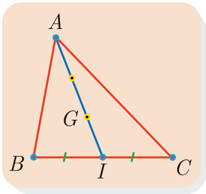
$$(x+2)\vec{i} = x\vec{i} + 2\vec{i}$$

تطبيقات هندسية

① **منتصفُ قطعةٍ مستقيمة** : إنّ منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي النّقطة I التي تحقّق العلاقة : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ أو $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. كما نعبّر عن الخاصّة نفسها بأيّ واحدة من العلاقات الآتية :



$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$



② **مركزُ ثقل مثلّث** : مركز ثقل مثلّث ABC هو نقطة تلاقي متوسطاته، فهو إذن النّقطة G التي تحقّق :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$$

عندما يكون $[AI]$ المتوسّط المرسوم من الرأس A . ونعبّر عن الخاصّة نفسها بالعلاقتين :

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}\,.$$

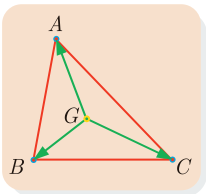
ومن جهة أخرى، نلاحظ باستعمال علاقة شال أنّ

$$\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BI} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI}$$

إذن بجمع هاتين العلاقتين نجد

$$2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BI}$$

ولكن الشّعاعين $\overrightarrow{CI}$ و $\overrightarrow{BI}$ متعاكسان لأنّ I منتصف $[BC]$، إذن $\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ وعليه

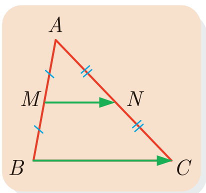


$$2\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

فإذا تذكّرنا أنّ $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI}$ وصلنا إلى المساواة

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

③ لنتأمّل المثلّث ABC . إذا كانت M منتصف الضلع $[AB]$، وكانت N منتصف الضلع $[AC]$، كان $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.



في الحقيقة، يمكننا أن نبرهن صحة هذه النتيجة باستعمال الأشعة كما يأتي :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

تدرّب

ليكن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ شعاعَيْن. في كلٍّ من الحالات الآتية اكتب الشّعاع $\vec{u}$ بالشّكل $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ حيث x و y عددان حقيقيّان.

❶ $\vec{u} = \vec{i} - 2\left(\vec{i} + \vec{j}\right) + \frac{1}{2}\vec{j}$.

❷ $\vec{u} = -\frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{4}\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$.

❸ $\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) - \frac{1}{4}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$.

الحل

يقودنا استعمال القواعد الثّانية والثّالثة والرّابعة مباشرة إلى النتائج الآتية :

❶

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{i} - 2\left(\vec{i} + \vec{j}\right) + \frac{1}{2}\vec{j} = \vec{i} - 2\vec{i} - 2\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{j} \\ &= \left(1-2\right)\vec{i} + \left(-2 + \frac{1}{2}\right)\vec{j} = -\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}\end{aligned}$$

❷

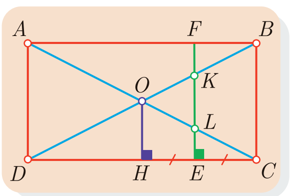
$$\begin{aligned}\vec{u} &= -\frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{4}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) = -\frac{2}{5}\vec{i} + \vec{j} - \frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{4}\vec{j} \\ &= -\frac{2}{5}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{4}\vec{j} = \left(-\frac{2}{5} - \frac{1}{4}\right)\vec{i} + \left(1 + \frac{1}{4}\right)\vec{j} \\ &= -\frac{13}{20}\vec{i} + \frac{5}{4}\vec{j}\end{aligned}$$

❸

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{1}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right) - \frac{1}{4}\left(\vec{i} + \vec{j}\right) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j} \\ &= \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{4}\vec{j} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\vec{i} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\vec{j} \\ &= \frac{1}{4}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j}\end{aligned}$$

تدرّب

① تأمّل الشّكل المجاور، ثُمّ املأ الفراغات فيما يأتي بالأعداد المناسبة



❶ $\overrightarrow{AC} = \cdots\cdots\overrightarrow{OC}$ ❷ $\overrightarrow{AB} = \cdots\cdots\overrightarrow{FB}$ ❸ $\overrightarrow{HD} = \cdots\cdots\overrightarrow{DC}$

❹ $\overrightarrow{AB} = \cdots\cdots\overrightarrow{HE}$ ❺ $\overrightarrow{FB} = \cdots\cdots\overrightarrow{ED}$ ❻ $\overrightarrow{CB} = \cdots\cdots\overrightarrow{KE}$

② بيّن الصواب من الخطأ في العبارات الآتية مُعلِّلاً إجابتك :

❶ إذا كان ABC مثلثّاً متساوي السّاقين كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

❷ إذا كان $ABCD$ متوازي الأضلاع كان $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

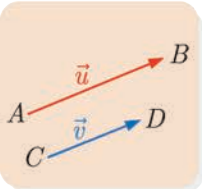
❸ إذا كان $[AI]$ متوسّطاً في المثلّث ABC كان : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

❹ إذا كان $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ كان $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BA}$.

❺ إذا كانت C نظيرة A بالنّسبة إلى منتصف $[BD]$ كان $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

5 الارتباط الخطّيّ لشعاعين

تعريف



نقول إنّ الشّعاعين غير المعدومين $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ **مرتبطان خطيّاً** إذا وفقط إذا وُجد عددٌ حقيقيٌّ k يُحقّق المساواة $\vec{v} = k\vec{u}$. وهذا يُكافئ القول إنّ لهما المنحى ذاته، أو إنّ المستقيمين (AB) و (CD) متوازيان أو طبوقان.

و**نصطلح** أنّ الشّعاع الصّفريّ $\vec{0}$ مرتبط خطّياً بأي شعاع $\vec{u}$، لأنّ $\vec{0} = 0\vec{u}$، وذلك مع أنّه لا معنى للحديث عن منحى الشّعاع الصفريّ إذ لا منحى له.

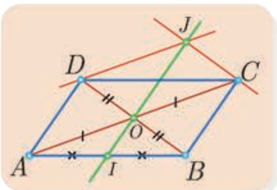
فكّر

تتمثّل أهمّية خاصّة الارتباط الخطّيّ لشعاعين في كونها تعبر عن خواص هندسيّة مهمّة :

- المستقيمان (AB) و (CD) **متوازيان** إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ حقيقيٌّ k يُحقّق : $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
- تقع النّقاط A و B و C **على استقامة واحدة** إذا وفقط إذا وُجِدَ عددٌ حقيقيٌّ k يُحقّق: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

مثال

إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة



ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، وليكن I منتصف القطعة $[AB]$. يقطع المستقيمُ المارّ بالنّقطة D موازياً (AC) المستقيمَ المارّ بالنّقطة C موازياً (BD) في النّقطة J. أثبت أنّ النّقاط O و I و J تقع على استقامة واحدة.

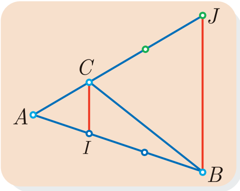
الحل

يبدو من الشّكل أنّه يمكن التّعبير عن الشّعاع $\overrightarrow{OI}$ بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{BC}$. في الواقع إذا تأمّلنا المثلّث ABC وجدنا أنّ I منتصف $[BA]$ وأنّ O منتصف $[AC]$، نستنتج إذن العلاقة (1) الآتية : $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

لنحاول الآن كتابة $\overrightarrow{OJ}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$. ينتج من معطيات المسألة أنّ المضلّع $OCJD$ متوازي الأضلاع ومنه $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC}$. لمّا كانت النّقطة O منتصف $[BD]$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$ ومنه نجد العلاقة (2) الآتية : $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$. بمقارنة العلاقتين (1) و (2) يمكننا أن نكتب $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OJ}$، فالنّقاط O و I و J تقع على استقامة واحدة.

مثال

إثبات توازي مستقيمين



لنتأمّل المثلّث ABC ، ولتكن I النّقطة المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
و J النّقطة المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.

❶ اكتب $\overrightarrow{IC}$ و $\overrightarrow{BJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

❷ استنتج أنّ المستقيمين (IC) و (BJ) متوازيان.

الحل

انطلاقاً من علاقة شال يمكننا أن نكتب $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$. ومن الفرْض لدينا $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ فنحصل على العلاقة الآتية : $\overrightarrow{IC} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ومنها

$$3\overrightarrow{IC} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

نكتب بأسلوب مماثل انطلاقاً من علاقة شال : $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$ ، ولكن $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ ومنه العلاقة الآتية :

$$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

بمقارنة العلاقتين (1) و (2) نجد : $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$. نستنتج إذن أنّ الشّعاعين $\overrightarrow{BJ}$ و $\overrightarrow{IC}$ مرتبطان خطياً فالمستقيمان (IC) و (BJ) متوازيان.

تدرّب

① نتأمّل متوازي أضلاع $ABCD$. ونعرّف النّقطتين M و N بالعلاقتين

$$\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

❶ ارسم شكلاً مناسباً.

❷ استنتج أنّ المستقيمين (AM) و (DN) متوازيان.

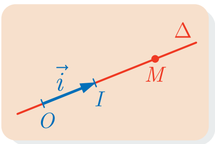
② ليكن ABC مثلّثاً. لتكن I منتصف $[AB]$، و J النقطة المُعرّفة بالمساواة $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.
وأخيراً لتكن G النّقطة التي تجعل الرّباعيّ $JCGI$ متوازي الأضلاع.

❶ أثبت أنّ النّقطة G هي منتصف $[AJ]$.

يكفي أن نبرهن أنّ G تحقّق إحدى الخواص المميّزة لنقطة المنتصف كأن نبرهن أنّ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GJ} = \vec{0}$ باستعمال علاقة شال.

❷ أثبت أنّ النقطة G هي مركز ثقل المثلّث ACI .

6 مقدّمة في الهندسة التّحليليّة

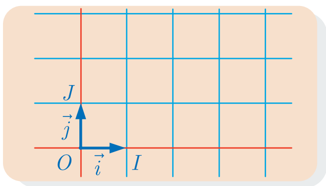
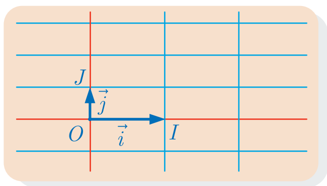
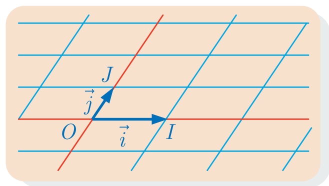


اختيار مَعلَم على مستقيم Δ، يعني اختيار نقطتين O و I من هذا المستقيم بهذا التّرتيب. نسمّي O **المبدأ** ونعرّف الشّعاع $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$، الّذي نسمّيه **شّعاع الأساس** ونرمز إلى **المَعلَم** بالرّمز $(O;\vec{i})$. وتكون **فاصلة** النّقطة M من المستقيم Δ في المَعلَم $(O;\vec{i})$ هي العدد الحقيقيّ الوحيد x الّذي يحقّق: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.

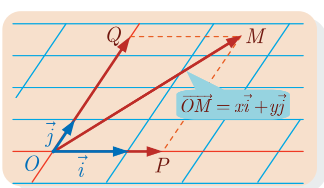
تعيين نقطة في المستوي

اختيارُ مَعلَم في المستوي يعني إعطاء ثلاث نقاط، ليست على استقامة واحدة، O و I و J بهذا التّرتيب. نسمّي O **المبدأ** ونعرّف الشّعاعين غير المرتبطين خطّياً $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ نسمّيهما **شعاعَي الأساس**. نرمز إلى **المَعلَم** بالرمز $(O;\vec{i},\vec{j})$. ونسمّي المستقيم (OI) **محور الفواصل** والمستقيم (OJ) **محور التراتيب**.

في المستوي هناك ثلاثة أنواع من المعالم، المَعلَم الكيفي والمَعلَم المتعامد والمَعلَم المتجانس كما هو موضح في الشّكل الآتي :

مَعلَم متجانس	مَعلَم متعامد	مَعلَم كيفي
		
$(OI) \perp (OJ)$ و $OI = OJ$	$(OI) \perp (OJ)$	

لنتأمّل مَعلَماً $(O;\vec{i},\vec{j})$ في المستوي ولتكن M نقطة من المستوي.



- إذا لم تكن M واقعة على أحد محورَي المَعلَم، أنشأنا من M موازياً لمحور التّراتيب (OJ) فيقطع محور الفواصل في P، وموازياً لمحور الفواصل (OI) فيقطع محور التّراتيب في Q. نستنتج أنّ الرّباعيّ $OPMQ$ متوازي الأضلاع وأنّ

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$$

ينتج مما سبق أنّه يوجد عددان حقيقيّان x و y بحيث يكون $\overrightarrow{OP} = x\vec{i}$ و $\overrightarrow{OQ} = y\vec{j}$ ومن ثَمّ $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. ونقبل أنّ الثّنائيّة (x,y) التي تحقّق العلاقة $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ وحيدة.

- إذا كانت M على محور الفواصل فثمّة عدد حقيقيّ x يحقّق $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$. وإذا كانت M على محور التراتيب فثمّة عدد حقيقيّ y يحقّق $\overrightarrow{OM} = y\vec{j}$.

ومنه التّعريف الآتي :

تعريف

نقول إنّ (x,y) هما **إحداثيتا** النّقطة M في مَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ إذا وفقط إذا تحقّقت المساواة : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$، ونكتب $M(x,y)$.

نسمّي x **فاصلة** النّقطة M ونسمّي y **ترتيبها**.

يفيد اختيار مَعلَم في المستوي في معالجة المسائل الهندسيّة بطرائق حسابيّة إذ نستعيض عن النّقطة M بزوج من الأعداد الحقيقيّة هو الثنائيّة (x,y) التي تمثّل إحداثيّتي النّقطة M.

مثال

لنتأمّل مَعْلَماً متعامداً $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

❶ مثّل في المستوي النّقاط الآتية

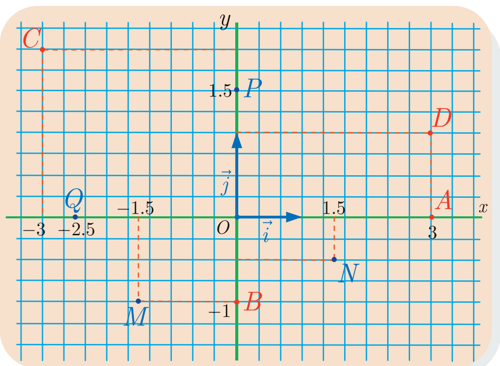
$$M\left(-1.5,-1\right) \text{ و } N\left(1.5,-0.5\right) \text{ و } P\left(0,1.5\right) \text{ و } Q\left(-2.5,0\right)$$

❷ مثّل في المستوي نفسه النّقاط A و B و C و D التي تُحقّق

$$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} \text{ و } \overrightarrow{OB} = -\vec{j} \text{ و } \overrightarrow{OC} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \text{ و } \overrightarrow{OD} = 3\vec{i} + \vec{j}.$$

الحل

❶ لنتذكّر أوّلاً أنّ الإحداثيّة الأولى تمثّل فاصلة النّقطة في حين أنّ الإحداثيّة الثّانية تمثّل ترتيب النّقطة. لمّا كانت فاصلة النّقطة P معدومة استنتجنا أنّها واقعة على محور التّراتيب. ولمّا كان ترتيب النّقطة Q معدوماً استنتجنا أنّها واقعة على محور الفواصل. أخيراً يبيّن الشّكل جانباً مواضع النّقطتين M و N.



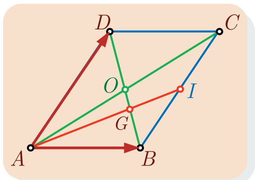
❷ لنبحث أوّلاً عن إحداثيّات النّقاط A و B و C و D. لمّا كان $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i}$ استنتجنا أنّ $A(3,0)$، وأنّ A تقع على محور الفواصل. ولمّا كان $\overrightarrow{OB} = -\vec{j}$ استنتجنا أنّ $B(0,-1)$ وأنّ B تقع على محور التّراتيب. ونجد بأسلوب مماثل أنّ $C(-3,2)$ و $D(3,1)$.

مثال

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. وليكن G مركز ثقل المثلّث ABC. عيّن إحداثيات النّقاط A و B و C و D و O و G في المَعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.

لتعيين إحداثيتي نقطة M في مَعلَم $(A;\vec{u},\vec{v})$ يجب التعبير عن الشّعاع $\overrightarrow{AM}$ بدلالة شعاعي الأساس $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

الحل



النّقطة A هي مبدأ المَعلَم إذن $A(0,0)$. والنّقطة B هي نهاية شعاع الأساس على محور الفواصل إذن $B(1,0)$. وبالأسلوب نفسه نجد أنّ $D(0,1)$.

ولمّا كان $ABCD$ متوازي أضلاع استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=1\cdot\overrightarrow{AB}+1\cdot\overrightarrow{AD}$، إذن $C(1,1)$. وكذلك نتذكّر أنّ O هي منتصف $[AC]$، إذن

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

ومنه $O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

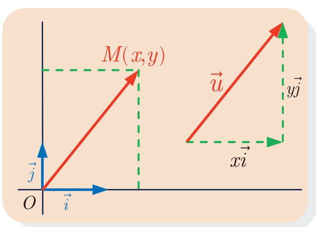
وأخيراً لتكن I منتصف $[BC]$. فيكون

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI})=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$$

أو $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$، فنجد أنّ $G\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

الأشعّة ومركّباتها في مَعلَم

نثبّت في هذه الفقرة مَعلَماً $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.



- نتأمّل شعاعاً $\vec{u}$، ولتكن M النّقطة من المستوي التي تحقّق $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$، ولتكن (x,y) إحداثيّتي النّقطة M. نعلم أنّ

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

ومن ثَمّ يُكتب أيّ شعاع $\vec{u}$ في المستوي بالصيّغة $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

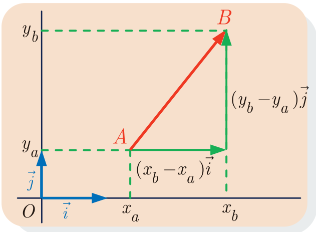
- نسمّي (x,y) **مُركّبتي الشّعاع** $\vec{u}$ في المَعلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، ونكتب $\vec{u}(x,y)$ أو $\vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ تعبيراً عن ذلك. وكما سنرى، الكتابة الشّاقوليّة لمركّبات الأشعة مريحة جدّاً عند إجراء العمليّات على الأشعة.

- يتساوى الشّعاعان $\vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $\vec{v}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ إذا وفقط إذا كان $x = x'$ و $y = y'$.
- إذا كان $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ وكان $\vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ و $\vec{v}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ كان $\vec{w}\begin{bmatrix}x+x'\\y+y'\end{bmatrix}$.

استناداً إلى الفرْض لدينا $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$، وعليه

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \vec{u} + \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}\\ &= (x+x')\vec{i} + (y+y')\vec{j}\end{aligned}$$

- إذا كان $\vec{w} = k\vec{u}$، حيث k عددٌ حقيقيٌ، وكان $\vec{u}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ كان $\vec{w}\begin{bmatrix}kx\\ky\end{bmatrix}$.
- **حساب مركّبات شعاع بدلالة إحداثيات بدايته ونهايته.**



لتكن النّقطتان $A(x_a, y_a)$ و $B(x_b, y_b)$ عندئذ يكون

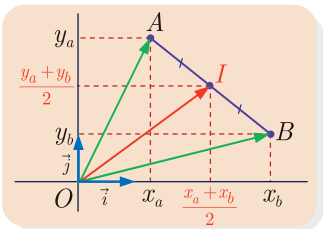
$$\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix}x_b - x_a\\y_b - y_a\end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \overrightarrow{AB}\left(x_b - x_a, y_b - y_a\right)$$

يمكننا أن نكتب انطلاقاً من علاقة شال : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$، ولمّا كان $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO}$ استنتجنا أنّ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. ولكن

$$\overrightarrow{OB} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OA} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j}$$

ومنه $\overrightarrow{OB}\left(x_b, y_b\right)$ و $\overrightarrow{OA}\left(x_a, y_a\right)$. وعليه تكون $\left(x_b - x_a, y_b - y_a\right)$ هي مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

تطبيقات هندسيّة



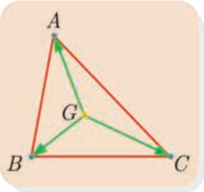
① **إحداثيّات منتصف قطعة مستقيمة** : لتكن لدينا النّقطتان $A(x_a, y_a)$ و $B(x_b, y_b)$. عندئذ تعطى إحداثيّتا النّقطة I منتصف القطعة $[AB]$ بالعلاقتين :

$$x_I = \frac{x_a + x_b}{2} \quad \text{و} \quad y_I = \frac{y_a + y_b}{2}$$

في الحقيقة، تُكتب المساواة $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ التي تعرّف النّقطة I، بواسطة المركّبات، بالشّكل

$$\begin{bmatrix}x_a - x_I\\y_a - y_I\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_b - x_I\\y_b - y_I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

أو $x_a + x_b - 2x_I = 0$ و $y_a + y_b - 2y_I = 0$. ومنه نحسب x_I و y_I.



② **إحداثيات مركز ثقل مثلّث**. لتكن لدينا النّقاط $A(x_a, y_a)$ و $B(x_b, y_b)$ و $C(x_c, y_c)$. إنّ إحداثيتي G مركز ثقل المثلّث ABC هما :

$$x_G = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \quad \text{و} \quad y_G = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}$$

في الحقيقة، تُكتب المساواة $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ التي تعرّف النّقطة G، بواسطة المركّبات، بالشّكل

$$\begin{bmatrix} x_a - x_G \\ y_a - y_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_b - x_G \\ y_b - y_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_c - x_G \\ y_c - y_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أو

$$x_a + x_b + x_c - 3x_G = 0 \quad \text{و} \quad y_a + y_b + y_c - 3y_G = 0.$$

ومنه نحسب x_G و y_G.

③ **الارتباط الخطي**. يكون الشّعاعان غير المعدومين $\vec{u}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ و $\vec{v}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ مرتبطين خطّياً إذا وفقط إذا تحقّقت العلاقة : $x\,y' - y\,x' = 0$.

لنفترض أنّ $x \neq 0$ و $y \neq 0$. يكون الشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطّياً إذا وفقط إذا وُجِدَ عدد حقيقي k يحقق $\vec{v} = k\vec{u}$، أو $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$، وهذا يُكافئ كون النسبتان $\frac{x'}{x}$ و $\frac{y'}{y}$ متساويتين. أي $\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x}$، ونعلم أنّ هذا يُكافئ استناداً إلى قاعدة الضرب التّقاطعي أن يكون $xy' = yx'$.

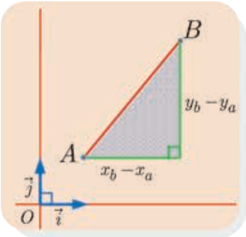
تمتاز الصّيغة $x\,y' - y\,x' = 0$ بعدم احتوائها على مقامات، فهي تُبقي الخاصة صحيحة حتى في حالة كون $x = 0$، أو $y = 0$، ونترك هذا التحقق للقارئ.

مثال

ليكن الشّعاعان $\vec{u}\left(\sqrt{3}-1, \sqrt{2}\right)$ و $\vec{v}\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}+1\right)$. عندئذ نلاحظ أنّ

$$xy' - x'y = \left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right) - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 - 2 = 0$$

فالشّعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطياً.



④ **المسافة بين نقطتين**. نفترض في هذه الفقرة أنّ **المَعْلَم** $(O;\vec{i},\vec{j})$ **متجانسٌ**.

لتكن لدينا النقطتان $A(x_a,y_a)$ و $B(x_b,y_b)$. عندئذ تعطى المسافة بين النّقطتين A و B بالعلاقة :

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}\ .$$

وذلك بالاستفادة من مبرهنة فيثاغورث.

وبوجه خاص إذا كان $\vec{u}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ كان طول الشّعاع $\vec{u}$ مساوياً $|\vec{u}| = \sqrt{x^2+y^2}$.

فكّر

لماذا لا يمكن استعمال علاقة المسافة بين نقطتين في مَعْلَم غير متجانس ؟

تدرّب

① ادرس، في الحالات الآتية، الإرتباط الخطي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$:

❶ $\vec{u}\,(2,-3)$ و $\vec{v}\,(-6,9)$.
❷ $\vec{u}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$ و $\vec{v}\left(\frac{2}{5},-\frac{3}{5}\right)$.
❸ $\vec{u}\,(3,-2)$ و $\vec{v}\,(6,-1)$.
❹ $\vec{u}\,(10,-5)$ و $\vec{v}\,(-4,2)$.

② نتأمّل في مَعْلَم النّقاط $A(-2,4)$ و $B(4,2)$ و $C(0,-1)$ و $D(-3,0)$. لتكن E منتصف $[AB]$.
عيّن طبيعة الرّباعييَّن $ABCD$ و $AECD$.

③ نتأمّل في مَعْلَم متجانس النّقاط $A(-1,2)$ و $B(2,1)$ و $C(-2,-1)$ احسب أطوال أضلاع المثلّث ABC واستنتج نوعه.

④ نتأمّل في مَعْلَم متجانس النّقاط $A(-2,3)$ و $B(4,5)$ و $C(0,5)$ و $D(5,1)$.

❶ احسب محيط المثلّث ABC.
❷ احسب إحداثيتي N منتصف القطعة CB ثم استنتج طول المتوسّط AN.
❸ احسب مركّبات الشّعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$.
❹ أثبت أنّ المستقيمين (AB) و (CD) متقاطعان.

فيما يلي، نفترض k عدداً حقيقياً.

❺ اكتب، بدلالة k، إحداثيّتي النّقطة M التي تحقّق $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
❻ احسب، بدلالة k، مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{CM}$.
❼ عيّن k كي يكون الشّعاعان $\overrightarrow{CM}$ و $\overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطّياً. واستنتج إحداثيتي نقطة تقاطع المستقيمين (AB) و (CD).

تمرينات ومسائل

1 بيّن الإجابات الصّحيحة من بين الإجابات المقترحة في كلّ من الحالات الآتية :

- ليكن ABC مثلّثاً، مركز ثقله G، ومنتصف القطعة $[AC]$ هو J، عندئذ :

❶ $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}$ ❷ $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ ❸ $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{AB}$

- في المَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، نفترض أنّ $\overrightarrow{OM} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ و $\overrightarrow{ON} = \vec{i} - 1.5\vec{j}$، عندئذ :

❶ OMN مثلّث. ❷ O و M و N على استقامة واحدة. ❸ $\overrightarrow{MN} = 3\vec{i} - 4.5\vec{j}$

- لنتأمّل في المَعْلَم المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النّقاط $A(4,5)$ و $B(2,1)$ و $C(8,3)$. عندئذ :

❶ $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان. ❷ $\overrightarrow{BC} = \sqrt{2}\overrightarrow{AB}$. ❸ ABC قائم ومتساوي السّاقين.

- لنتأمّل في المَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النّقاط $A(2,0)$ و $B(6,2)$ و $C(3,5)$ و $D(1,4)$. عندئذ :

❶ (AB) و (CD) متقاطعان. ❷ $\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ❸ $ABCD$ شبه منحرف.

- لنتأمّل في المَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النّقطة $A(2,0)$، والشّعاع $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. ولتكن النقطة $M\left(x,y\right)$ المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$. عندئذ :

❶ $x = 1$ و $y = -7$. ❷ $x = 1$ و $y = 3$. ❸ A هي صورة M وفق الانسحاب الّذي شعاعه $\vec{u}$.

2 ليكن ABC مثلّثاً قائماً في A. عيّن النّقاط M و N و P و Q المعرّفة بالعلاقات :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$$

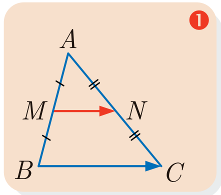
3 لتكن A و B و C و D أربع نقاط في المستوي. أثبت أنّ :

- $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{DA}$.
- $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

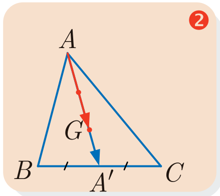
4 ليكن $ABCDEF$ مسدّساً منتظماً مركزه O. نضع $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ و $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$. اكتب الأشعّة $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{FE}$ و $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{DB}$ بدلالة الشّعاعين $\vec{i}$ و $\vec{j}$.

لنتعلّم البحث معاً

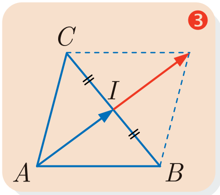
يقابل كلّ شكل من الأشكال الآتية خاصة مهمّة. من المفيد إذن تمييز هذه الأشكال في رسمٍ معطى. نقول إنّ هذه الأشكال أشكالٌ مفتاحيّة. ومعرفتك بها مفيدة في حل المسائل.



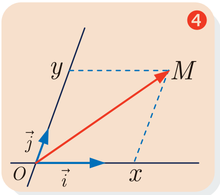
$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$



$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$



$2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

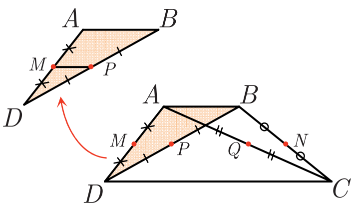


$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

5 الوقوع على استقامة واحدة

الفرْض : ليكن $ABCD$ رباعيّاً فيه $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$، ولتكن M منتصف $[AD]$، و N منتصف $[BC]$، و P منتصف $[BD]$، وأخيراً Q منتصف $[AC]$.

الطلب : إثبات أنّ النّقاط M و N و P و Q تقع على استقامة واحدة.



نحو الحلّ

- ارسم الشّكل . وسمِّ النّقاط فيه.
- استخلاص النتائج المباشرة.

- من $\overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{AB}$ نستنتج أنّ الرّباعيّ $ABCD$ شبه منحرف، لماذا ؟
- النّقطة M منتصف $[AD]$، و P منتصف $[BD]$، فنجد في المثلّث ABD الشّكل المفتاحي ❶، ما العلاقة التي تربط الشّعاعين $\overrightarrow{MP}$ و $\overrightarrow{AB}$ ؟
- أوجد بأسلوب مماثل العلاقات التي تربط $\overrightarrow{MQ}$ و $\overrightarrow{DC}$، $\overrightarrow{PN}$ و $\overrightarrow{DC}$، $\overrightarrow{QN}$ و $\overrightarrow{AB}$.
- صار إثبات المطلوب يسيراً انطلاقاً مما استخلصناه أعلاه.

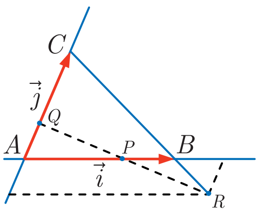
أنجزِ البرهان واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

6 ترجمة العلاقات الشّعاعيّة

الفرْض : ليكن ABC مثلّثاً. نعرّف $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$، والنّقاط P و Q و R بالعلاقات :

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\vec{i},\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\vec{j},\quad \overrightarrow{BR}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

الطلب : إثبات أنّ النّقطة P هي منتصف القطعة المستقيمة $[QR]$.



نحو الحلّ

✌ ارسم الشّكل . وسمِّ النّقاط فيه.

✌ استخلاص النتائج المباشرة.

- نتعرّف مباشرة الشّكل المفتاحي ❹. ولدينا فرضاً عبارتا الشّعاعين $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{AQ}$ بدلالة $\vec{i}$ و $\vec{j}$. استنتج إحداثيات كلٍّ من النقطتين P و Q في المَعْلَم $(A;\vec{i},\vec{j})$.
- في المساواة الشّعاعيّة $\overrightarrow{BR}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$، إحداثيّات B و C معروفة، إذن يمكننا منها استنتاج إحداثيّتي R في المَعْلَم نفسه ؟
- بعد أن عيّنا إحداثيّات النّقاط P و Q و R في المَعْلَم $(A;\vec{i},\vec{j})$ صار من اليسير إثبات أنّ P هي منتصف القطعة المستقيمة $[QR]$.

أنجزِ البرهان واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 نقاط معرّفة بعلاقات شعاعيّة

ليكن المثلّث ABC . أنشئ النّقطتين M و N المعرّفتين بالعلاقتين الشّعاعيّتين الآتيتين :

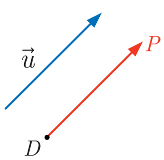
$$\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}\qquad (1)$$
$$\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AC}\qquad (2)$$

نحو الحلّ

✌ مرحلة الإنشاء الهندسي. أنشئ مثلّثاً ABC .

✌ بحثاً عن نتائج مباشرة. في هذا التّمرين لا يعطينا الرسم أيّة معلومات إضافيّة.

✌ بحثاً عن طريق.



بوجه عام، إذا كانت النّقطة D معطاة، وكان الشّعاع $\vec{u}$ معلوماً، أمكننا تعيين النّقطة P المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{DP}=\vec{u}$. ومن هنا تأتي فكرة تحويل كلّ من العلاقتين (1) و (2) إلى الحالة السّابقة أي التي تظهر فيها النّقطة المراد تعيينها مرّة واحدة ويكون الشّعاع $\vec{u}$ معلوماً.

- في العلاقة (1) تظهر النّقطة M، المراد تعيينها، مرّة واحدة وهذا يدعونا إلى كتابة العلاقة بالصّيغة $\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$. علّل عندئذ صحة المساواة $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AB}$ وأنشئ النّقطة M.
- في العلاقة (2) تظهر النّقطة المراد تعيينها مرّتين فعلينا إذن تحويل العلاقة (2) باستعمال علاقة شال. أثبت على سبيل المثال أنّ $3\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$. أنشئ الآن النّقطة N بالطّريقة نفسها التي أنشأتَ بها النّقطة M.

8 إثبات شعاعي

لنتأمّل مثلّثاً ABC مركز ثقله G، ولتكن A' منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، و D نظيرة G بالنسبة إلى النّقطة A'. أثبت شعاعيّاً أنّ G منتصف القطعة $[AD]$.

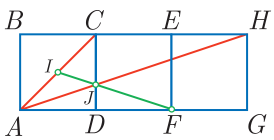
نحو الحلّ

- **مرحلة الإنشاء الهندسي.** ارسم مثلّثاً ABC وعيّن بدقّة النّقاط A' و G و D.
- **بحثاً عن نتائج مباشرة.** عبّر عن كون G مركز ثقل المثلّث ABC بالعلاقات الشّعاعيّة المناسبة ثمّ عبّر عن كون D نظيرة G بالنّسبة للنقطة A' بعلاقة شعاعيّة.
- **بحثاً عن طريق.**

لإثبات أنّ النّقطة G هي منتصف القطعة $[AD]$ تكفي مقارنة الشّعاعين $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{GD}$. تدعونا العلاقات التي وجدناها سابقاً إلى التعبير عن كلّ من هذين الشّعاعين بدلالة الشّعاع $\overrightarrow{GA'}$.

أنجِز البرهانَ واكتبه بلغةٍ سليمة.

9 ثلاثة مربعات



$ABCD$ و $DCEF$ و $FEGH$ ثلاثة مربّعات طولُ ضلع كلّ منها يساوي 1. النّقطة I منتصف القطعة $[AC]$، و J نقطة تقاطع المستقيمين (CD) و (AH). مستعيناً بمَعْلَم مناسب أثبت أنّ النّقاط I و F و J تقع على استقامة واحدة.

نحو الحلّ

- **مرحلة الإنشاء الهندسي.** لنرسم أوّلاً الشّكل رسماً دقيقاً ولنختر المَعْلَم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\overrightarrow{AD}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AB}=\vec{j}$. يجعل هذا الاختيار إحداثيّات رؤوس المربّعات أعداداً صحيحة.

✌ **بحثاً عن نتائج مباشرة.** نلاحظ أنّه يمكننا تحديد إحداثيّات جميع النّقاط تحديداً مباشراً عدا إحداثيتي النّقطة J. عيّن إذن إحداثيّات هذه النّقاط باستثناء النّقطة J.

👌 **بحثاً عن طريق.**

نريد إثبات وقوع النّقاط I و J و F على استقامة واحدة، علينا إذن البحث عن إحداثيّتي النّقطة J. ما العلاقة التي تربط الشّعاع $\overrightarrow{AJ}$ بالشّعاع $\overrightarrow{AH}$؟ استنتج إحداثيّتي النّقطة J.

أنجزِ البرهان واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

10 الوقوع على استقامة واحدة بطريقتين

لنتأمّل مثلّثاً ABC قائم الزّاوية في A، وليكن I منتصف القطعة $[AB]$، و J نظير C بالنسبة إلى النّقطة A، وأخيراً لتكن K النّقطة المحقّقة للعلاقة $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

أثبت أنّ النّقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة.

نحو الحلّ

✍ **مرحلة الإنشاء الهندسي.** ارسم المثلّث، وعيّن النّقاط بدقة، وضع علامات على القطع المستقيمة متساوية الطول.

✌ **بحثاً عن نتائج مباشرة.** يمكننا انطلاقاً من فرضيّات المسألة كتابة عدد من العلاقات الشّعاعيّة كأن نعبّر عن $\overrightarrow{AJ}$ بدلالة $\overrightarrow{AC}$، وعن $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{BI}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$. اكتب هذه العلاقات.

👌 **بحثاً عن طريق.**

نريد إثبات أنّ النّقاط I و J و K تقع على استقامة واحدة، علينا إذن إثبات ارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$. يمكن الوصول إلى هذه النّتيجة إمّا بالحساب الشّعاعي أو بطرائق الهندسة التحليليّة أي باختيار مَعْلَم مناسب. هناك إذن طريقتان.

- **الطريقة الأولى**

لنختر المَعْلَم $\left(A;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{AC}=\vec{j}$. يجعل هذا الاختيار إحداثيّات رؤوس المثلّث ABC أعداداً صحيحة، كما يجعل من السهل تحديد إحداثيّات باقي النّقاط. ما هي إحداثيّات كلٍّ من B و C و I و J؟ استنتج ممّا سبق إحداثيّتي النّقطة K.

أنجز البرهان واكتبه بلغة سليمة.

▪ الطريقة الثانية

لإثبات ارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ نفرّق كلاً منهما إلى مجموعٍ شعاعيّ. تعلم أنّ $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}$ استنتج من ذلك أنّ $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

يتطلّب التعبير عن $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ بعض الجهد : تعلم أنّ $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BK}$. أثبت أوّلاً أنّ $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$، ثُمّ استنتج عبارة $\overrightarrow{IK}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. أخيراً أثبت أنّ الشّعاعين $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{IK}$ مرتبطان خطياً.

أنجزِ البرهانَ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

11 لنتأمّل مثلّثاً ABC، ولتكن I نظيرة A بالنّسبة إلى النّقطة B، و K صورة B وفق انسحاب شعاعه $\overrightarrow{CA}$، و M نقطة تقاطع المستقيمين (CK) و (AB).

① أثبت أنّ النّقطة M هي منتصف القطعة $[KC]$.

② ما العلاقة التي تربط الشّعاعين $\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{BM}$؟ استنتج أنّ B هي مركز ثقل المثلّث CKI.

12 نتأمّل مثلّثاً ABC، ونسمّي I منتصف القطعة $[AB]$.

① ❶ أنشئ النّقطة J التي تحقّق $\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AC}$.

❷ استنتج أنّ $\overrightarrow{IJ}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

② لتكن النّقطة K المحقّقة للعلاقة $2\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

❶ اكتب $\overrightarrow{BK}$ بدلالة $\overrightarrow{BC}$ ثمّ أنشئ النّقطة K.

❷ استنتج أنّ $\overrightarrow{IK}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ وأن $\overrightarrow{IJ}=-3\overrightarrow{IK}$. ماذا يمكنك القول عن النّقاط I و J و K في هذه الحالة ؟

13 ليكن متوازي الأضلاع $ABCD$، ولتكن E النّقطة التي تحقّق $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ و G النّقطة التي تحقّق $\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$. نرسم من E مستقيماً يوازي المستقيم (AD) فيقطع المستقيم (CD) في النّقطة F، ونرسم من G مستقيماً يوازي المستقيم (AB) فيقطع المستقيم (BC) في النّقطة H.

① أثبت أنّ $\overrightarrow{GF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ وأنّ $\overrightarrow{EH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

② أثبت أنّ المستقيمات (FG) و (EH) و (AC) متوازية.

14 نزوّد المستوي بمَعْلَم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. بيّن في كلٍّ من الحالات التالية إذا كانت النّقاط M و N و P تقع على استقامة واحدة.

- $P(-5,5)$، $N(7,-3)$، $M(4,-1)$
- $P(-5,14)$، $N(-3,7)$، $M(-2,3)$.
- $P(0,1)$، $N(3,-1)$، $M\left(2,-\frac{1}{3}\right)$

15 لتكن النّقاط $A(3,7)$ و $B(8,2)$ و $C(-4,-2)$ والشّعاع $\vec{u}\left(2,5\right)$. نقرن بكلّ عدد حقيقيّ k النّقطة M المحقّقة للعلاقة : $\overrightarrow{CM}=k\vec{u}$.

① احسب إحداثيّتي النّقطة M بدلالة k واستنتج مركّبات الشّعاع $\overrightarrow{AM}$.

② باستعمال الشرط التحليليّ لارتباط الشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ احسب العدد الحقيقيّ k الّذي يجعل M نقطة من المستقيم (AB).

16 نزوّد المستوي بمَعْلَم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، ونتأمّل النّقاط $A\left(-3,0\right)$ و $B\left(6,3\right)$ و $C\left(1,8\right)$.

نهدف إلى حساب (x,y) إحداثيّتي النّقطة K مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC.

① القول إنّ K مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC، يكافئ القول إنّ K متساوية البعد عن رؤوس المثلّث، إذن $KA=KC$ و $KA=KB$. احسب المقادير KA^2 و KB^2 و KC^2 بدلالة x و y ثمّ اكتب العلاقات النّاتجة من الشّرط السّابق.

② استنتج أنّ $x+2y=7$ و $3x+y=6$.

③ احسب إحداثيّتي النّقطة K.

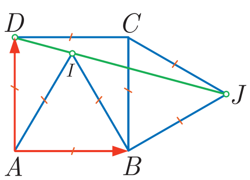
17 ليكن متوازي الأضلاع $OIJK$، ولتكن النّقاط A و B و G المعرّفة بالعلاقات :

$$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OI},\quad \overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OK},\quad \overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

اختر مَعْلَماً مناسباً وأثبت أنّ النّقاط O و G و J على استقامة واحدة.

18 لتكن النّقاط $A\left(1,2\right)$ و $B\left(6,0\right)$ و $C\left(2,5\right)$. احسب إحداثيّتي النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC.

19 ليكن المربّع $ABCD$. AIB و BJC مثلّثان متساويا الأضلاع ومتوضّعان كما هو مبيّن في الشّكل المجاور.



يهدف التّمرين إلى إثبات أنّ النقط D و I و J تقع على استقامة واحدة بأسلوبين مختلفين.

① الطريقة الأولى. استعمال الزّوايا

❶ احسب قياس كلٍّ من الزّوايا $\angle DIA$ و $\angle AIB$ و $\angle BIJ$.

❷ بيّن أنّ $\angle DIJ = 180°$. ماذا تستنتج؟

② الطريقة الثانية. اختيار مَعْلَم مناسب.

اختر مَعْلَماً مناسباً، ثُمّ احسب إحداثيّات النّقاط D و I و J ثمّ أثبت أنّها تقع على استقامة واحدة.

20 ليكن ABC مثلثاً. ولتكن A' و B' و C' منتصفات الأضلاع $[BC]$، $[CA]$ و $[AB]$ بالتّرتيب، ولتكن النّقطة O مركز الدائرة المارة بروؤس المثلث ABC. ثُمّ لنتأمّل النّقطة H التي تحقّق

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

① ❶ أثبت أنّ $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.

❷ استنتج أنّ (AH) هو الارتفاع النازل من الرأس A في المثلّث ABC.

❸ أثبت بأسلوب مماثل أنّ (BH) هو الارتفاع النازل من الرأس B في المثلث ABC. ماذا تمثّل النّقطة H بالنِّسبة إلى المثلّث ABC ؟

② لتكن النّقطة G مركز ثقل المثلّث ABC.

❶ أثبت أنّه أياً كانت النّقطة M من المستوي كان $3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

❷ أثبت بالاستفادة من الفقرة السابقة أنّ $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$. ماذا تستنتج بشأن النّقاط O و G و H ؟

4 معادلة مستقيم وجمل المعادلات الخطيّة

يُنْظَر إلى محمدٍ بن موسى الخوارزمي (780-850) المولود في بغداد على أنه أوّل علماء الرّياضيّات العرب. يُعالج مؤلَّفه: «**الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة**» مسائل جبريّة من الحياة اليومية.

إليكم كيف كان الخوارزمي يكتب : "هذا الشيء الذي أبحث عنه، سأبدأ بإعطائه اسماً، ولكن لأنّني لا أعرفه، ولأنّني في الحقيقة أبحث عنه، فسأسميه ببساطة : الشيء" إنّه المقدار المجهول، الّذي كان يبحث عنه، والآن فقط أصبح بإمكانه العمل به. فمع أنّ هذا الشيء ما يزال مجهولاً ولكن صار بالإمكان استعماله في الحساب وكأنّه مقدار معلوم. كانت هذه ببساطة استراتيجية الخوارزمي وتجلّي عبقريته، وأعظم اختراعاته. كان الخوارزمي يتعامل مع المجهول بأسلوب التعامل مع المقادير المعلومة نفسه، فكان يجمعُه ويضربُه، وكان كلّ ذلك بهدف واحد هو كشف النقاب عن قيمته الحقيقيّة، هذا هو سحر الجبر.

معادلة مستقيم وجمل المعادلات الخطيّة

1 مقدّمة عامّة

لنتذكّر أنّ **المعادلة الخطيّة بمجهولين** x و y هي معادلة من الشّكل : $ax + by = c$. نقول إنّ الثنائيّة (u, v) هي **حل** لهذه المعادلة إذا تحقّقت المساواة : $au + bv = c$.

مثال

إنّ المعادلة $2x + y = 5$ معادلةٌ خطيّة. الثنائيّة $(1,3)$ حلّ لهذه المعادلة لأنّ $2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$.
أمّا الثنائيّة $(1,2)$ فليست حلاً لها لأنّ $2 \times 1 + 1 \times 2$ لا يساوي 5.

في مَعْلَم، تكوّن مجموعة النقاط $M(x, y)$ التي تحقّق إحداثيّاتها المعادلة $2x + y = 5$، مستقيماً هو الخطّ البياني الممثّل للتابع التآلفي : $f : x \to -2x + 5$.

وتأخذ **جملة معادلتين خطيّتين بمجهولين** x و y الشكل الآتي :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

نقول إنّ الثّنائيّة (u, v) هي **حلّ** لهذه الجملة $(\mathcal{S})$ إذا كانت هذه الثّنائيّة حلاً لكلٍّ من المعادلتين الخطّيّتين $ax + by = c$ و $a'x + b'y = c'$ في آنٍ معاً. وحلّ الجملة $(\mathcal{S})$ هو عمليّة إيجاد الثّنائيّات التي تكوّن حلولاً لهذه الجملة.

مثال

لنتأمّل الجملة

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} 3x - 4y = 11 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

تمثّل الثّنائيّة $(5,1)$ حلاً للجملة $(\mathcal{S})$، لأنّ

$$3 \times 5 - 4 \times 1 = 11$$

و

$$2 \times 5 + 3 \times 1 = 13$$

تدرّب

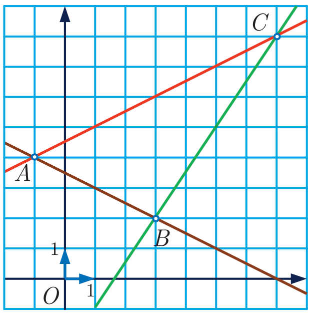
① تأمّل المعادلة $(\mathcal{E})$ التالية : $-2x+3y=5$. عيِّن، من بين الثنائيّات الآتية، تلك التي تمثّل حلولاً للمعادلة $(\mathcal{E})$:

❶ $\left(\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$ ❷ $\left(\frac{1}{3},2\right)$ ❸ $\left(-3,\frac{1}{3}\right)$

❹ $\left(0,\frac{3}{5}\right)$ ❺ $\left(\frac{1}{2},2\right)$ ❻ $\left(-2,1\right)$

② مثّلنا في مَعْلَم متجانس، التوابع التآلفيّة، (من الدّرجة الأولى) الآتية :

$f : x \to \frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ $g : x \to \frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$ $h : x \to -\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$



❶ تنتمي النّقطة $A(-1,4)$ إلى مستقيمين، دلَّ عليهما ؟

❷ استنتج جملةَ معادلتين خطيّتين تكون إحداثيّات A حلاً لها.

❸ أعد حلّ الطّلبين السّابقين في حالة $B(3,2)$ ثمّ $C(7,8)$.

② معادلة مستقيم

نثبّتُ في هذه الفقرة مَعْلَماً **كيفيّاً** $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ في المستوي.

المستقيمات والتّوابع التّآلفيّة

مثال

ليكن f التابع التآلفي المعرف بالصيغة $f(x)=2x-3$.

① ❶ احسب المقادير $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$. ثم ارسم بدقة النّقاط $A(0,f(0))$ و $B(1,f(1))$ و $C(2,f(2))$.

❷ أتقع النّقاط A و B و C على استقامة واحدة ؟

② ❶ ارسم المستقيم Δ المارّ بالنّقطتين A و B، واختر عليه نقطةً M واحسب من الشكل إحداثيتيها (u,v) مراعياً الدقة.

❷ أتتحقّق المساواة $v=f(u)=2u-3$ ؟

③ ماذا تستنتج من ① و ② ؟

مبرهنة

① التّمثيل البياني لتابع تآلفي، أي من الصيغة $x \mapsto mx + p$، هو مستقيم.

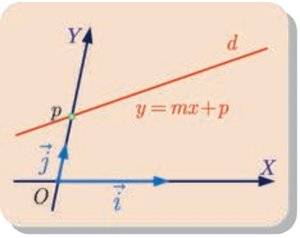
② كل مستقيم، لا يوازي محور التراتيب، هو التمثيل البياني لتابع تآلفي.

نتيجة

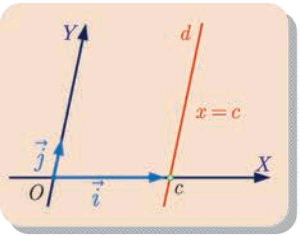
في مَعْلَم **كيفيّ** $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. كلُّ مستقيم d له معادلةٌ من أحد الشكلين التاليين :

① $y = mx + p$ إذا لم يكن d موازياً لمحور التّراتيب.

② $x = c$ إذا كان d موازياً لمحور التراتيب.



في الحقيقة، استناداً إلى المبرهنة السابقة، إذا لم يكن المستقيم d موازياً لمحور التّراتيب، كان d الخطّ البيانيّ لتابع تآلفي $f : x \mapsto mx + p$، وبناءً عليه، كانت $y = f(x) = mx + p$ معادلةً للمستقيم d.



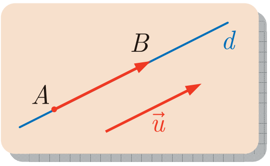
أمّا إذا كان d موازياً لمحور التراتيب، قطع d محور الفواصل في نقطة فاصلتها c. جميع النّقاط ذات الفاصلة c تنتمي إلى d، وبالعكس، لكلّ نقاط d الفاصلة c نفسها. إذن $x = c$ هي معادلة للمستقيم d.

فكّر

لتكن d_1 مجموعة نقاط المستوي $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقة $2y + 3x = -1$، ولتكن d_2 مجموعة نقاط المستوي $M(x,y)$ التي تحقّق إحداثياتها العلاقة $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. قارن بين d_1 و d_2. ماذا تستنتج بشأن معادلة مستقيم بوجه عام ؟ هل هي وحيدة ؟

الشّعاع الموجِّه لمستقيم وميل مستقيم

تعريف



ليكن d مستقيماً، نقول إنّ الشعاع $\vec{u}$ **شعاعٌ موجِّه للمستقيم d**. إذا كان $\vec{0} \neq \vec{u}$، وكان منحى $\vec{u}$ موازياً للمستقيم d أو منطبقاً عليه.

خواص

① إذا كانت A و B نقطتين مختلفتين من مستقيم d، كان الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم d.

② إذا كان $\vec{u}$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم d وكان k عدداً حقيقيّاً غير معدوم كان $k\vec{u}$ أيضاً شعاعاً موجِّهاً للمستقيم d. إذْ للشعاعين $\vec{u}$ و $k\vec{u}$ المنحى نفسه هو منحى d.

③ يكون أيُّ شعاعين موجِّهين للمستقيم نفسه d مرتبطين خطّيّاً لأنّ لهما المنحى نفسه هو منحى d.

④ إذا كانت $y = mx + p$ معادلة للمستقيم d، كان $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix}$ شعاعاً موجّهاً للمستقيم d.

المستقيم d يمرّ بالنقطتين المختلفتين $A(0,p)$ و $B(1,m+p)$، إذن، الشّعاع $\overrightarrow{AB}$ شعاعٌ موجّه للمستقيم d، ولكن $\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-0\\(m+p)-p\end{bmatrix}\overrightarrow{AB}$.

⑤ إذا كان $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix}$ شعاعاً موجّهاً لمستقيم d كان للمستقيم d معادلة من الشّكل $y = mx + p$.

للمستقيم d منحى الشعاع $\vec{u}$ فهو لا يوازي محور التّراتيب، وله، من ثَمّ، معادلة من الشكل $y = m'x + p$. واستناداً إلى النقطة ④ السابقة نرى أنّ الشّعاع $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\m'\end{bmatrix}$ شعاعٌ موجِّه للمستقيم d، فلا بُد أن يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطّيّاً ومنه $1 \times m - 1 \times m' = 0$ أي $m = m'$.

تعريف

ليكن d مستقيماً لا يوازي محور التراتيب. عندئذ يقبل هذا المستقيم معادلة وحيدة من الشكل $y = mx + p$. نسمي العدد m **ميل المستقيم** d.

إذن في حالة مستقيم d لا يوازي محور التراتيب. هناك تكافؤ بين القول إنّ ميله يساوي m أو إنّ $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix}$ هو شعاع توجيه له.

المستقيمات المتوازية

مُبرهَنة

ليكن المستقيم d الذي معادلته $y = mx + p$ والمستقيم d' الذي معادلته $y = m'x + p'$. إنّ توازي المستقيمين d و d' يُكافِئ تساوي ميليهما أي $m = m'$.

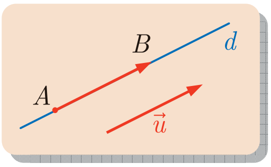
إنّ $\vec{u}\begin{bmatrix}1\\m\end{bmatrix}$ شعاعٌ موجّه للمستقيم d، و $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\m'\end{bmatrix}$ شعاعٌ موجّه للمستقيم d'. ولكن أن نقول إنّ d و d' متوازيان يكافئ قولنا إنّ لهما المنحى نفسه، أي إنّ الشّعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطّيّاً وهذا يكافئ $1\times m - 1\times m' = 0$ أو $m = m'$.

مثال

- المستقيمان d و d' اللّذان معادلتاهما $y = 3x + 5$ و $y = 3x - 2$ متوازيان.
- أمّا المستقيمان d و d' اللّذان معادلتاهما $y = 2x + 5$ و $y = 3x + 5$ فهما غير متوازيين.

معادلة مستقيم عُلم منه نقطة وشعاع موجّه

لتكن A نقطة من مستقيم d و $\vec{u}$ شعاعاً موجّهاً له. إذا تأمّلنا النّقطة B الّتي تحقّق $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. لاحظنا أنّ المستقيم d هو المستقيم (AB) نفسه.
إذن تعيّن النّقطة A والشّعاع $\vec{u}$ المستقيم d.



مثال

① لنتأمّل النّقطة $A(2,3)$ والشّعاع $\vec{u}\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$. أعطِ معادلة للمستقيم d الذي يمرّ بالنّقطة A ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً موجّهاً.

② أوجد معادلة للمستقيم d الذي يمرّ بالنّقطة $A(-1,1)$ موازياً للمستقيم Δ الذي معادلته $y = 2x - 1$.

الحل

① لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوي. تنتمي M إلى المستقيم d إذا وفقط إذا كان الشّعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مرتبطين خطّيّاً. ولكنّ مركّبتي الشّعاع $\overrightarrow{AM}$ هما $\begin{bmatrix} x-2 \\ y-3 \end{bmatrix}$، وشرط الارتباط الخطّيّ للشّعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ هو :

$$(x-2)\times(-2)-(y-3)\times 3=0$$

أو $-2x-3y+13=0$، والمعادلة المختزلة للمستقيم d هي : $y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{13}{3}$.

② لمّا كان Δ لا يوازي محور التّراتيب، استنتجنا أنّ d أيضاً لا يوازي محور التّراتيب وله معادلة من الصيغة $y=mx+p$. ولمّا كان d و Δ متوازيين استنتجنا أنّ لهما الميل نفسه أي $m=2$. فللمستقيم d معادلة من الشكل $y=2x+p$.

ولكنّ A نقطة من d إذن يجب أن تحقّق إحداثياتها معادلة هذا المستقيم أي $1=2\times(-1)+p$ أو $p=3$. بالنتيجة تكون $y=2x+3$ معادلة للمستقيم d.

ويمكننا بوجه عام اتباع أسلوب حل هذا المثال في إثبات المبرهنة الأتية :

مُبرهَنة

لتكن النّقطة $A(x_a,y_a)$ والشّعاع غير المعدوم $\vec{u}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$، وليكن d المستقيم المارّ بالنّقطتين A ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً موجهاً، عندئذ يقبل المستقيم d المعادلة الآتية :

$$\alpha(y-y_a)-\beta(x-x_a)=0$$

في الحقيقة، تنتمي النّقطة $M(x,y)$ إلى المستقيم d إذا وفقط إذا كان الشعاعان

$$\overrightarrow{AM}\begin{bmatrix} x-x_a \\ y-y_a \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{u}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

مرتبطين خطّيّاً، وهذا يُكافئ

$$\alpha(y-y_a)-\beta(x-x_a)=0$$

ثُم يمكننا إصلاح هذه الصيّغة لإعطائها الشّكل المألوف لمعادلة المستقيم.

معادلة مستقيم عُلم منه نقطتان

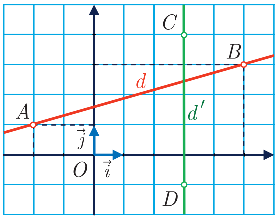
مثال

نُعطي، في مَعلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$، النّقاط الأربع : $A(-2,1)$ و $B(5,3)$ و $C(3,4)$ و $D(3,-1)$.

① أوجد معادلةً للمستقيم d المارّ بالنقطتين A و B.

② أوجد معادلةً للمستقيم d' المارّ بالنقطتين C و D.

الحل



① في الحقيقة، تنتمي النّقطة $M(x,y)$ إلى المستقيم d إذا وفقط إذا كانت النّقاط M و A و B على استقامة واحدة وهذا يُكافئ القول إنّ الشّعاعين $\overrightarrow{AM}\begin{bmatrix} x+2 \\ y-1 \end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{AB}\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$، مرتبطين خطّيّاً، وهذا يُكافئ :

$$7(y-1)-2(x+2)=0$$

أو $7y-2x-11=0$ أو $y=\frac{2}{7}x+\frac{11}{7}$، وهي معادلةٌ للمستقيم d.

② للنقطتين C و D الفاصلة 3 نفسها. إذن d' يوازي محور التراتيب ويقبل $x=3$ معادلة له.

يمكن تعميم أسلوب حل هذا المثال، وسنتبعه في إثبات المبرهنة الآتية :

مُبرهَنة

لتكن النّقطتان المختلفتان $A(x_a,y_a)$ و $B(x_b,y_b)$، وليكن d المستقيم المارّ بالنّقطتين A و B، عندئذ يقبل المستقيم d المعادلة الآتية :

$$(x_b-x_a)(y-y_a)-(y_b-y_a)(x-x_a)=0$$

في الحقيقة، تنتمي النقطة $M(x,y)$ إلى المستقيم d إذا وفقط إذا كان الشّعاعان

$$\overrightarrow{AM}\begin{bmatrix} x-x_a \\ y-y_a \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB}\begin{bmatrix} x_b-x_a \\ y_b-y_a \end{bmatrix}$$

مرتبطين خطّيّاً، وهذا يُكافئ

$$(x_b-x_a)(y-y_a)-(y_b-y_a)(x-x_a)=0$$

ثُم يمكننا إصلاح هذه الصّيغة لإعطائها الشّكل المألوف لمعادلة المستقيم.

تدرّب

① نزوّد المستوي بمعلَم. بيّن الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الثلاث المقترحة فيما يأتي:

- $y = \frac{3}{2}x - 1$ هي معادلة d. شعاعٌ موجّه للمستقيم d هو :

❶ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$. ❷ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\1.5\end{bmatrix}$. ❸ $\vec{v}\begin{bmatrix}-1\\1.5\end{bmatrix}$.

- $y = -\frac{1}{2}x + 4$ هي معادلة d. شعاعٌ موجّه للمستقيم d هو :

❶ $\vec{v}\begin{bmatrix}-0.5\\4\end{bmatrix}$. ❷ $\vec{v}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$. ❸ $\vec{v}\begin{bmatrix}1\\-0.5\end{bmatrix}$.

- $\vec{v}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ هو شعاع موجّه للمستقيم الذي معادلته:

❶ $y = 3x + 2$. ❷ $y = -\frac{3}{2}x + 1$. ❸ $y = \frac{3}{2}x$.

- معادلة المستقيم d المارّ بالنّقطة $A(2,1)$ موازياً المستقيم Δ الذي معادلته $y = 3x - 1$ هي :

❶ $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$. ❷ $y = 3x - 5$. ❷ $y = 3x$.

② ليكن d المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{2}x - \frac{2}{5}$. عيّن العدد t كي تقع النقطة $M(t,3)$ على d.

③ اكتب معادلة المستقيم d المار بالنّقطة A ويقبل $\vec{u}$ شعاعاً موجّهاً في الحالتين الآتيتين:

❶ $A(-4,3)$ و $\vec{u}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$ ❷ $A(5,3)$ و $\vec{u}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$

④ اكتب معادلة المستقيم d المار بالنّقطتين A و B في الحالتين الآتيتين :

❶ $A(2,1)$ و $B(3,-1)$ ❷ $A(-5,0)$ و $B(2,-3)$

⑤ نتأمّل المثلّث ABC حيث $A(1,3)$ و $B(-3,5)$ و $C(-1,-1)$.

❶ عيّن إحداثيتي النّقطة A' منتصف $[BC]$، وإحداثيتي النّقطة B' منتصف $[AC]$.

❷ اكتب معادلة المتوسط d_1 المتعلق بالرأس A.

❸ اكتب معادلة المستقيم Δ المار بالنقطتين A و B.

❹ اكتب معادلة المستقيم Δ' المار بالنقطتين A' و B'. ماذا تقول عن المستقيمين Δ و Δ'.

3 جمل المعادلات الخطية

نهدف في هذه الفقرة إلى دراسة جملة المعادلتين (S) دراسة بيانيّة

$$(S)\quad \begin{cases} a\,x\ + b\,y = c \\ a'x\ + b'y = c' \end{cases}$$

الحالة المألوفة : $b \neq 0$ و $b' \neq 0$

في هذه الحالة تكافئ المعادلةُ $ax + by = c$ المعادلةَ: $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$. (1)

وكذلك تكافئ المعادلةُ $a'x + b'y = c'$ المعادلةَ : $y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'}$. (2)

لنختر مَعْلَماً في المستوي، ولنرمز بالرّمز d إلى المستقيم الذي معادلته (1)، وبالرّمز d' إلى المستقيم الذي معادلته المختزلة هي (2).

أن نقول إنّ الإحداثيّات (u,v) لنقطة M من المستوي هي حلٌّ للجملة (S) يعني أنّ

$$v = -\frac{a}{b}u + \frac{c}{b} \quad \text{و} \quad v = -\frac{a'}{b'}u + \frac{c'}{b'}$$

وهذا يُكافئ انتماء النقطة M إلى المستقيمين d و d' في آن معاً.

إذن يؤول حلّ الجملة (S) إلى إيجاد النقاط المشتركة بين المستقيمين d و d'. نميز ثلاث حالات ممكنة هي :

1. المستقيمان d و d' متقاطعان ومن ثَمّ، **تقبل الجملة (S) حلاً وحيداً**.
2. المستقيمان d و d' متوازيان وغير منطبقين **فليس للجملة (S) أيّ حلّ**.
3. المستقيمان d و d' منطبقان ومن ثَمّ **تقبل الجملة (S) عدداً غير منته من الحلول**.

ولكن يكون المستقيمان d و d' متوازيين إذا وفقط إذا كان لهما الميل نفسه أي $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$ أو بأسلوب مُكافئ : $ab' - a'b = 0$.

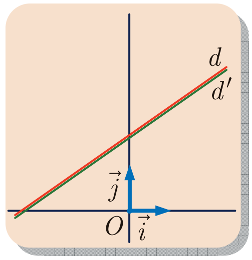
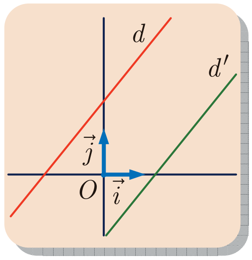
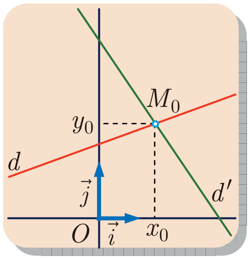
وعليه، يكون المستقيمان d و d' متقاطعين إذا وفقط إذا كان

$$ab' - a'b \neq 0$$

نسمّي العدد $ab' - a'b$ **مُحدّد الجملة**.

لاحظ أنّ $ab' - a'b = 0$ يكافئ $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$ في حالة $a' \neq 0$ و $b' \neq 0$.

يبيّن الشكل الآتي الحالات السّابقة جميعاً :

حلول جملة المعادلتين الخطيّتين (S)		
		
$ab' - ba' = 0$		$ab' - ba' \neq 0$
عدد غير منته من الحلول	لا يوجد حلول	يوجد حلٌّ واحد

الحالة الخاصّة : $b = 0$ أو $b' = 0$

في هذه الحالة، واحدٌ على الأقلّ من المستقيمين d و d' يوازي محور التّراتيب، فإذا كان $b = 0$، مثلاً، أخذت المعادلة $ax + by = c$ الشكل $ax = c$ أو $x = \frac{c}{a}$ في حالة $a \neq 0$. في هذه الحالة تسهل علينا معرفة إذا كان d و d' متقاطعين أو متوازيين وغير منطبقين أو منطبقين.

مثال حلّ جملة معادلتين خطيّتين عندما يكون المستقيمان الموافقان متقاطعين.

حلّ الجملة المعادلتين الخطيّتين (S) الآتية

$$(S)\quad \begin{cases} 4x - 3y = 6 & (1) \\ x + 5y = 13 & (2) \end{cases}$$

الحل

في هذه الحالة لدينا

$$ab' - a'b = 4 \times 5 - 1 \times (-3) = 23 \neq 0$$

فللجملة حلّ وحيد. سنعرض فيما يأتي طريقتين لإيجاد هذا الحل.

- طريقة الحذف بالتعويض

تعتمد هذه الطّريقة على حساب أحد المجهولين x أو y بدلالة الآخر. بالنّظر إلى المعادلتين (1) و (2) نجد أنّ حساب x من المعادلة (2) أبسط، إذ نجد $x = -5y + 13$. نعوّض قيمة x في المعادلة (1) فنجد $4(-5y + 13) - 3y = 6$ أي $-23y + 52 = 6$ ومنه $23y = 46$ أي $y = 2$. نعوّض y بقيمتها في $x = -5y + 13$ فنجد $x = 3$. إذن الحلّ الوحيد للجملة هو $(3,2)$.

- طريقة العبارات الخطّيّة

نضرب طرفيّ المعادلة (2) بالعدد -4، فتأخذ الجملة $(\mathcal{S})$ الشكل المُكافئ الآتي:

$$\begin{cases} 4x - \quad 3y = 6 & (1) \\ -4x - 20y = -52 & (2) \end{cases}$$

نجمع المعادلتين طرفاً مع طرف فنجد $-23y = -46$ ومنه $y = 2$. نعوّض الآن قيمة y في إحدى المعادلتين ولتكن المعادلة (1) مثلاً فنجد $4x - 3 \times 2 = 6$ ومنه $x = 3$. فالحلّ الوحيد للجملة هو $(3,2)$.

مثال

حلّ جملة معادلتين خطيّتين عندما يكون المستقيمان الموافقان متوازيين.

① حلّ جملة المعادلتين الخطيّتين $(\mathcal{S})$ الآتية :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} 4x + 6y = 5 & (1) \\ 6x + 9y = 7 & (2) \end{cases}$$

② حلّ جملة المعادلتين الخطيّتين $(\mathcal{S}')$ الآتية

$$(\mathcal{S}') \quad \begin{cases} 4x + 6y = 2 & (1) \\ 6x + 9y = 3 & (2) \end{cases}$$

الحل

① لدينا في هذه الحالة $\frac{2}{3} = \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ فإمّا أن يكون للجملة عددٌ غير منته من الحلول، وإمّا لا يكون لها أي حلّ. لمعرفة في أيّ الحالتين نحن نعيد صياغة الجملة $(\mathcal{S})$ بالصيغة المُكافئة التالية :

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{6} & (1') \\ y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{7}{6} & (2') \end{cases}$$

تمثِّل المعادلتان $(1')$ و $(2')$ معادلتي مستقيمين لهما الميل نفسه $-\frac{2}{3}$، ولكنّهما يقطعان محور التّراتيب في نقطتين مختلفتين $\left(0,\frac{7}{6}\right) \neq \left(0,\frac{5}{6}\right)$، فهذان المستقيمان متوازيان وغير طبوقين. نستنتج أن ليس للجملة $(\mathcal{S})$ أي حل.

② لدينا في هذه الحالة أيضاً $\frac{2}{3} = \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$ ، وتكتب الجملة بالصيغة $(\mathcal{S}')$ المُكافئة الآتية :

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3} & (1') \\ y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3} & (2') \end{cases}$$

تمثِّل المعادلتان $(1')$ و $(2')$ المستقيم d نفسه، إذن للجملة مجموعة غير منتهية من الحلول هي إحداثيّات نقاط المستقيم d.

تمرينات ومسائل

1 نزوّد المستوي بمَعْلَم $(O;\vec{i},\vec{j})$. ونتأمّل النّقاط $A(5,-2)$ و $B(11,0)$ و $C(-1,6)$، أوجد معادلة لكلٍّ من متوسطات المثلّث ABC.

2 نزوّد المستوي بمَعْلَم $(O;\vec{i},\vec{j})$. ونتأمّل النّقاط $A(1,5)$ و $B(-1,-1)$ و $C(5,2)$، ونعرّف النقاط I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$، و J منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$، و K منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$، أوجد معادلة لكلٍّ من المستقيمات (IJ) و (IK) و (KJ).

3 حلّ جمل المعادلات الآتية، واشرح النتيجة هندسيّاً.

① $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$ ② $\begin{cases} x - y = 4 \\ 5x - 5y = -1 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 6x - y = -7 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ ④ $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}y = 0 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = \frac{17}{36} \end{cases}$ ⑥ $\begin{cases} \frac{5}{3}x - \frac{1}{4}y = \frac{35}{8} \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{20}y = \frac{7}{8} \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} 2x\sqrt{2} - y = 4-\sqrt{3} \\ 2y - x\sqrt{6} = 0 \end{cases}$ ⑧ $\begin{cases} \left(1-\sqrt{2}\right)x - y = 1 \\ x + \left(1+\sqrt{2}\right)y = -1-\sqrt{2} \end{cases}$

لنتعلّم البحث معاً

4 إيجاد معادلة مستقيم

نزوّد المستوي بمَعْلَم $(O;\vec{i},\vec{j})$. ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=-2x+9$، وليكن d' المستقيم الذي معادلته $y=x+3$. يتقاطع المستقيمان d و d' في I. ويقطع d محور التراتيب في A، كما يقطع d' محور الفواصل في B. لتكن E منتصف $[AI]$، ولتكن F نظيرة النّقطة B بالنسبة إلى E. أوجد معادلة للمستقيم (IF).

نحو الحلّ

✌ رسم الشّكل. ارسم d و d'، عيّن I ووضِّع النقطتين E و F.

✌ بحثاً عن نتائج مباشرة. كما في الهندسة، نتفحص الشكل الذي أنشأناه. النقطة E هي منتصف قطعتين مستقيمتين عيِّنهما، ماذا يمكنك القول بوجه خاصّ عن الشعاعين $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{IF}$ ؟

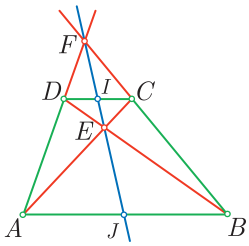
✌ بحثاً عن طريق. لإيجاد معادلة للمستقيم (IF)، هناك بوجه عام طريقتان : إمّا أن نحسب إحداثيّات نقطتين من هذا المستقيم، أو أن نحسب إحداثيتي نقطة منه ونعيِّن شعاعاً موجِّهاً له. يمكن في حالتنا التفكير قبل البدء بالحساب لاختيار الطريق الأنسب.

- يتطلّب حساب إحداثيتي النّقطة I حلّ جملة معادلتين خطيّتين، اشرح لماذا ؟
- بيِّن لماذا لا نستطيع تجنّب حساب إحداثيّتي النقطة I.
- هل يمكننا الإجابة عن السؤال المطروح دون حساب إحداثيات النقطتين E و F؟

احسب إحداثيات النقاط I و A و B، ثُمّ أوجد معادلة (IF).

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

5 معادلة مستقيم والوقوع على استقامة واحدة.



ليكن $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. ولتكن E نقطة تقاطع قطري شبه المنحرف، و F نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC).

أثبت، باستعمال مَعْلَم من اختيارك، أنّ المستقيم (EF) يمر بالنّقطة I منتصف $[DC]$، وبالنقطة J منتصف $[AB]$.

نحو الحلّ

✌ رسم الشكل. لا تواجهنا أية صعوبة برسم الشكل، يمكن إنشاء جميع النّقاط انطلاقاً من A و B و C و D. لذلك نختار مَعْلَماً تكون فيه إحداثيّات هذه النّقاط بسيطة. نختار مثلاً المَعْلَم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

✌ بحثاً عن نتائج مباشرة. أوجد إحداثيّات النّقاط A و B و D، في المَعْلَم الذي اخترناه. ثُم احسب بالاستفادة من الفرْض : $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$، إحداثيتي النقطة C.

✌ بحثاً عن طريق. نهدف إلى إثبات أنّ المستقيم (EF)، يمرّ بالنّقطتين I و J. لتحقيق ذلك يمكننا إيجاد معادلة للمستقيم (EF) ثُمّ نتوثّق أنّ إحداثيّات كلٍّ من I و J تُحقّق هذه المعادلة.

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

6 معادلة مستقيم والشاظر بالنسبة إلى نقطة

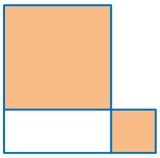
نزوّد المستوي بمَعلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ليكن d المستقيم الذي معادلته $y=\frac{3}{2}x+6$، ولتكن النّقطة $A(2,2)$. أعطِ معادلة للمستقيم d' نظير المستقيم d بالنّسبة إلى النّقطة A.

نحو الحلّ

- **رسم الشكل.** ارسم المستقيم d، ثُمّ وضّع النقطة A وأنشئ المستقيم d'.
- **بحثاً عن نتائج مباشرة.** استناداً إلى الفرْض d' نظير المستقيم d بالنسبة إلى النقطة A. عيّن مَيل المستقيم d.
- **بحثاً عن طريق.** نهدف إلى إيجاد معادلة للمستقيم d'، بيّن لماذا يمكننا أن نأخذها من الشّكل $y=mx+p$، العدد m معلوم. يكفي إذن أن نعيّن إحداثيتي نقطة ما من d'، ولكنّ نقاط هذا المستقيم هي نظائر نقاط المستقيم d بالنسبة إلى A. اختر نقطةً مناسبة من d واحسب إحداثيتي نظيرتها بالنّسبة إلى النقطة A.

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 مساحات السطوح، وحلّ المعادلات



مساحة المستطيل في الشكل المجاور 60 سنتيمتراً مربّعاً، ومجموع مساحتي المربّعين 169 سنتيمتراً مربّعاً. أوجد بُعدي المستطيل.

نحو الحلّ

- **رسم الشّكل.** ارسم الشكل بعناية، وضع العلامات المعتادة التي تدل على القطع المستقيمة المتساوية الطّول.
- **التعبير عن الفرضيّات.** «مساحة المستطيل 60 سنتيمتراً مربّعاً». للتعبير عن هذه الخاصّة نضع x للدلالة على طول المستطيل، ونضع y للدلالة على عرضه. فيكون $xy=60$. عبّر بأسلوب مماثل عن الخاصّة : «مجموع مساحتي المربّعين 169 سنتيمتراً مربّعاً».
- **بحثاً عن طريق.** بالنظر إلى نتائج الفقرة السابقة نرى أنّ المطلوب تعيين عددين عُرف جداء ضربهما ومجموع مربعيهما. يمكننا مثلاً أن نفكّر بتعويض $y=\frac{60}{x}$ في المعادلة الثانية. هل تستطيع حلَّ المعادلة الناتجة؟ ويمكننا أيضاً أن نتبع طريقة أخرى، إذا لاحظنا أن الحدَّين x^2+y^2 و xy يظهران عند نشر $(x+y)^2$. احسب $x+y$، وكذلك $x-y$.

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

8 المستقيمات المتلاقية

نزوِّد المستوي بمَعْلَم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. ونتأمّل النّقاط $A(3,0)$ و $B(3,4)$ و $C(0,4)$، ثُمّ نعرّف I منتصف القطعة المستقيمة $[OA]$، و J منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. أثبت أنّ المستقيمات (AC) و (IB) و (OJ) تتلاقى في نقطة واحدة.

نحو الحلّ

- **رسم الشّكل.** ارسم الشّكل بعناية، موضّعاً النّقاط A و B و C ثُمّ I و J.
- **بحثاً عن نتائجَ مباشرة.** أعطِ إحداثيّات I و J.
- **بحثاً عن طريق.** نهدف إلى إثبات تلاقي ثلاثة مستقيمات. لتحقيق ذلك يمكننا تعيين نقطة تقاطع مستقيمين منها، ثُمّ نبرهن أنّ المستقيم الثّالث يمرّ بهذه النّقطة. اكتب معادلة لكلٍّ من المستقيمات الثّلاثة.

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

حلٌّ آخر

لا يجب أن يمنعنا وجود مَعْلَم مفروض في نص المسألة من التفكير بحلٍّ هندسي بسيطٍ يريحنا من إجراء حسابات طويلة.

- لأنّ I و J هما منتصفا قطعتين مستقيمتين، يمكن أن ننظر إلى $[BI]$ و $[OJ]$ بصفتهما متوسِّطين في مثلّث. عيِّن هذا المثلّث، وارمز بالرّمز G إلى نقطة تقاطع هذين المتوسطين.
- كي نثبت أنّ (AC) يمرّ بالنقطة G يكفي أن نثبت أنّه المتوسط الثالث.

أنجز الحل واكتبه بلغة سليمة

9 الفرق بين عددين x و y يساوي 14، أمّا الفرق بين مربّعيهما فيساوي 616. احسب هذين العددين.

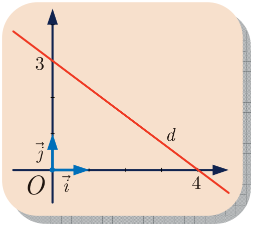
10 x و y عددان. الفرق بين مقلوبيهما 6، والفرق بين مربّعي مقلوبيهما يساوي 12. احسب هذين العددين.

11 الفرق بين عددين x و y يساوي 6، أمّا جداء ضربهما فيساوي 216. احسب هذين العددين.

12 احسب بُعدَي حقل مستطيل مساحته 120 متراً مربّعاً، ومحيطه 44 متراً.

13 احسب أطوال أضلاع مثلّث متساوي السّاقين ABC رأسه A، ومحيطه 36 سنتيمتراً، وطول ارتفاعه النازل من A يساوي 12 سنتيمتراً.

14 نزوّد المستوي بمَعلَم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. تأمّل الشّكل المجاور ثُمّ أجب عمّا يأتي :



① أوجد معادلة للمستقيم d.

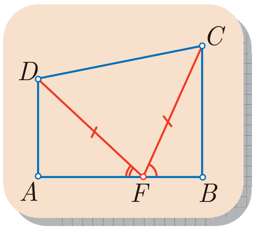
② أوجد معادلة للمستقيم d_1 نظير المستقيم d بالنسبة إلى محور الفواصل.

③ أوجد معادلة للمستقيم d_2 نظير المستقيم d بالنسبة إلى محور التراتيب.

④ أوجد معادلة للمستقيم d_3 نظير المستقيم d بالنسبة إلى المبدأ O.

15 سأل رجلٌ صديقَه عن عمره فأجابه : «عمري بقدر ضعفي عمرك الذي كنتَ فيه عندما كان عمري بقدر عمرك، وعندما يصبح عمرك بقدر عمري يصبح مجموع عمرينا 63 سنة». فكم عمر كلٍّ من الصّديقين؟

16 ليكن $ABCD$ شبه منحرف فيه الزاويتان $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ قائمتان. نفترض أنّ $AD=3$ و $BC=4$ و $AB=5$ وجميع الأطوال مُقاسة بالمتر. نختار نقطة F من القطعة المستقيمة $[AB]$ تُحقّق $DF=FC$. احسب AF.



17 ليكن $ABCD$ مربّعاً مركزه O. ولتكن M نظيرة النقطة O بالنّسبة إلى D، و K نظيرة C بالنّسبة إلى B. وأخيراً نرمز بالرّمز I إلى مركز ثقل المثلّث ADB.

① ليكن $(A;\vec{i},\vec{j})$ المَعلَم المتجانس الذي فيه $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}$ و $\overrightarrow{AD}=4\vec{j}$. أوجد إحداثيّات النقاط A و B و C و D و O و M و K و I.

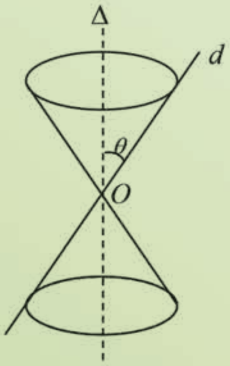
② يقطع المستقيمُ (MI) المستقيمَ (AB) في Q، ويقطع المستقيمُ (MC) المستقيمَ (AD) في P. نريد إثبات وقوع النقاط K و Q و P على استقامة واحدة.

- اكتب معادلة للمستقيم (MI) واستنتج إحداثيّتي النقطة Q.
- اكتب معادلة للمستقيم (MC) واستنتج إحداثيّتي النقطة P.
- أثبت أنّ النقاط K و Q و P تقع على استقامة واحدة.

5 القطوع المخروطيّة

الدّائرة – القطع المكافئ – القطع النّاقص – القطع الزّائد

مقدّمة

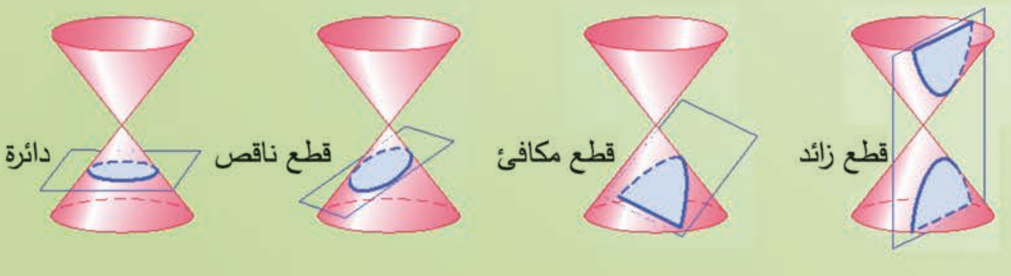


نتأمّل في الفراغ مستقيمين Δ و d متقاطعين في O، يحصران بينهما زاوية θ حيث $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

إنّ دوران d حول Δ دورة كاملة مع بقاء θ ثابتة يولّد سطحاً مخروطيّاً دورانيّاً رأسه O، وهو عبارة عن فرعين يشتركان بالرّأس O نرمّزه (C). نسمّي المستقيم الثّابت Δ محور السّطح المخروطيّ الدّورانيّ، والمستقيم d مولّداً له كما في الشّكل المجاور:

ومن تقاطع السّطح المخروطيّ الدّورانيّ (C) مع مستوٍ P (لا يمر برأسه O) يمكن أن نحصل على دائرة أو قطع مخروطيّ (مكافئ، ناقص، زائد) وذلك وفق الحالات الآتية:

- المستوي P يعامد Δ محور السّطح المخروطيّ ، عندئذٍ يكون المقطع دائرة. الشّكل (1).
- المستوي P يقطع جميع مولّدات السّطح المخروطيّ ولا يوازي المحور Δ، عندئذٍ يكون المقطع قطعاً ناقصاً. الشّكل (2).
- المستوي P يوازي أحد مولّدات السّطح المخروطيّ، عندئذٍ يكون المقطع قطعاً مكافئاً. الشّكل (3).
- المستوي P يوازي المحور Δ، عندئذٍ يكون المقطع قطعاً زائداً. الشّكل (4).



الشّكل (4) الشّكل (3) الشّكل (2) الشّكل (1)

1 الدّائرة

تعريف

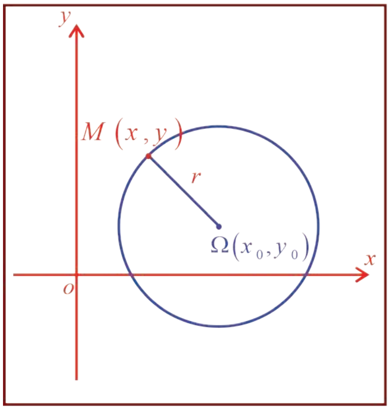
لتكن O نقطة من المستوي، وليكن r عدداً حقيقياً موجب تماماً. إنّ الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r هي مجموعة النقاط M من المستوي التي تبعد عن O مسافة تساوي r. نُرمّز هذه الدّائرة بالرّمز $C(O,r)$ ويقرأ الدّائرة الّتي مركزها O ونصف قطرها r.

عندئذٍ أيّاً كانت النقطة M، فإنّ الشرط $M \in C(O,r)$ يكافئ $OM = r$.

إذن: تتعيَّن الدّائرة إذا علم مركزها ونصف قطرها.

معادلة دائرة عُلمَ مركزها ونصف قطرها:

في مستوٍ منسوب إلى مَعْلَمٍ مُتجانِس $(O,\vec{i},\vec{j})$ نتأمّل نقطة $\Omega\left(x_0,y_0\right)$ ونتأمّل عدداً حقيقياً موجباً r.



تنتمي النقطة $M(x,y)$ إلى الدائرة $C(\Omega,r)$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $\Omega M = r$ أو $\Omega M^2 = r^2$. فإذا عبّرنا عن ذلك بتطبيق قانون المسافة بين نقطتين وجدنا:

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2} \quad ①$$

والعكس صحيح أيضاً، أي إنّ كلّ نقطة $M(x,y)$ تحقق العلاقة ① تقع حتماً على الدّائرة $C(\Omega,r)$.

نُسمِّي المعادلة ① الشّكل النّموذجيّ (الصيغة المختزلة) لمعادلة دائرة مركزها $\Omega\left(x_0,y_0\right)$ ونصف قطرها r.

مثال

جدْ المعادلة للدائرة التي مركزها $\Omega\left(-2,5\right)$ و نصف قطرها $r=4$.

الحل

المعادلة هي: $\left(x+2\right)^2+\left(y-5\right)^2=16$.

مثال

جدْ إحداثيّات المركز، ونصف قطر الدّائرة التي تقبل $\left(x-1\right)^2+\left(y-4\right)^2=25$ معادلة لها.

الحل

المعادلة لها الشكل $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ وبالتّالي نجد أنّ مركزها $\Omega\left(1,4\right)$ ونصف قطرها $r=5$.

حالة خاصّة: معادلة دائرة مركزها مبدأ الإحداثيات $O(0,0)$ و نصف قطرها r هي: $\boxed{x^2+y^2=r^2}$.

مثال

اكتب معادلة دائرة مركزها $O(0,0)$ و نصف قطرها $r=\sqrt{3}$.

الحل

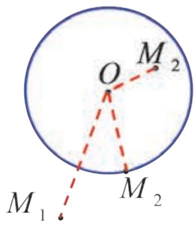
المعادلة $x^2+y^2=3$

مثال

المعادلة $x^2+y^2=12$ هي معادلة لدائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

وضع نقطة بالنّسبة إلى دائرة:

لتكن الدّائرة $C\left(O,r\right)$ دائرة في المستوي $\mathcal{P}$ ، ولتكن M نقطة من هذا المستوي. لتعيين وضع M بالنّسبة إلى الدّائرة نميّز الحالات الآتية:



1- M_1 نقطة خارج الدّائرة، إذا وفقط إذا $OM_1>r$

2- M_2 تنتمي إلى الدّائرة، إذا وفقط إذا $OM_2=r$

3- M_3 نقطة داخل الدّائرة، إذا وفقط إذا $OM_3<r$

مثال

لتكن الدّائرة C المُعيّنة بالمعادلة: $x^2+y^2=9$

عيّن وضع كل من النّقطتين $A\left(1,1\right)$ و $B\left(2,-3\right)$ بالنّسبة إلى الدّائرة C.

الحل

لمعرفة وضع نقطة بالنسبة لدائرة نحسب بُعد هذه النقطة عن مركز الدائرة فنحصل على إحدى الحالات السابقة.

من معادلة الدّائرة C نستنتج أنَّ مركز الدّائرة هو $O\left(0,0\right)$ ونصف قطرها يساوي $r=3$.

بُعد A عن مركز الدّائرة يساوي: $OA=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}<3$ ، أي إنّ $OA<r$ إذن A تقع داخل الدّائرة.

كذلك نجد أنّ: $OB=\sqrt{(2-0)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{13}>3$ ، إذن $OB>r$ والنقطة B تقع خارج الدّائرة.

الصّيغة العامّة لمعادلة دائرة:

نتأمّل الصّيغة القياسيّة لمعادلة دائرة مركزها $\Omega\left(x_0,y_0\right)$ ونصف قطرها r ، وهي:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

إذا نشرنا الأقواس وأصلحنا نجد:

$$x^2-2x_0x+{x_0}^2+y^2-2y_0y+{y_0}^2=r^2$$

$$x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+{x_0}^2+{y_0}^2-r^2=0$$

والصّيغة الأخيرة لها الشكل الآتي $x^2+y^2+ax+by+c=0$

حيث a,b,c ثوابت حقيقية. وتسمّى هذه الصّيغة بالصّيغة العامّة لمعادلة دائرة.

فكّر

ما الشرط الذي يجب أن تحقّقه الأعداد a, b, c كي تمثّل الصيغة العامة أعلاه معادلة دائرة؟

مثال

اكتب بالصّيغة العامّة معادلة دائرة مركزها $\Omega\left(-1,2\right)$ وتمرّ بالنّقطة $A(2,-2)$ وارسمها.

الحل

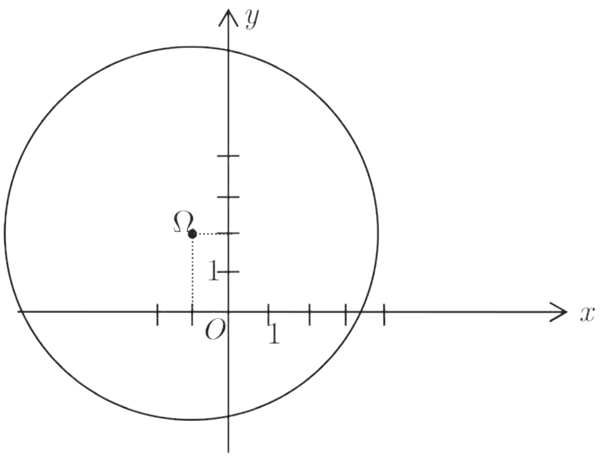
نعلم أنّ معادلة الدائرة المطلوبة هي

$\left(x+1\right)^2+\left(y-2\right)^2=25$،

وهي تؤول بعد النّشر والإصلاح إلى الصّيغة:

$x^2+y^2+2x-4y-20=0$

الرّسم:



إيجاد مركز ونصف قطر دائرة معادلتها بالصّيغة العامّة:

إذا كانت معادلة الدّائرة مكتوبة بالصّيغة العامّة وأردنا إيجاد إحداثيّات مركزها ونصف قطرها، فإنه بالإتمام إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y، تُردّ المعادلة إلى الشّكل القياسيّ $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ ويمكننا من ثمّ استنتاج المطلوب.

مثال

لتكن $x^2+y^2-2x+6y+6=0$ هي معادلة لدائرة C.

a) اكتب المعادلة بالصّيغة القياسيّة.

b) استنتج إحداثيّات مركز الدّائرة C ونصف قطرها.

الحل

$x^2-2x+y^2+6y+6=0$

a) بالإتمام إلى مربّعين كاملين نجد: $(x^2-2x+1)-1+(y^2+6y+9)-9+6=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2-4=0$

ومنه نجد الصّيغة المختزلة: $(x-1)^2+(y+3)^2=4$

b) بمقارنة المعادلة السّابقة مع الصّيغة $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ إذن مركز الدّائرة C هو $\Omega\left(1,-3\right)$ ونصف قطرها يساوي $r=2$.

مثال

لتكن $x^2 + y^2 + 6x + 6 = 0$ هي معادلة لدائرة C.

a) اكتب المعادلة بالصّيغة القياسيّة.

b) استنتج إحداثيّات مركز الدّائرة C ونصف قطرها.

الحل

a) بالإتمام إلى مربّع كامل نجد:

$$x^2 + 6x + y^2 + 6 = 0$$
$$x^2 + 6x + 9 - 9 + y^2 + 6 = 0$$

ومنه نجد الصّيغة القياسيّة: $\left(x+3\right)^2 + y^2 = 3$

b) بمقارنة المعادلة السّابقة مع الصّيغة $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ نجد أنّ مركز الدّائرة C هو $\Omega\left(-3,0\right)$ ونصف قطرها $r = \sqrt{3}$.

المعادلة ذات الصّيغة $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ، حيث a , b , c ثوابت حقيقيّة لا تمثّل بالضّرورة دائرة، إذ بالإتمام إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y نردّها إلى الشّكل:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = k$$

حيث k هو عدد حقيقيّ، وهنا نميّز ثلاث حالات:

- $k > 0$ عندئذ تمثّل المعادلة الدّائرة الّتي مركزها (x_0, y_0) ونصف قطرها $\sqrt{k}$.
- $k = 0$ عندئذ تؤول المعادلة إلى الشّكل $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = 0$، وهذا يتحقّق في حالة واحدة فقط وهي عندما $x = x_0$ و $y = y_0$، أي إنها تمثّل النّقطة الوحيدة (x_0, y_0).
- $k < 0$ عندئذ تمثّل المعادلة $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < 0$ المجموعة الخالية $\varnothing$.

مثال

عيّن مجموعة النّقط الّتي تمثّلها كلّ معادلة من المعادلات الآتية:

1. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$
2. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 4x + y + 6 = 0$

الحل

1. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

نتمّم إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y بأن نضيف ونطرح مربّع نصف أمثال كلاً من x و y.

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 4 = 0$$

لنحصل على متطابقات تربيعيه

$$\left(x+2\right)^2 - 4 + \left(y-1\right)^2 - 1 - 4 = 0$$
$$\left(x+2\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 9$$

والمعادلة الأخيرة لها الشّكل: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=k$ حيث $k=9>0$

فالمعادلة تمثّل الدّائرة الّتي مركزها $I(-2,1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{9}=3$.

❷ $2x^2+2y^2-2x+6y+5=0$

نقسّم طرفي المعادلة على العدد 2 حتّى نردّها إلى الشّكل العام، فتصبح: $x^2+y^2-x+3y+\frac{5}{2}=0$

ثم نتمّم إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y: $x^2-x+y^2+3y+\frac{5}{2}=0$

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}=0$$

$$(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(y+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}=0$$

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{3}{2})^2=0$$

فالمعادلة تمثّل النّقطة $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$.

❸ $x^2+y^2+4x+y+6=0$

نتمّم إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y:

$$x^2+4x+4-4+y^2+y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+6=0$$

$$(x+2)^2-4+(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+6=0$$

$$(x+2)^2+(y+\frac{1}{2})^2=-\frac{7}{4}$$

وهذا مستحيل فالمعادلة تمثّل المجموعة الخالية $\varnothing$ في هذه الحالة.

تدرّب

① جد معادلة الدّائرة في كلّ حالة ممّا يأتي:

❶ مركزها $(2,-1)$ ونصف قطرها $r=3$.

❷ مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{2}$.

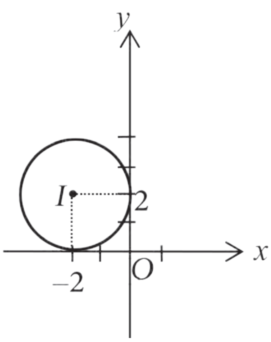
❸ مركزها $(0,0)$ وتمر بالنّقطة $(4,7)$.

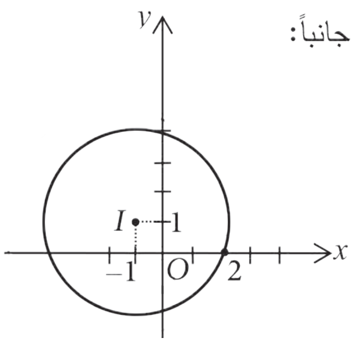
❹ $[PQ]$ قطر فيها، حيث: $P(-1,1)$ و $Q(5,9)$.

❺ مركزها $(7,-3)$ وتمسّ محور الفواصل.

❻ مركزها $(3,2)$ وتمسّ محور التراتيب.

② جد معادلة كل من الدّائرتين المرسومتين جانباً:





③ عيّن ماذا تمثّل كلّ معادلة ممّا يأتي، ثمّ ارسمها في حال كانت دائرة.

❶ $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

❷ $x^2 + y^2 + 6y + 12 = 0$

❸ $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 0$

❹ $9x^2 + 9y^2 + 18x - 6y - 26 = 0$

❺ $3x^2 + 3y^2 + 6x - 2y = 0$

④ ادرس تبعاً لقيم الوسيط الحقيقيّ λ ماذا تمثل المعادلة $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - \lambda = 0$

تماس دائرتين

الشّرط اللازم والكافي لتكون دائرتان $C_1(N, R_1)$ و $C_2(M, R_2)$ متماستين خارجاً (أو داخلاً) هو أن يكون البُعد المركزيّ NM مساوياً مجموع نصفي قطريهما (أو فرقهما)

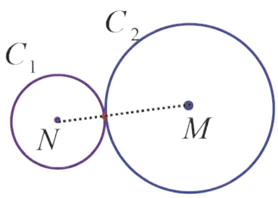
فإذا كانت دائرتان معينتان بالمعادلتين الآتيتين:

$$C_1 : \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R_1^2$$

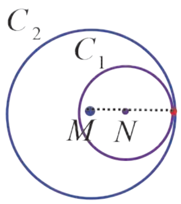
$$C_2 : \quad (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = R_2^2$$

ورمزنا ℓ للبعد المركزي للدائرتين ورمزنا R_1 , R_2 لنصفي قطريهما عندئذٍ نميّز حالتين للتّماس:

التّماس الدّاخلي والتّماس الخارجيّ كما في الشّكل:



تماس خارجي



تماس داخلي

في حالة التّماس الخارجي يكون: $\ell = R_1 + R_2$

وأمّا في حالة التّماس الدّاخلي يكون: $\ell = |R_1 - R_2|$

مركزا الدّائرتان المتماسّتان ونقطة التّماس تقع على استقامة واحدة.

مثال

لتكن معادلتا الدّائرتين C_1 , C_2 :

$$C_1 : \quad (x - 8)^2 + (y - 10)^2 = 49$$

$$C_2 : \quad (x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 36$$

أثبت أنّ الدّائرتين C_1 , C_2 متماستان خارجاً.

الحل

مركز الدّائرة الأوّلى: $O_1(8,10)$ ونصف قطرها $R_1 = \sqrt{49} = 7$

مركز الدّائرة الثّانية: $O_2(-4,5)$ ونصف قطرها $R_2 = \sqrt{36} = 6$

لنحسب المسافة بين مركزي الدائرتين

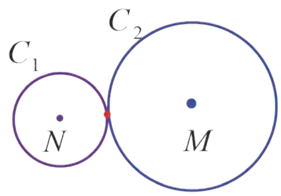
$$\begin{aligned} O_1O_2 &= \sqrt{(8+4)^2+(10-5)^2} \\ &= \sqrt{144+25} \\ &= 13 \end{aligned}$$

نلاحظ أنّ: $O_1O_2 = R_1 + R_2$ فالدّائرتان متماستان خارجاً.

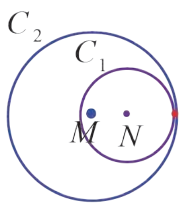
لتكن C_1 , C_2 دائرتين. للحصول على النّقط المشتركة بينهما نبحث عن الحل المشترك لجملة معادلتيهما ونميّز الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

الدّائرتان متماسّتان أي تشتركان بنقطة وحيدة نسمّيها نقطة التّماس.



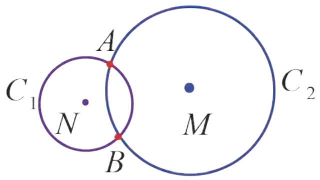
تماس خارجي



تماس داخلي

الحالة الثّانية:

الدّائرتان متقاطعتان أي تشتركان بنقطتين B , A نسمّيهما: نقطتي التّقاطع.

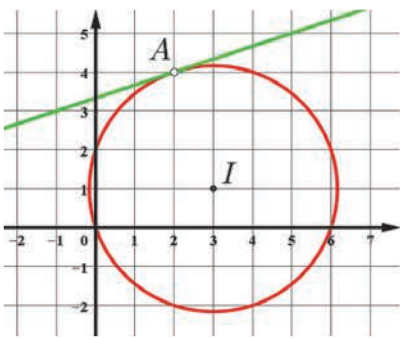


يمكننا معرفة الوضع النّسبي لدائرتين بمقارنة البعد بين مركزي الدّائرتين ℓ مع مجموع وفرق نصفي قطريهما R_1 , R_2 ونميّز الحالات الآتية:

- عندما يتحقق الشرط $R_1 + R_2 > \ell > |R_1 - R_2|$ تكون الدّائرتان C_2 , C_1 متقاطعتين، والعكس صحيح.
- عندما يتحقق الشرط $\ell > R_1 + R_2$ أو الشرط $\ell < |R_1 - R_2|$ تكون الدّائرتان متباعدتين ، والعكس صحيح.
- عندما يتحقق الشرط $\ell = R_1 + R_2$ تكون الدّائرتان متماسّتين خارجاً، والعكس صحيح.
- عندما يتحقق الشرط $\ell = |R_1 - R_2|$ تكون الدّائرتان متماسّتين داخلاً، والعكس صحيح.

تماس دائرة ومستقيم:

① المعادلة $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$ معادلةٌ للدائرة $\mathcal{C}$.



❶ أثبت أنَّ $A(2,4)$ نقطةٌ من $\mathcal{C}$.

❷ ارسم $\mathcal{C}$ وضِعْ عليها A، ثمَّ أنشئ من A المماس d للدائرة $\mathcal{C}$.

❸ اكتب معادلةً للمماس d.

الحل

❶ نعوض النقطة $A(2,4)$ في معادلة الدائرة $\mathcal{C}$

$$2^2 + 4^2 - 6(2) - 2(4) = 4 + 16 - 12 - 8 = 0$$

وبالتالي فإنّ النقطة A من الدائرة $\mathcal{C}$.

❷ نتمّم إلى مربّعين كاملين بالنّسبة إلى x و y، فنحصل على $(x-3)^2+(y-1)^2=10$ نستنتج أنّ مركزها $I(3,1)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{10}$.

❸ ليكن m_1 ميل المستقيم (IA)، عندئذ يكون: $m_1=\dfrac{y_A-y_I}{x_A-x_I}=\dfrac{4-1}{2-3}=-3$

وليكن m_2 ميل المستقيم d، وبما أنّ المستقيمين (IA) و d متعامدان، فإنّ $m_1\times m_2=-1$ ومنه $m_2=\dfrac{1}{3}$، وبالتالي فإنّ معادلة المماس d هي: $y-4=\dfrac{1}{3}(x-2)$، وبالإصلاح نحصل على المعادلة $x-3y+10=0$.

تَدرَّبْ

① عيّن مركز ونصف قطر كل من الدّوائر، ثُمّ عيّن الوضع النّسبي للدّائرتين C_1 , C_2.

$C_1 : x^2+y^2-25=0$

$C_2 : x^2+y^2=2$

$C_3 : 4x^2+4y^2-36=0$

② اكتب معادلة الدّائرة C في مستوٍ مُحدث بمعْلَمٍ مُتجانِس في الحالات الآتية:

1) $O(0,0)$ ، $R=4$

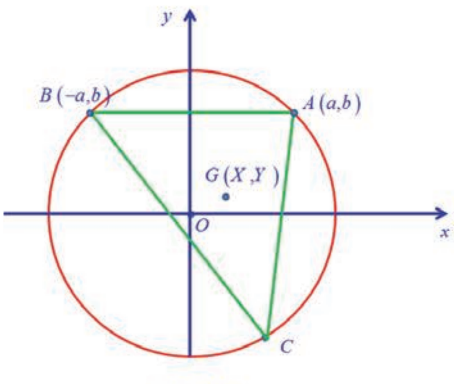
2) مركزها $Q(0,1)$ ، وتمس محور الفواصل

3) $O(0,0)$ ، وتمرّ بالنقطة $A(3,0)$.

③ في مستوٍ مُحدث بمعْلَمٍ مُتجانِس نقطتان $A(3,0)$, $B(4,0)$

أوجد معادلة الدّائرة الّتي تقبل القطعة المستقيمة $[AB]$ قطراً فيها

④ في الشكل (1) دائرة w نصف قطرها R، A, B نقطتان ثابتتان ومختلفتان تنتميان إلى هذه الدائرة تتحرك النقطة C على هذه الدائرة، وبفرض G مركز ثقل المثلث ABC أثبت أن G تتحرك على دائرة نصف قطرها $\dfrac{R}{3}$.



الشكل (1)

⑤ نتأمّل في معلمٍ متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المستقيم d ذا المعادلة $x+y-8=0$، والنقطة $A(3,0)$.

❶ وضّع النقطة A وارسم المستقيم d في شكلٍ واحد.

❷ لتكن H المسقط القائم للنقطة A على d و K نقطة تقاطع d مع محور الفواصل.

a. أثبت أنَّ المثلث AHK قائمٌ ومتساوي الساقين واحسب AH.

b. استنتج معادلةً للدائرة C التي مركزها A وتمسُّ المستقيمَ d.

2 القطع المكافئ (Parabola)

سوف تتعلم:

1. تعاريف وخواص عامة
2. المعادلة المختزلة للقطع المكافئ
3. المعادلة العامة لقطع مكافئ محور تناظره يوازي أحد محوري الإحداثيّات
4. خواص المماس لقطع مكافئ في نقطة منه

لقد درستَ سابقاً القطوع المكافئة بصفتها الخطوط البيانية للتوابع كثيرات الحدود من الدرجة الثانية، وقد كان محور تناظر كل منها يوازي محور التراتيب Oy. ولكننا لم نذكر التعريف الهندسي للقطوع المكافئة في ذلك الحين. لذلك سوف نعرّف هندسياً القطع المكافئ ونستنتج المعادلات للقطوع المكافئة التي توازي محاور تناظرها أحد المحورين الإحداثيّين.

في مراجعة للدرس (كثير الحدود من الدرجة الثانية) تعلمت أنَّ

ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية يكتب بالصيغة : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية معطاة و $a\neq 0$. لقد وجدنا في دراستنا السابقة أنّ f يُكتب بالصيغة القانونيّة :

$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ ولما كان $y=f(x)$ ولنرمز بالرمز $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ و $y_0=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

عندئذٍ يمكن كتابة **المعادلة السابقة بالصيغة النموذجية**

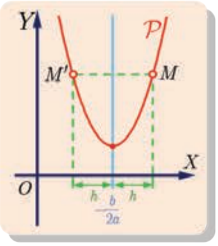
بالصيغة $y=a\left(x-x_0\right)^2+y_0$ ومنه $\left(x-x_0\right)^2=\dfrac{1}{a}\left(y-y_0\right)$ وتوصلنا للخلاصة الآتية :

الخلاصة

ليكن ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

- نُسمّي الخطَّ البيانيَّ للتابع f قطعاً مُكافئاً ونرمز إليه بالرمز $\mathcal{P}$.
- في حالة $a>0$، تكون فتحة القطع من الأعلى، ويبلغ f أصغر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}$.
- في حالة $a<0$، تكون فتحة القطع من الأسفل، ويبلغ f أكبر قيمه عند $x=-\frac{b}{2a}$.
- في كلا الحالتين تكون $x=-\frac{b}{2a}$ هي فاصلة **ذروة القطع** $\mathcal{P}$.
- ويكون المستقيم المارّ بالذروة موازياً لمحور التراتيب، **محور تناظر للقطع** $\mathcal{P}$.
- الرمز p في المعادلة $(x-x_0)^2=4p\,(y-y_0)$ يدل على وسيط القطع المكافئ.

فَكِّرْ :



من أين جاءت هذه الخاصّة التناظريّة للقطع المُكافئ؟ استعمل الصيغة القانونية لثلاثي الحدود f، ثُم احسب $f\left(\frac{-b}{2a}+h\right)$ و $f\left(\frac{-b}{2a}-h\right)$ حيث h هو عددٌ حقيقيٌّ ما. ماذا تستنتج؟

مثال

لنكتب المعادلة الآتية : $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$. بالشكل النموذجي.

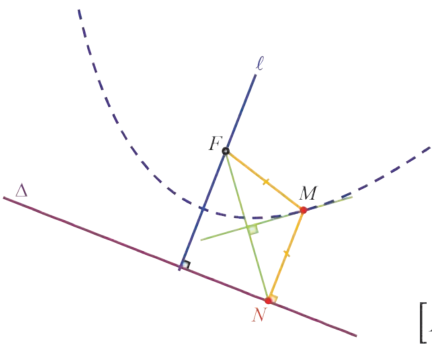
بضرب طرفي المعادلة المعطاة بالعدد -4 نجد: $-4y=x^2-2x+5$ نتمم إلى مربع كامل بالنسبة إلى x فنجد: $-4y=x^2-2x+1+4$ وهي تكافئ: $-4y=(x-1)^2+4$ أي: $(x-1)^2=-4(y+1)$

وهذه المعادلة من الشكل النموذجي $(x-x_0)^2=4p(y-y_0)$ وتمثل قطع مكافئ $\mathcal{P}$، ذروة القطع هي $V(x_0,y_0)$ أي $V(1,-1)$، و محوره تناظره يوازي محور التراتيب وقيمة الوسيط $p=-1$.

تعريف

ليكن Δ مستقيماً ما في المستوي، ولتكن F نقطة لا تنتمي إلى Δ $(F\notin\Delta)$.إنّ مجموعة النّقط M الواقعة في المستوي المعيّن بـ Δ و F والمتساوية المسافة عن Δ و F تؤلّف **قطعاً مُكافئاً محرقه F ودليله Δ** .

إنشاء قطع مكافئ $\mathcal{P}$ محرقه F ودليله Δ (باستعمال التعريف):



نتأمل المحرق F والدليل Δ ، ثم نختار أي نقطة N على المستقيم Δ

- نرسم محور القطعة $[NF]$.
- نرسم من N مستقيماً يُعامد الدليل Δ فيقطع محور القطعة $[NF]$ في نقطة M . عندئذٍ نجد $MF=MN$ (خاصة محور قطعة مستقيمة).

من أجل كل موضع للنقطة N على Δ نعين بالطريقة ذاتها النقطة M الموافقة فنحصل على القطع المكافئ كما في الشكل السّابق المرسوم.

المعادلة المختزلة لمعادلة قطع مكافئ:

مصطلحات : يُرمز للقطع المكافئ بالرمز $\mathcal{P}$.

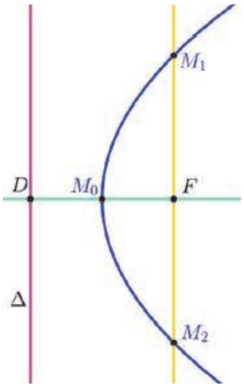
و بفرض M نقطة من القطع وَ N مسقطها القائم على Δ عندئذٍ:

$$M\in\mathcal{P}\Leftrightarrow MF=MN$$

- تسمى النقطة F محرق القطع المكافئ .

- يسمى المستقيم الثابت Δ دليل القطع المكافئ .
- البعد بين F وَ Δ ثابت ويسمى وسيط القطع المكافئ، و نرمز له $2p$.
- بفرض D مرتسم F على Δ ، M_2 نظيرة M_1 بالنسبة إلى المستقيم(FD) ، عندئذٍ نجد حسب خواص التناظر : $DM_0 = M_0F$ ومنه $M_0 \in \mathcal{P}$ عندئذٍ (FD) محور تناظر للقطع.

بفرض M_0 منتصف $[FD]$ فإن $M_0 \in \mathcal{P}$ وهي نقطة مشتركة بين القطع ومحوره التناظري .لذلك تُسمى M_0 ذروة القطع المكافئ .



ملاحظة: نقبل أنه لرسم القطع المكافئ يكفي معرفة ذروته ونقطتين منه:

1- نعين المحرق F ونرسم الدليل Δ في المستوي.

2- نرسم من F مستقيماً dعمودياً على محور القطع ثم نعين عليه النقطتين M_1, M_2 بجهتين مختلفتين من المحور يكون:

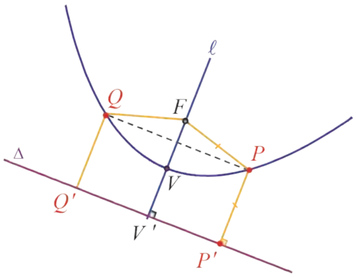
$$M_1F = M_2F = 2|p|$$

3- نعين ذروة القطع M_0 .

4- نرسم قوس القطع الذي يمر من النقط الثلاث M_0, M_1, M_2 كما في الشكل

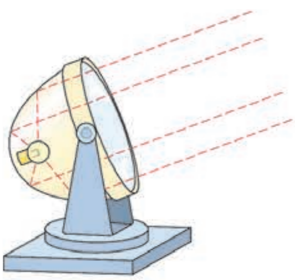
1.2.تعاريف وخصائص عامة

مبرهنة وتعريف

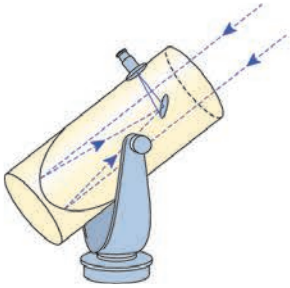


ليكن $\mathcal{P}$ القطع المكافئ الذي دليله Δ ومحرقه F. إنّ المستقيم ℓ المار بالنقطة F عمودياً على Δ هو **محور تناظر للقطع المكافئ** $\mathcal{P}$. وإذا كانت V' هي المرتسم القائم للمحرق F على الدليل Δ كانت النقطةُ V، منتصفُ القطعة المستقيمة $[FV']$، نقطةً من القطع المكافئ $\mathcal{P}$، نسميها **ذروة القطع المكافئ** $\mathcal{P}$.

فائدة :



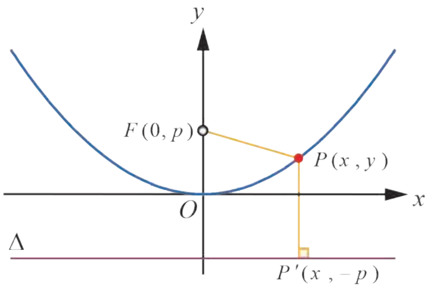
للقطوع المكافئة خواص عديدة تجعل منها مفيدةً جداً. فمثلاً يتمتّع السطح الدوراني الذي نحصل عليه من تدوير قطع مكافئ حول محور تناظره بخاصّة مهمة: الأشعة الضوئية الصادرة من منبع موضوع في المحرق تنعكس عن السطح بشكل حزمة موازية لمحور القطع، كما في الشكل المجاور .



وبالمثل، الأشعة الواردة إلى السطح القطعي المكافئ موازية لمحور تناظره تنعكس لتتجمع في المحرق. تُستعمل هذه الخاصة للقطوع المكافئة في تصميم مرايا التلسكوبات، وفي صنع هوائيات الرادارات، وهوائيات استقبال البث الفضائي. انظر الشكل المجاور.

2.1. المعادلة المختزلة للقطع المكافئ

ليكن Δ مستقيماً في المستوي ولتكن F نقطة لا تقع على Δ، ليكن $\mathcal{P}$ القطع المُكافئ الذي دليله Δ ومحرقه F. لنختر جملة محاور إحداثية متعامدة مبدؤها O منطبق على ذروة القطع المكافئ $\mathcal{P}$، ومحور تراتيبها Oy منطبق على محور تناظر $\mathcal{P}$. وبحيث تكون إحداثيّات F هي $(0,p)$.(الرسم المجاور) يوافق حالة $p>0$).

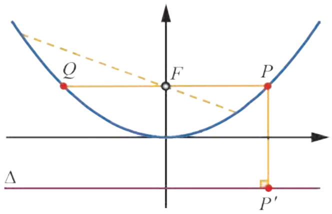


في هذه الحالة تكون معادلة الدليل Δ هي $y=-p$.

تنتمي النقطة $P(x,y)$ إلى القطع المكافئ $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا تحقّق الشرط $PF=PP'$، أي

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$

وبتربيع الطرفي والاختصار نجد



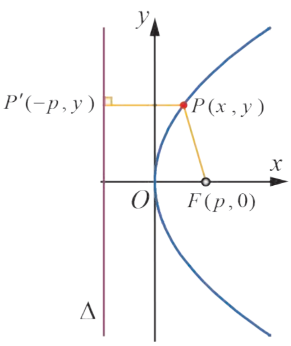
$$x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$

$$x^2=4py$$

وعليه نستنتج أنّ المعادلة القياسيّة لقطع مكافئ ذروته في مبدأ الإحداثيّات ومحور تناظره هو محور التراتيب هي $x^2=4py$ ويكون القطع مفتوحاً من الأعلى (أو من جهة التراتيب الموجبة) عندما $p>0$، ومفتوحاً من الأسفل (أو من جهة التراتيب السالبة) عندما $p<0$.

نسمّي كل قطعة مستقيمة تمر بمحرق القطع المكافئ ويقع طرفاها على القطع **وتراً محرقياً**، ونسمّي **وتراً محرقياً أساسياً** ذلك الوتر المحرقي الذي يوازي الدليل. في الشكل المجاور الوتر المحرقي الأساسي هو $[PQ]$ وطوله يحقّق المساواة $PQ=4|p|$. يفيد الوتر المحرقي الأساسي في رسم القطع المكافئ.



وبأسلوب مماثل، يمكننا إيجاد الشكل القياسي لمعادلة قطع مكافئ تنطبق ذروته على مبدأ الإحداثيّات ويقبل محور الفواصل Ox محور تناظر.

باختيار المحرق عند $F(p,0)$ ومعادلة الدليل $x=-p$، ثُمّ باتباع الخطوات السابقة نحصل على الشكل القياسي التالي لمعادلة القطع $\mathcal{P}$: $y^2=4px$

ويكون القطع مفتوحاً من اليمين (أو من جهة الفواصل الموجبة) عندما $p>0$، ومفتوحاً من اليسار (أو من جهة الفواصل السالبة) عندما $p<0$.

لنلخّص فيما يلي الخواص التي أثبتناها فيما سبق:

المعادلة القياسيّة لقطع مكافئ ذروته في المبدأ

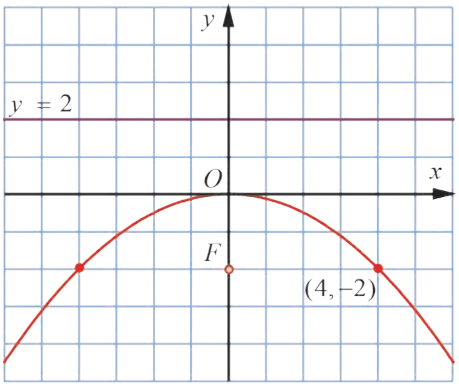
إنّ الخط البيانيّ لكلّ من المعادلات الآتية هو قطع مكافئ ذروته في مبدأ الإحداثيّات، ويحقّق الخواص المشار إليها حول محرقه ودليله ومحور تناظره:

① $x^2=4py$، المحرق $F(0,p)$ ومعادلة الدليل $y=-p$، ومحور التناظر Oy.

② $y^2=4px$، المحرق $F(p,0)$ ومعادلة الدليل $x=-p$، ومحور التناظر Ox.

مثال

عين محرق ودليل القطع المكافئ $x^2=-8y$ وارسمه.



الحل:

بمقارنة المعادلة $x^2=-8y$ مع الصيغة القياسية $x^2=4py$ نستنتج أنّ $4p=-8$، إذن $p=-2$. ومنه

- محور القطع هو محور التراتيب Oy.
- محرقه $F(0,-2)$.
- معادلة دليله Δ هي $y=2$.
- مفتوح من جهة التراتيب السالبة.
- طول وتره المحرقي الأساسي $4|p|=8$، فالقطع يمر بالنقطتين $(4,-2)$ و $(-4,-2)$.

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ المتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب، والذي ذروته في مبدأ الإحداثيّات ويمرّ بالنقطة $P(8,4)$.

الحل

الصيغة القياسية لهذا القطع هي $x^2=4py$ ولأنّ P تنتمي إلى هذا القطع وجب أن تحقّق إحداثيّات هذه النقطة $(8,4)$ معادلته أي $8^2=4p(4)$ ومنه $p=4$. وبهذا تصبح معادلة القطع المطلوب $x^2=16y$.

تدرّب

❶ عيّن محرق ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 6x$ وارسمه. أعد السؤال في حالة $y^2 = -12x$.

❷ اكتب معادلة القطع المكافئ المتناظر بالنسبة إلى محور الفواصل، والذي ذروته في مبدأ الإحداثيّات ويمر بالنقطة $P(-3,6)$.

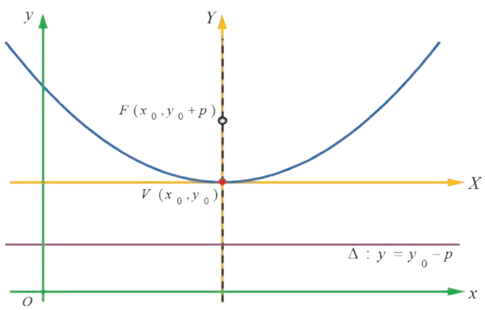
❸ فيما يلي معادلات مختزلة لقطوع مكافئة، عيّن في كل حالة ذروة القطع، ومحور تناظره، ومحرقه ومعادلة دليله وجهة فتحته:

① $y^2 - 6x = 0$ ② $y^2 + 6x = 0$

③ $x^2 - 6y = 0$ ④ $x^2 + 6y = 0$

3.1. المعادلة العامة لقطع المكافئ محور تناظره يوازي أحد محوري الإحداثيّات

1.3.1. الحالة الأولى: المحور يوازي محور التراتيب.



لنبحث عن الصيغة العامة لمعادلة قطع مكافئ ذروته النقطة $V(x_0, y_0)$ ومحور تناظره يوازي محور التراتيب. لمّا كان محرق القطع F واقعاً على محور التناظر استنتجنا أنّ إحداثيّي المحرق هما (x_0, y_0+p) حيث $p \neq 0$، وعندئذ تكون معادلة الدليل $y = y_0 - p$. كما في الشكل التالي: (في حالة $p > 0$).

معادلة القطع المكافئ في الجملة $\left(V, \vec{i}, \vec{j}\right)$ هي $X^2 = 4pY$ استناداً إلى ما رأيناه سابقاً. ولكن دساتير الانتقال من الجملة $\left(V, \vec{i}, \vec{j}\right)$ إلى الجملة $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ هي

$$y = y_0 + Y \quad \text{و} \quad x = x_0 + X$$

وعليه تكون معادلة القطع في الجملة $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ هي

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

إذن الصيغة القياسيّة لمعادلة القطع المكافئ الذي ذروته عند (x_0, y_0) ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $x = x_0$ هي $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$. فإذا كان $p > 0$ كان القطع مفتوحاً من الأعلى (أو من جهة التراتيب الموجبة) وإذا كان $p < 0$ كان القطع مفتوحاً من الأسفل (أو من جهة التراتيب السالبة).

2.3.1. الحالة الثانية: المحور يوازي محور الفواصل.

بأسلوب مماثل للحالة السابقة نبرهن أنّ الصيغة القياسيّة لمعادلة القطع المكافئ الذي ذروته عند (x_0, y_0) ومحور تناظره المستقيم الذي معادلته $y = y_0$ هي

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

فإذا كان $p > 0$ كان القطع مفتوحاً من اليمين (أو من جهة الفواصل الموجبة) وإذا كان $p < 0$ كان القطع مفتوحاً من اليسار (أو من جهة الفواصل السالبة).

المعادلة القياسيّة لقطع مكافئ ذروته ليست في المبدأ

إنّ الخط البياني لكل من المعادلات الآتية هو قطع مكافئ إحداثيّات ذروته (x_0, y_0)، ويحقّق الخواص المشار إليها حول محرقه ودليله ومحور تناظره :

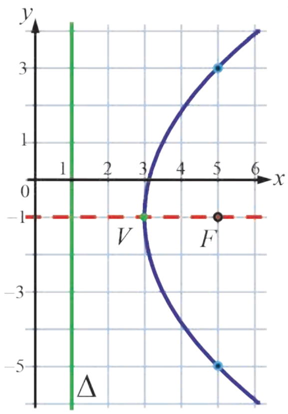
① $(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$، المحرق $F(x_0, y_0 + p)$ ومعادلة الدليل $y = y_0 - p$، ومحور التناظر هو المستقيم الذي معادلته $x = x_0$.

② $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$، المحرق $F(x_0 + p, y_0)$ ومعادلة الدليل $x = x_0 - p$، ومحور التناظر هو المستقيم الذي معادلته $y = y_0$.

مثال

عين ذروة ومحرق ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 2y - 8x + 25 = 0$ وارسمه.

الحل



نبدأ بكتابة المعادلة بالشكل $y^2 + 2y = 8x - 25$، ثُمّ نتمّم الطرف الأيسر إلى مربّع كامل بإضافة 1 إلى الطرفين لنجد

$$y^2 + 2y + 1 = 8x - 24 = 8(x - 3)$$

وأخيراً

$$(y + 1)^2 = 4(2)(x - 3)$$

فإذا قارنّا هذه المعادلة بالصيغة القياسيّة

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

استنتجنا أن $x_0 = 3$ و $y_0 = -1$ و $p = 2$

فذروة القطع المكافئ هي $V(3, -1)$، ومحرقه $F(5, -1)$ ومعادلة دليله $x = 1$. وهو مفتوح من جهة الفواصل الموجبة لأنّ $p > 0$. أمّا طول وتره المحرقي الرئيسي فيساوي $4|p| = 8$، وطرفاه هما النقطتان $(5, 3)$، و $(5, -5)$.

مثال

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي محرقه $F(-4,1)$ ومعادلة دليله $y=5$.

الحل

الدليل يوازي محور الفواصل إذن للقطع معادلة من الصيغة $(x-x_0)^2=4p(y-y_0)$. الذروة تقع في منتصف المسافة بين المحرق والدليل إذن إحداثيّات الذروة $(-4,3)$ أي $x_0=-4$ و $y_0=3$ أما p فتحسب من الصيغة $y_0+p=y_F$ (حيث y_F هو ترتيب المحرق) لنجد $p=-2$. ومعادلة القطع المكافئ المطلوب هي

$$(x-(-4))^2=-8(y-3)$$

التي يمكن إصلاحها لتأخذ الصيغة:

$$y=-\frac{x^2}{8}-x+1 \quad \text{أو} \quad x^2+8x+8y-8=0$$

تدرّب

❶ فيما يلي معادلات قياسية لقطوع مكافئة، عيّن في كل حالة ذروة القطع، ومحور تناظره، ومحرقه ومعادلة دليله وجهة فتحته، وارسمه.

① $(y-3)^2=4(x+1)$ ② $(x-3)^2=4(y-2)$

③ $(y-1)^2=2x$ ④ $(y-1)^2=-3(x+1)$

⑤ $(x+2)^2=-3(y+1)$

❷ اكتب معادلة القطع المكافئ الذي محرقه $F(2,5)$ ومعادلة دليله $y=-1$.

❸ اكتب معادلة القطع المكافئ الذي ذروته $V(2,1)$، ومحور تناظره يوازي محور التراتيب Oy ويمر بالنقطة $(5,-1)$، وارسمه.

❹ اكتب معادلة القطع المكافئ الذي ذروته $V(-2,-2)$ ومعادلة دليله $y=-3$.

❺ فيما يلي معادلات لقطوع مكافئة، عيّن في كل حالة ذروة القطع، ومحور تناظره، ومحرقه ومعادلة دليله وجهة فتحته، وارسمه.

① $y^2+4y-4x+16=0$ ② $x^2-2y+8x+10=0$

③ $y^2+6y+3x+5=0$ ④ $3x^2-8y-12x=4$

❻ عيّن معادلة قطع مكافئ محور تناظره يوازي محور التراتيب Oy ويمر بالنقاط: $M_1(3,0)$ و $M_2(-5,0)$ و $M_3(0,-5)$. ثمّ عين محرقه ومعادلة دليله.

❼عيّن معادلة قطع مكافئ محور تناظره يوازي محور الفواصل Ox ويمر بالنقاط: $M_1(2,-1)$ و $M_2(1,-1)$ و $M_3(-1,2)$. ثُمّ عين محرقه ومعادلة دليله.

4.2.خصائص المماس لقطع مكافئ في نقطة منه

تعريف

ليكن $\mathcal{P}$ قطعاً مكافئاً، ولتكن M نقطة من هذا القطع. نقول إنّ المستقيم d يمسّ القطع $\mathcal{P}$ في M أو إنّه **مماس للقطع $\mathcal{P}$ في M**. إذا تحقّق الشرطان :

① المستقيم d لا يوازي محور تناظر القطع.

② النقطة M هي النقطة الوحيدة المشتركة بين القطع $\mathcal{P}$ والمستقيم d.

تعريف

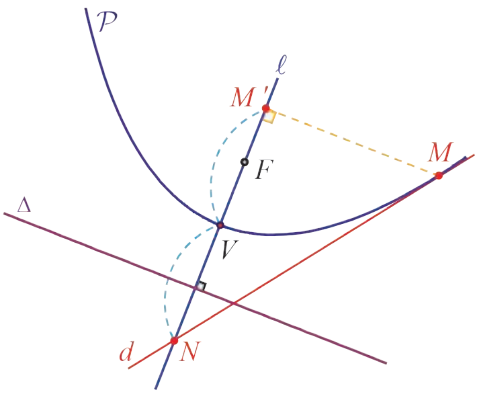
نسمّي المستقيم العمودي على المماس لقطع مُكافئ في نقطة التماس المستقيم **الناظم على القطع المكافئ** عند هذه النقطة.

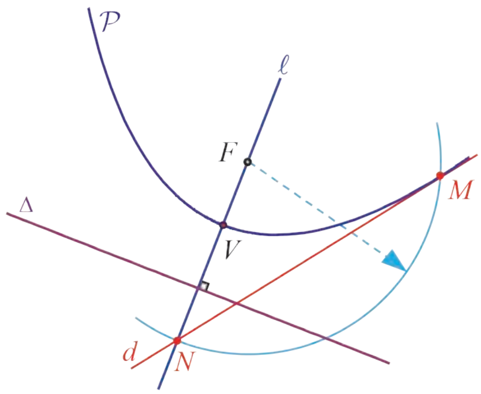
مبرهنة (تقبل دون ذكر البرهان)

نتأمّل قطعاً مُكافئاً $\mathcal{P}$ دليله المستقيم Δ ومحرقه F ومحور تناظره ℓ وذروته V. لتكن M نقطة من القطع المكافئ $\mathcal{P}$ مختلفة عن ذروته.

①إنّ المماس d للقطع المكافئ $\mathcal{P}$ في M يقطع ℓ في نقطة N هي نظيرة M' المسقط القائم على ℓ للنقطة M بالنسبة إلى الذروة V. أما المماس للقطع المكافئ $\mathcal{P}$ في ذروة القطع فهو العمود على محور التناظر ℓ في V.

② إن المماس d للقطع المكافئ $\mathcal{P}$ في M يقطع ℓ في نقطة N تقع خارج القطع وتبعد عن محرقه F مسافة تساوي بُعد المحرق عن M، أي $FM = FN$.



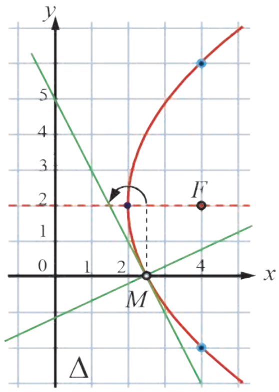


مثال

ليكن القطع المكافئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته : $y^2-4y-8x+20=0$.

① اكتب معادلة $\mathcal{P}$ بالصيغة القياسية.

② أوجد معادلتي المماس والناظم لهذا القطع في النقطة التي ترتيبها $y=0$ منه وارسمهما مع القطع على الشكل نفسه.



الحل

① بالإتمام إلى مربّع كامل نجد أنّ معادلة القطع تُكافئ $(y-2)^2=8(x-2)$.

وبالمقارنة مع الشكل القياسي $(y-y_0)^2=4p(x-x_0)$ نستنتج أنّ ذروة القطع هي النقطة $V(2,2)$، ومحرقه هو النقطة $F(4,2)$ ومحور تناظره يوازي محور الفواصل ومعادلته $y=2$ ، ودليله منطبق على محور التراتيب الذي معادلته $x=0$.

② إنّ فاصلة النقطة التي ترتيبها $y=0$ من القطع هي $x=\frac{5}{2}$. إذن نرغب بتعيين المماس للقطع $\mathcal{P}$ المار بالنقطة $M\left(\frac{5}{2},0\right)$. سنتبع طريقتين :

الطريقة الأولى : لتكن M' المسقط القائم للنقطة M على محور التناظر. من الواضح أنّ إحداثيّي M' هما $\left(\frac{5}{2},2\right)$. وإذا كانت $N(x_1,y_1)$ نظيرة M' بالنسبة إلى الذروة $V(2,2)$ كان $x_1=\frac{3}{2}$ و $y_1=2$. واستناداً إلى الخاصة الهندسيّة للمماس، نعلم أنّه يمرّ بالنقطتين

$$M\left(\frac{5}{2},0\right) \text{ و } N\left(\frac{3}{2},2\right)$$

فمعادلة المماس في M هي $\dfrac{y-0}{x-\frac{5}{2}}=\dfrac{2-0}{\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}=-2$

أي $y=-2x+5$.

أمّا معادلة الناظم، فتتعيّن ببساطة، إذ نتذكّر أنّ جداء ميلَيْ مستقيمين متعامدين يساوي -1، إذن ميل الناظم على القطع في M يساوي $\dfrac{1}{2}$ وهو يمر بالنقطة $M\left(\frac{5}{2},0\right)$، فمعادلته

$$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)=\frac{x}{2}-\frac{5}{4}$$

الطريقة الثانية : لمّا كان المماس المطلوب يمر بالنقطة M كانت معادلته من الشكل $y=m\left(x-\frac{5}{2}\right)$ حيث $m\neq 0$، ولتعيين m ندرس تقاطع هذا المستقيم مع القطع بالحل المشترك لجملة معادلتيهما. ولأنّ معادلة القطع تحوي حداً واحداً فيه x، نحسب x من معادلة المستقيم ثُم نعوض في معادلة القطع ،ولكن في حالة التماس يوجد حلٌ واحدٌ، ومن ثَمّ يجب أن يكون $y_2=y_1$ أي $4+\dfrac{8}{m}=0$ ومنه $m=-2$. ونحصل مجدداً على معادلة المماس المطلوبة.

مثال

ليكن القطع المكافئ الذي معادلته: $y=-\frac{1}{2}x^2+x-4$. أوجد معادلة المماس لهذا القطع الذي ميله $m=-1$.

الحل

إنّ معادلة أي مستقيم ميله -1 هي من الشكل $y=-x+h$ ، المطلوب هنا فعلياً هو تعيين قيم h التي تجعل هذا المستقيم مماساً للقطع. وهذا يُكافئ أن يتقاطع مع القطع المكافئ بنقطة واحدة (لأن هذا المستقيم لا يوازي محور تناظر القطع).

لإيجاد نقاط التقاطع نبحث عن الحلول المشتركة لجملة المعادلتين $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x^2+x-4 \\ y=-x+h \end{cases}$

بتعويض قيمة y من المعادلة الثانية في المعادلة الأولى نجد $-\frac{1}{2}x^2+x-4=-x+h$

وهذه تُكافئ $(x-2)^2=-4-2h$

نناقش الحالات الآتية:

في حالة $h>-2$: لا يتقاطع المستقيم d_h الذي معادلته $y=-x+h$ مع القطع.

عندما $h=-2$ ، يشترك معه بنقطة واحدة وتكون فاصلة هذه النقطة $x=2$ وترتيبها $y=-4$.

أمّا في حالة $h<-2$ فيشترك d_h مع القطع بنقطتين وعندئذ يكون قاطعاً.

ومعادلة المماس المطلوب هي $y=-x-2$ ، وهو يمس القطع عند النقطة $(2,-4)$.

تدرّب

1 أوجد محرق ودليل القطع الذي معادلته:

① $y^2=x$ ② $y=\frac{1}{4}x^2$

③ $x^2=2y$ ④ $(x-2)^2=8(y+1)$

2 أوجد معادلة القطع المُكافِئ الذي ذروته $M_o(3,-5)$ ومحرقه $F(3,-3)$ ثُمّ ارسمه:

3 ليكن القطع المُكافِئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته: $y=x^2+4x$

① عيّن محور القطع، وسيطه، ذروته، محرقه ومعادلة دليله ثُمّ ارسمه.

② أوجد معادلة المماس والناظم في النّقطة التي فاصلتها $x=-2$.

4 ليكن القطع المُكافِئ $\mathcal{P}$ الذي معادلته: $y^2-12x+2y+25=0$

① أوجد محور القطع، وسيطه، ذروته، محرقه ومعادلة دليله ثُمّ ارسمه.

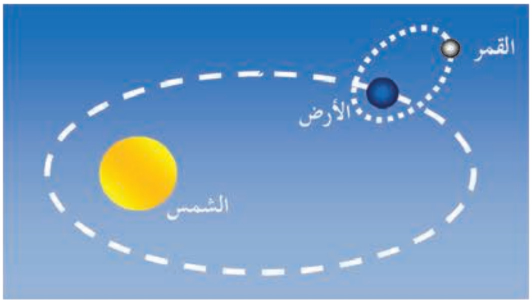
② أوجد معادلة المماس في نقطة منه ترتيبها $y=-2$.

القطع النّاقص (Ellipse)

سوف تتعلّم:

1) تعريف القطع النّاقص.
2) رسم القطع النّاقص بخط مستمر .
3) خواص القطع النّاقص.
4) المعادلة المختزلة لقطع ناقص.

القطع النّاقص هو منحني بيضوي (إهليلجي) على شكل دائرة مضغوطة، وإنّ المسار الذي ترسمه الأرض في دورانها حول الشمس قطعٌ ناقص. وهو حال جميع الأجرام السماويّة التي تتحرّك بتأثير الجاذبيّة حول نجم ضخم. هذا هو أحد قوانين كبلر .



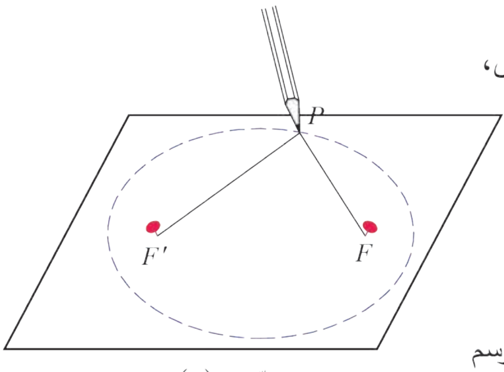
تعريف

القطع النّاقص هو مجموعة نقاط المستوي الّتي مجموع بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين F و F' في المستوي يساوي مقداراً ثابتاً.

نسمّي F و F' **محرقي القطع النّاقص**. ونرمز للقطع الناقص $\mathcal{E}$.

رسم القطع النّاقص بخط مستمر :

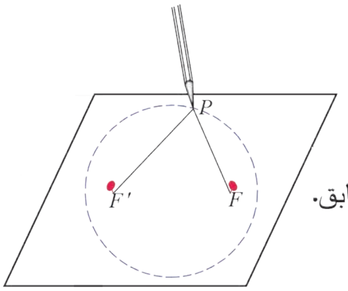
نستطيع رسم قطع ناقص يحقق التّعريف السّابق وذلك باستعمال مسماري كبس صغيرين، وخيط غير قابل للامتطاط، وقلم رصاص، حيث نبدأ أولاً بتحديد النّقطتين F و F' على قطعة من الورق المقوّى، ثمّ نثبّت المسمارين عند F و F' ، ونربط طرفي الخيط بالمسمارين المثبّتين، بعدها نشدّ الخيط برأس قلم الرّصاص الّذي يلامس قطعة الورق المقوّى (كما في الشّكل (1) المجاور) ، ثمّ نحرّك القلم بهدوء وعناية (مع إبقاء الخيط مشدوداً) دورة كاملة فترسم بذلك القطع النّاقص المنشود.



الشّكل (1)

يمكن أن نرسم بنفس قطعة الخيط عدّة قطوع ناقصة وبأشكال مختلفة عن طريق تغيير المسافة بين المحرقين F و F'. فإذا زادت المسافة FF'، وكان طول الخيط أكثر قليلاً منها ظهر القطع النّاقص أضيق، كما في الشكل (1) السّابق. في حين أنّ تقصير المسافة وجعلها أقلّ بكثير من طول الخيط يجعل القطع النّاقص المرسوم يقترب أكثر فأكثر من شكل الدّائرة كما في الشّكل (2) المجاور.

وعندما يكون $F = F'$ نحصل على دائرة.

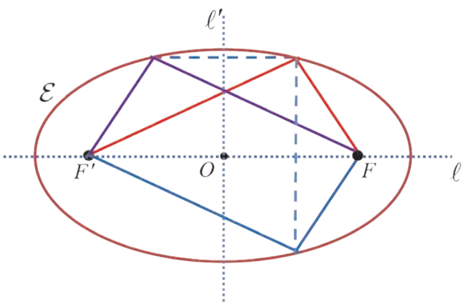


الشّكل (2)

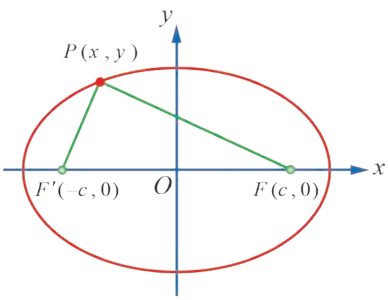
محورا تناظر القطع النّاقص:

ليكن $\mathcal{E}$ القطع الناقص الذي محرقاه F و F'. إنّ المستقيم ℓ المار بالمحرقين F و F' محور تناظر للقطع النّاقص $\mathcal{E}$، ويسمّى **المحور المحرقي** أو **المحور الرئيسي**. وكذلك يكون المستقيم ℓ'، محور القطعة المستقيمة $[FF']$، هو أيضاً محور تناظر للقطع النّاقص $\mathcal{E}$، ويسمّى **المحور اللامحرقي** أو **المحور الثّانوي**.

ينتج من ذلك أنّ منتصف القطعة المستقيمة $[FF']$ ولتكن O مركز تناظر للقطع النّاقص $\mathcal{E}$، لأنّها نقطة تقاطع محوري التّناظر ℓ و ℓ' كما في الشكل (3)، وتسمّى O مركز القطع.



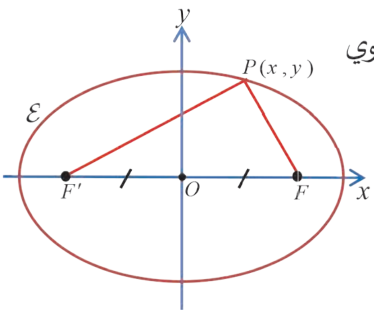
الشّكل ③



الشّكل ④

المعادلة المختزلة لقطع ناقص:

ليكن القطع النّاقص $\mathcal{E}$ الذّي محرقاه F و F'، نتأمّل جملة إحداثيّة في المستوي مبدؤها O منطبق على مركز القطع، ومحور الفواصل منطبق على المحور المحرقي للقطع، نفترض أنّ $F(c,0)$ حيث $c > 0$، فتكون $F'(-c,0)$ وتكون المسافة بين المحرقين هي: $FF' = 2c$ كما في الشّكل (4) وتسمّى **البعد المحرقي**.



الشّكل ⑤

ونفترض أنّ مجموع بعدي أي نقطة من القطع عن المحرقين F و F' يساوي $2a$. عندئذٍ أيّاً كانت النّقطة $P(x\,,y) \in \mathcal{E}$ كان $PF + PF' = 2a$ (تعريف) ، واعتماداً على دستور المسافة بين نقطتين تكتب العلاقة السّابقة كالآتي:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

أو
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

بتربيع الطّرفين نجد:
$$(x-c)^2+y^2=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$

بالنّشر نجد:
$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-2(2a)\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

ومنه:
$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

وبالإصلاح نجد:
$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

نقسّم الطّرفين على العدد 4 فنجد:
$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

نربّع الطّرفين:
$$a^2\left((x+c)^2+y^2\right)=\left(a^2+cx\right)^2$$

بالنّشر نجد:
$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2cxa^2+c^2x^2$$

ومنه:
$$a^2x^2+2cxa^2+c^2a^2+a^2y^2=a^4+2cxa^2+c^2x^2$$

أي:
$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-c^2a^2$$

ومنه:
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

نقسّم الطّرفين على $a^2(a^2-c^2)$ فنجد:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}=1 \qquad *$$

ولكن بحسب متراجحات المثلّث لدينا: $PF+PF'>FF'$ أي $2a>2c$ ومنه $a>c>0$ وبالتّالي $a^2>c^2$

أي $a^2-c^2>0$ ، لنعرّف $b^2=a^2-c^2$ ونعوّضها في * فنجد: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ وتسمّى الصّيغة الأخيرة **المعادلة المختزلة لقطع ناقص** ، محرقاه على محور الفواصل ومركزه في المبدأ و $a>c>0$ ، $a>b>0$ و $\boxed{a^2=b^2+c^2}$.

ذُرا القطع النّاقص:

الذّروة في القطع النّاقص هي كلّ نقطة مشتركة بين القطع ومحور تناظر له.

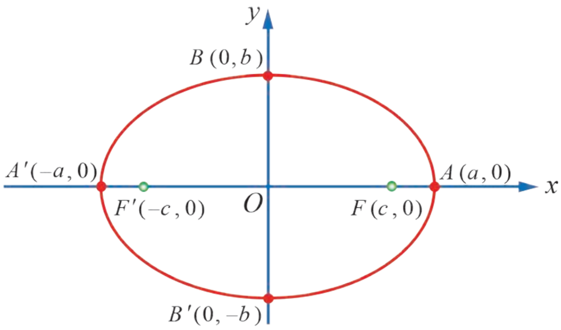
- الذُّرا الواقعة على محور الفواصل Ox توافق $y=0$ نعوّض في المعادلة المختزلة للقطع فنجد: $\frac{x^2}{a^2}=1$ أي: $x^2=a^2$ وحلول هذه المعادلة هي $x=a$ أو $x=-a$ وهذا يوافق الذّروتين:
$A(a,0)\ ,\ A'(-a,0)$

نلاحظ أنّ طول القطعة المستقيمة $[AA']$ يساوي: $2a$.

الذُّرا الواقعة على محور التّراتيب Oy توافق $x=0$ نعوّض في المعادلة المختزلة للقطع فنجد: $\frac{y^2}{b^2}=1$ أي: $y^2=b^2$ وحلول هذه المعادلة هي $y=b$ أو $y=-b$ وهذا يوافق الذّروتين: $B(0,b)$, $B'(0,-b)$، نلاحظ أنّ طول القطعة المستقيمة $[BB']$ يساوي: $2b$.

وبما أنّ $a>b$ نجد أن $2a>2b$ أي

$AA'>BB'$



- تسمّى القطعة المستقيمة $[AA']$ **القطر الرّئيسي (أو القطر الكبير) للقطع.**
- تسمّى القطعة المستقيمة $[BB']$ **القطر الثّانوي للقطع (أو القطر الصّغير للقطع).**

مثال

قطع ناقص معادلته $9x^2+25y^2=225$، عين محرقيه وذراه وارسمه.

الحل

نردّ المعادلة إلى الصّيغة المختزلة بأن نقسّم طرفيها على العدد 225 فنجد: $\frac{9x^2}{225}+\frac{25y^2}{225}=1$

نختزل الكسور في المعادلة السّابقة فنجد: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ وهي من الشّكل $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث:

$a^2=25$, $b^2=9$ ومنه: $a=5$, $b=3$

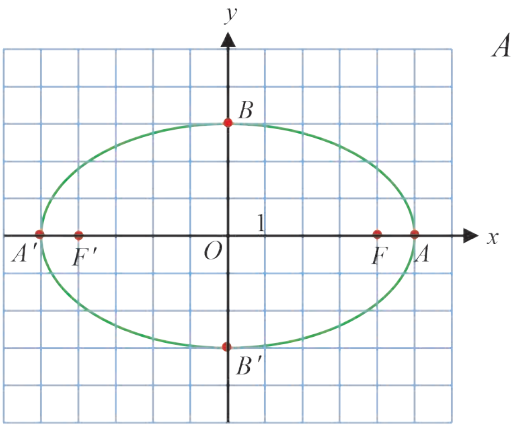
وبالتّالي طرفا القطر الكبير هما الذّروتان: $A(5,0), A'(-5,0)$

وطرفا القطر الصغير هما الذّروتان: $B(0,3),\ B'(0,-3)$.

وبما أنّ: $c^2=a^2-b^2$ نجد أنّ $c^2=25-9=16$،

إذن: $c=4$، ومحرقا القطع هما:

$F(4,0)$, $F'(-4,0)$ كما في الشّكل الآتي:



مثال

قطع ناقص محرقاه عند النّقطتين $F'(-2,0)$, $F(2,0)$، وله ذروتان عند النقطتين: $(\pm4,0)$. أوجد معادلته وارسمه.

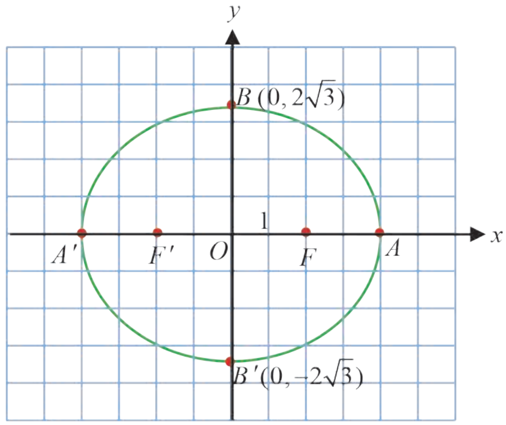
الحل

بما أنّ المحرقين هما : $F'(-2,0)$, $F(2,0)$ فإنّ: $c=2$، وبما أنّ الذّروتين عند: $(\pm4,0)$ فإن $a=4$.

ولدينا $b^2=a^2-c^2$ ومنه: $b^2=16-4=12$ ومعادلة القطع من الشّكل: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ أي:

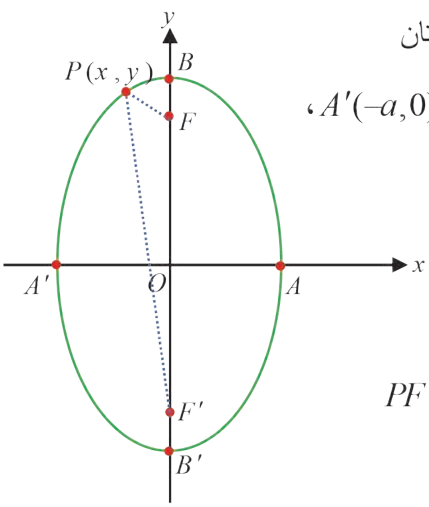
$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ هي معادلة القطع المنشودة.

الرسم:



القطع النّاقص الذّي محوره المحرقي ينطبق على محور التّراتيب:

نتأمّل قطعاً ناقصاً $\mathcal{E}$ الذّي محرقاه F و F'، نتأمّل جملة إحداثيّة في المستوي مبدؤها O منطبق على مركز القطع، ومحور التّراتيب منطبق على المحور المحرقي للقطع، في هذه الحالة يكون طرفا القطر الكبير هما الذّروتان $B(0,b)$ و $B'(0,-b)$، أمّا طرفا القطر الصّغير هما $A(a,0)$ و $A'(-a,0)$، ومحرقاه $F(0,c)$ ، $F'(0,-c)$ حيث $c>0$.



ويكون في هذه الحالة أنّ $b>a$ و $b^2=a^2+c^2$

ولإيجاد المعادلة المختزلة للقطع النّاقص $\mathcal{E}$ نكتب:

أيّاً كانت $P(x,y)\in\mathcal{E}$ فإنّ هذا يكافئ تحقّق الشّرط $PF+PF'=2b$

وبحسب دستور المسافة بين نقطتين نكتب:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}=2b$$

حيث نحصل كما في الحالة السّابقة على الصّيغة:

$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ حيث $b>a$ ، وهي الصّيغة المختزلة لقطع ناقص مركزه $O(0,0)$ ، ومحوره المحرقي منطبق على محور التّراتيب كما في الشّكل المجاور.

مبرهنة (تقبل دون ذكر البرهان)

مساحة القطع النّاقص الذي نصف قطره الكبير a ونصف قطره الصّغير b تعطى بالعلاقة: $S=\pi\cdot a\cdot b$

مثال

قطع ناقص معادلته: $9x^2+4y^2=36$. عيّن ذراه ومحرقيه وارسمه واحسب مساحته.

الحل

نردّ المعادلة إلى الصّيغة المختزلة بأن نقسّم طرفيها على العدد 36 فنجد: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$

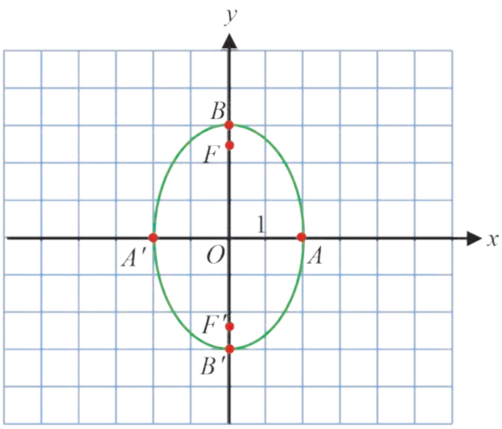
ويكون: $a^2=4$ ومنه $a=2$

$b^2=9$ ومنه $b=3$ ومساحته $S=6\pi$.

ذروتا القطع الموافقتان للقطر الرّئيسي هما النّقطتان: $B(0,3)$ و $B'(0,-3)$ ، أمّا ذروتاه الموافقتان للقطر الثّانوي هما $A(2,0)$ و $A'(-2,0)$ ، ويكون في هذه الحالة $c^2=b^2-a^2$ أي $c^2=9-4=5$ ومنه $c=\sqrt{5}$

ومحرقاه $F(0,\sqrt{5})$ ، $F'(0,-\sqrt{5})$.

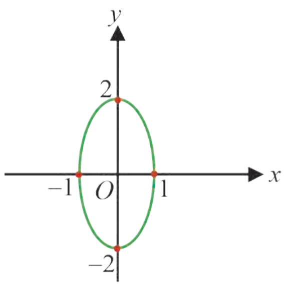
الرسم:



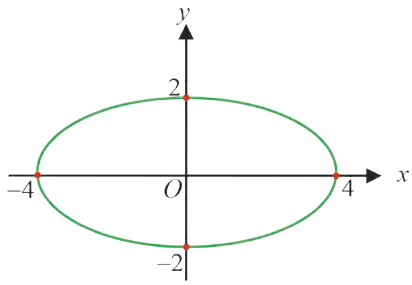
تدرّب

❶ فيما يلي معادلات لأربعة قطوع ناقصة مرسومة، أقرن كل قطع ناقص مرسوم بمعادلته مع التّعليل اعتماداً على المحور المحرقي والذّرا:

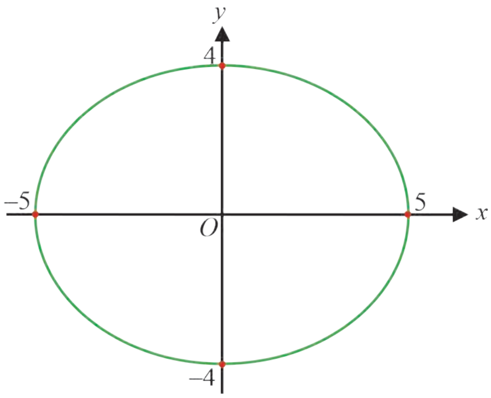
① $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ② $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$ ③ $4x^2+y^2=4$ ④ $16x^2+25y^2=400$



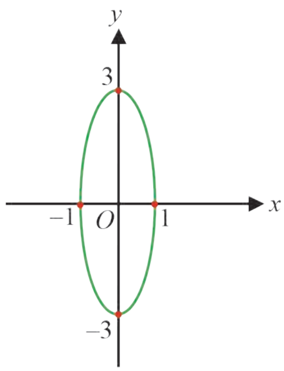
(1)



(2)



(3)

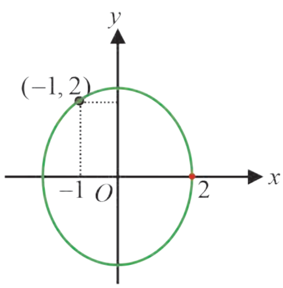


(4)

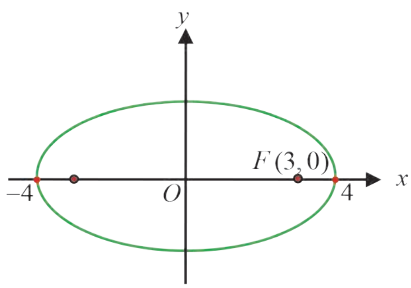
② أوجد كلّاً من: المحرقين، الذّرا، طول القطر الكبير، طول القطر الصّغير، ثمّ ارسم القطع النّاقص الموافق لكلّ حالة ممّا يأتي:

① $4x^2+25y^2=100$ ② $9x^2+4y^2=36$ ③ $9x^2+4y^2=1$ ④ $x^2+4y^2=1$

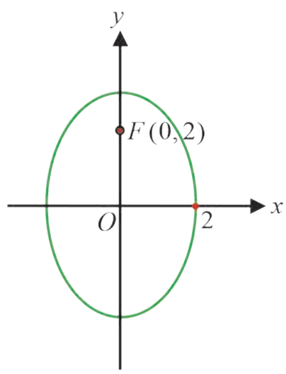
③ أوجد معادلة القطع النّاقص اعتماداً على شكله المعطى في كلّ حالة ممّا يأتي:



(1)



(2)



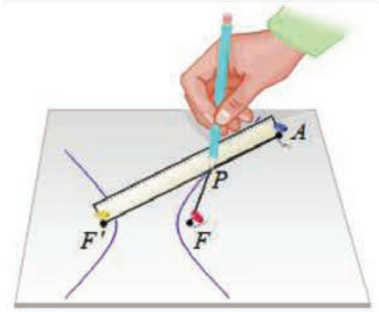
(3)

4 القطع الزّائد (Hyperbola)

رغم أنّ القطع النّاقص والقطع الزّائد يختلفان اختلافاً كليّاً في الشّكل لكنّهما يتشابهان في التّعريف وفي المعادلة والوسطاء، حيث أنّه بدلاً من مجموع البعدين لنقطة عن المحرقين في تعريف القطع النّاقص، نستعمل فرق البعدين عن المحرقين في تعريف القطع الزّائد، وأيضاً في المعادلة نستبدل إشارة − بـ + كما سنرى.

تعريف

القطع الزّائد هو مجموعة نقاط المستوي الّتي القيمة المطلقة لفرق بعدي كل منها عن نقطتين ثابتتين F و F' في المستوي يساوي مقداراً ثابتاً.



نسمّي F و F' **محرقي القطع الزّائد**. ونرمز للقطع الناقص $\mathcal{H}$.

رسم القطع الزّائد بخط مستمر:

يمكن رسم قطع زائد يحقق التّعريف السّابق وذلك باستعمال:

مسمارين صغيرين، خيط، مسطرة، وقلم رصاص كالآتي:

نثبت المسمارين على قطعة من الورق المقوّى عند النّقطتين F و F'.

ثم نعلّق أحد طرفي المسطرة جزئيّاً عند F'، بحيث تكون المسطرة قابلة للدوران حول F' كما في الشّكل المجاور.

ثمّ نقصّ قطعة من الخيط بحيث تكون أقصر من طول المسطرة، ونثبّت أحد طرفي الخيط إلى الطّرف الحر A للمسطرة والطرف الآخر إلى المسمار عند F، ثمّ ندفع الخيط بقلم الرّصاص إلى المسطرة ليصبح مشدوداً عند النّقطة P، نحافظ على الخيط مشدوداً وندوّر المسطرة حول F' فيرسم رأسُ القلم خطّاً على الورق المقوّى، وهذا الخط الّذي رُسم هو جزء من قطع زائد محرقاه F و F'.

يمكن رسم أجزاء أخرى من القطع الزّائد بجعل المسطرة تدور حول F.

ونعلّل انتماء النّقطة P إلى القطع الزّائد كما يأتي:

إنّ النّقطتين F و F' هما المحرقان المذكوران في تعريف القطع، فإذا رمزنا r إلى طول المسطرة أي $r = F'A$ ورمزنا s إلى طول الخيط، أي $s = FP + PA$ وجدنا أنّ الفرق بين المسافتين $F'P$ و FP يحقّق:

$$F'P - FP = F'P + PA - FP - PA$$

وبحسب الشّكل السّابق

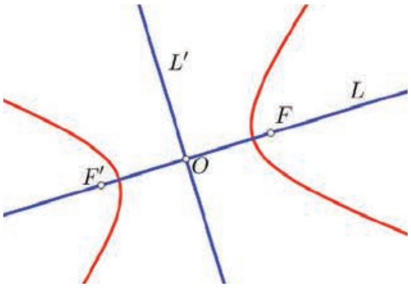
$$= r - s$$

وهذا الفرق يبقى ثابتاً عندما تتحرّك المسطرة حول F'.

التّناظر في القطع الزّائد:

ليكن القطع الزّائد $\mathcal{H}$ الّذي محرقاه F و F'.

إنّ المستقيم L المار بالمحرقين F و F' هو محور تناظر للقطع الزّائد (لأنّ جميع نقاط القطع متناظرة مثنى مثنى بالنّسبة إلى L).



ويسمّى L المحور المحرقي أو المحور الأساسيّ.

أيضاً المستقيم L' محور القطعة المستقيمة $[FF']$ هو محور تناظر آخر للقطع الزّائد ويسمّى المحور اللامحرقي أو المحور الثّانوي.

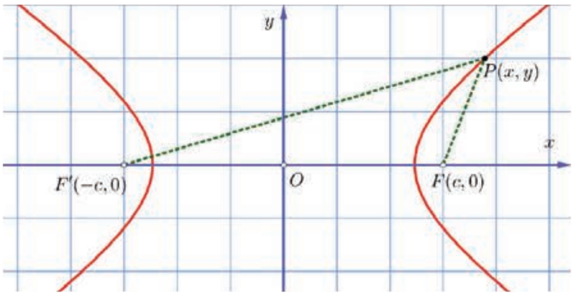
ينتج من ذلك أنّ نقطة تقاطع محوري التّناظر L و L' ولتكن O منتصف $[FF']$ هي مركز تناظر للقطع الزّائد، كما في الشّكل المجاور.

يسمّى طول القطعة المستقيمة $[FF']$ البعد المحرقي ونرمّزه:

$$FF' = 2c \ : \ c > 0$$

المعادلة المختزلة (النموذجية) لقطع زائد:

ليكن القطع الزّائد $\mathcal{H}$ الّذي محرقاه F و F'. ولنعيّن في مستوي القطع جملة إحداثيّة مبدؤها O منطبق على مركز تناظر القطع، ومحور الفواصل منطبق على المحور المحرقي لهذا القطع. نفترض أنّ $F(c,0)$ فتكون $F'(-c,0)$ ، كما في الشّكل المجاور.



أيّاً كانت النّقطة $P(x,y)$ من القطع عندئذ نكتب بحسب

تعريف القطع الزّائد:

$$|PF - PF'| = 2a$$

وبحسب متراجحات المثلّث PFF' لدينا:

$FF' > |PF - PF'|$ أي: $2c > 2a$ ومنها:

$c > a$.

واعتماداً على دستور المسافة بين نقطتين نكتب:

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right| = 2a$$

أو $$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a$$

وبتربيع طرفي المساواة نجد:

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2$$

وبعد فك الأقواس والإصلاح نصل إلى:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وتسمّى المعادلة المختزلة (القياسيّة) لقطع زائد، حيث $a^2 + b^2 = c^2$ و $c > a$, $b > 0$ ومحرقاه على محور الفواصل ومركز تناظره في المبدأ O.

تقاطع القطع الزّائد $\mathcal{H}\ :\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ مع المحاور الإحداثيّة:

- التّقاطع مع محور الفواصل يوافق: $y=0$ ، نعوّض في معادلة القطع فنجد: $\dfrac{x^2}{a^2}=1$ ومنه $x^2=a^2$
وحلها: $x=a$ أو $x=-a$ ، وبذلك نحصل على نقطتي التّقاطع $A(a,0)\ ,\ A'(a,0)$ اللتين تُسميان ذروتا القطع الزّائد. كما ونسمّي القطعة المستقيمة $[AA']$ القطر الرّئيسي للقطع وطولها $AA'=2a$.

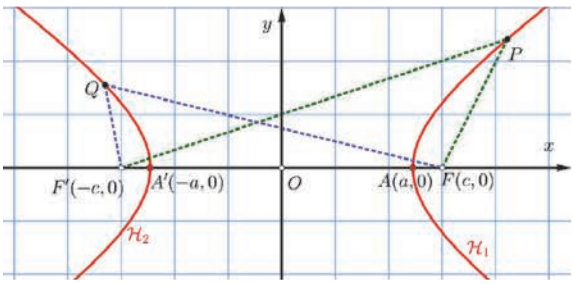
- التّقاطع مع محور التّراتيب يوافق: $x=0$ ، نعوّض في معادلة القطع فنجد: $-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ومنه $y^2=-b^2$
وليس لهذه المعادلة جذور حقيقيّة، فالقطع الزّائد في هذه الحالة لا يتقاطع مع محور التّراتيب.

وهو عبارة عن فرعين منفصلين $\mathcal{H}_1\ ,\ \mathcal{H}_2$ أي: $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\cup\mathcal{H}_1$

وعندما $P\in\mathcal{H}_1$ يكون $PF'-PF=2a$

وعندما $Q\in\mathcal{H}_2$ يكون $QF-QF'=2a$

كما في الشّكل المجاور.



المستقيمان المقاربان لقطع زائد:

نتأمل معادلة القطع الزّائد $\mathcal{H}\ :\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

نحسب y بدلالة x فنجد: $y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ حيث: $x\in]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$

أو $y=\pm\dfrac{b}{a}x\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$

وعندما تصبح $|x|$ كبيرة كفاية فإنّ المقدار $\dfrac{a^2}{x^2}$ يقترب من الصّفر، ونجد أنّ y تقترب من $y=\dfrac{b}{a}x$

أو $y=-\dfrac{b}{a}x$

نسمّي كلّاً من المستقيمين $\Delta_1:y=\dfrac{b}{a}x$ و $\Delta_2:y=-\dfrac{b}{a}x$ **مستقيماً مقارباً** للقطع الزّائد $\mathcal{H}$ ، وهما يساعدان في رسم القطع.

رسم القطع الزّائد اعتماداً على مقاربيه:

لرسم القطع نتّبع ما يلي:

- نمثّل الذّروتين $A(a,0)\ ,\ A'(-a,0)$ ، وأيضاً نمثّل النّقطتين $B(0,b)\ ,\ B'(0,-b)$ واللتين نطلق عليهما تجاوزاً اسم الذّروتين المرافقتين.

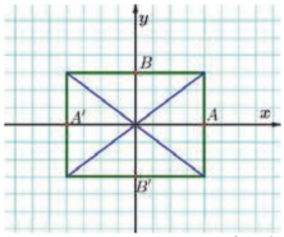
عندئذٍ يحدّد المستقيمان الأفقيّان المرسومان من $B\ ,\ B'$ مع المستقيمين الشّاقوليين المرسومين من $A\ ,\ A'$ مستطيلاً يُطلق عليه اسم **المستطيل المركزي** للقطع الزّائد $\mathcal{H}$ ، كما في الشّكل (1) التّالي.

نلاحظ أنّ ميلي قطري المستطيل هما $\mp\dfrac{b}{a}$.

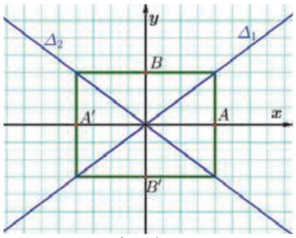
- نمدّد قطري المستطيل فنحصل على المستقيمين المقاربين للقطع الزّائد Δ_1,Δ_2 كما في الشّكل (2).

• نرسم القطع $\mathcal{H}$ مارّاً من ذروتيه ومقارباً للمستقيمين Δ_1 , Δ_2 كما في الشّكل (3) التّالي.

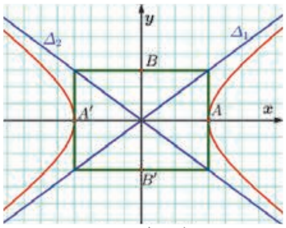
نلاحظ أنّ رؤوس المستطيل تبعد عن مركز القطع مسافة تساوي نصف البعد المحرقي c، لأنّ $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ومنه رؤوس المستطيل تقع على الدّائرة التي مركزها مركز القطع والمارّة من محرقيه F , F' كما في الشّكل (3) الآتي:



الشكل (1)



الشكل (2)



الشكل (3)

مثال

قطع زائد $\mathcal{H}$ معادلته $9x^2-16y^2=144$. عيّن ذراه، محرقيه، ومعادلتي مقاربيه وارسم هذا القطع.

الحل

نقسّم طرفي المعادلة على العدد 144 فنحصل على $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ ، وبالمقارنة مع الصّيغة القياسيّة $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نجد أنّ $a^2=16 , b^2=9$ ، ومنه $a=4 , b=3$ ومحور القطع منطبق على محور الفواصل.

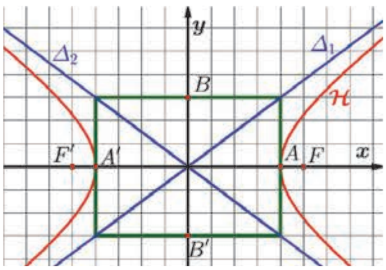
ذروتا القطع هما $A(4,0) , A'(-4,0)$ ، والذّروتان المرافقتان هما $B(0,3) , B'(0,-3)$.

وبما أنّ $c^2=a^2+b^2$ نجد: $c^2=16+9=25$ ومنه فإنّ $c=5$.

محرقا القطع هما: $F(5,0) , F'(-5,0)$.

معادلتا المقاربين $\Delta_1 : y=\frac{3}{4}x \; , \; \Delta_2 : y=-\frac{3}{4}x$.

وحتّى نرسم القطع نرسم المستطيل المركزي للقطع ونمدّد قطريه فنحصل على المقاربين ونرسم القطع.



مثال

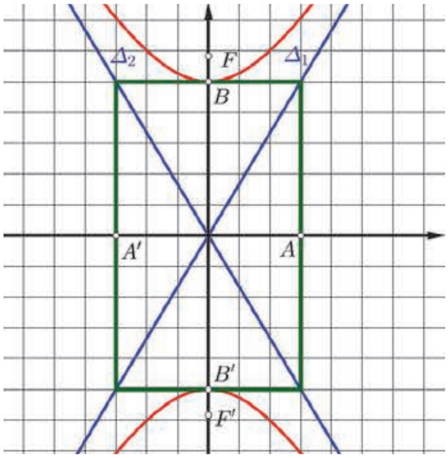
جِدْ معادلة القطع الزّائد الذي تقع ذروتاه عند النّقطتين $(\mp 3,0)$ ويقع محرقاه عند $(\mp 4,0)$.

الحل

المحور المحرقي للقطع هو محور الفواصل، فمعادلة القطع لها الصّيغة: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث $a=3 , c=4$.

وإنّ $b^2=c^2-a^2=16-9=7$ وبالتّالي فإنّ معادلة القطع هي $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$.

القطع الزّائد الذي محوره المحرقي منطبق على محور التّراتيب:

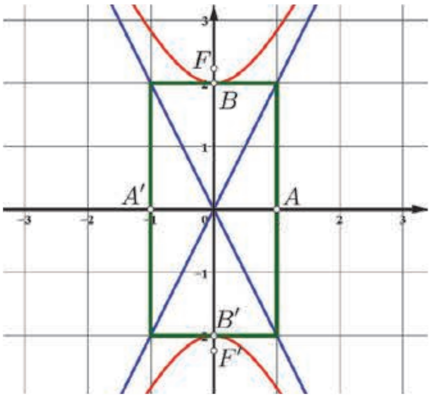


إذا كان محرقا القطع الزّائد الذي مركزه مبدأ الإحداثيّات على محور التّراتيب كان محرقاه: $F(0,c)$, $F'(0,-c)$ وذروتاه النّقطتين $B(0,b)$, $B'(0,-b)$

وبطريقة مشابهة للحالة السّابقة نجد أنّ معادلة القطع الزّائد تأخذ الصّيغة: $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ حيث $a=\sqrt{c^2-b^2}$

وذروتاه المرافقتان في هذه الحالة هما $A(a,0)$, $A'(-a,0)$.

لرسم هذا القطع نرسم المستطيل المركزي النّاتج من تقاطع المستقيمين الأفقيّين المارّين بالذّروتين والمستقيمين الشّاقوليين المارّين بالذّروتين المرافقتين، ثمّ نمدّد قطري المستطيل فنحصل على المستقيمين المقاربين للقطع واللذين معادلتيهما $\Delta_1 : y=\dfrac{b}{a}x$, $\Delta_2 : y=\dfrac{-b}{a}x$ ، ثمّ نرسم القطع الزّائد مارّاً بالذّروتين B , B' محاذياً لمقاربيه كما في الشّكل الآتي:



مثال

قطع زائد $\mathcal{H}$ معادلته $y^2-4x^2=4$. عيّن ذراه، محرقيه، ومعادلتي مقاربيه وارسم هذا القطع.

الحل

نقسّم طرفي المعادلة على العدد 4 فنحصل على $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{1}=1$ ،

وبالمقارنة مع الصّيغة القياسيّة $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$ نجد أنّ $a^2=1$, $b^2=4$ ،

ومنه $a=1$, $b=2$ ومحور القطع منطبق على محور التّراتيب.

ذروتا القطع هما $B(0,2)$, $B'(0,-2)$ ، والذّروتان المرافقتان هما $A(1,0)$, $A'(-1,0)$.

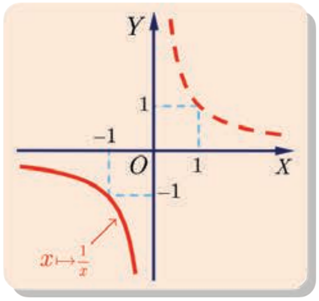
وبما أنّ $c^2=a^2+b^2$ نجد: $c^2=1+4=5$ ومنه فإنّ $c=\sqrt{5}$.

محرقا القطع هما: $F(0,\sqrt{5})$, $F'(0,-\sqrt{5})$.

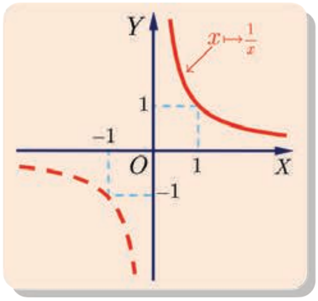
معادلتا المقاربين $\Delta_1 : y=2x$, $\Delta_2 : y=-2x$.

تذكرة تابع المقلوب $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

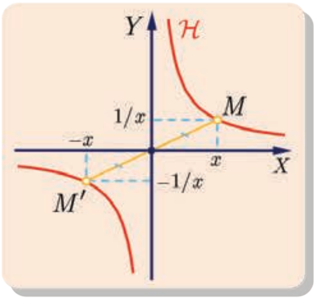
المعرّف على اجتماع المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$ الذي نرمز إليه بالرمز $\mathbb{R}^*$.



تابع المقلوب متناقصٌ تماماً على المجال $]-\infty, 0[$



تابع المقلوب متناقصٌ تماماً على المجال $]0, +\infty[$



نسمّي الخطَّ البيانيَّ $\mathcal{H}$ الممثّل للتابع f **قطعاً زائداً.**

في مَعْلَم متجانس يكون المبدأ O مركز تناظر للقطع الزائد $\mathcal{H}$ ذلك لأنّه مهما كان العدد الحقيقي غير المعدوم x، كانت النقطتان $M(x,\frac{1}{x})$ و $M'(-x,-\frac{1}{x})$ من $\mathcal{H}$، اللتين فاصلتاهما بالترتيب x و $-x$، متناظرتين بالنِّسبة إلى المبدأ O.

❶ إذا كانت معادلة القطع: $x^2-y^2=a^2$ فهو يقع في الرّبعين الأول والثالث بالنّسبة إلى جملة المقاربين فإنّ: X, Y موجبان معاً أو سالبان معاً ومنه $|XY|=XY$ ومعادلة القطع الزائد المتساوي الساقين منسوب إلى مقاربيه: $\boxed{XY=\frac{a^2}{2} \quad ...\text{I}}$

وبما أنّ: $c=a\sqrt{2}$ فإنّ $a^2=\frac{c^2}{2}$ وبالتعويض نجد أنّ: $\boxed{XY=\frac{c^2}{4}}$

وهي معادلة قطع زائد منسوب إلى مقاربيه، محوره المحرقي منصف الرّبع الأول لجملة المقاربين ومعادلته: $Y=X$ وهو منطبق على المحور $x'x$.

❷ إذا كانت معادلة القطع: $y^2-x^2=a^2$ فهو يقع في الرّبعين الثّاني والرّابع بالنّسبة لجملة المقاربين فإنّ إشارتي X, Y مختلفتان ويكون $|XY|=-XY$ فتكون معادلة القطع بالنّسبة إلى مقاربيه: $\boxed{XY=-\frac{a^2}{2} \quad ...\text{II}}$

أو: $\boxed{XY=-\frac{c^2}{4}}$

ومعادلة محوره المحرقي $Y=-X$ وهو منطبق على المحور $y'y$.

نقبل أنّ كل معادلة من الشّكل $XY=$ ثابت $\neq 0$ هي معادلة قطع زائد منسوب إلى مقاربيه.

ملاحظة:

1... لتعيين ذروتي القطع نوجد الحل المشترك لمعادلة المحور المحرقي مع معادلة القطع.

2... لتعيين محرقي القطع نوجد الحل المشترك لمعادلة المحور المحرقي مع معادلة الدائرة التي مركزها مركز القطع ونصف قطرها c.

مثال: في مستوٍ محدّث بمعلم متجانس مجموعة من النّقاط $M\left(x,y\right)$: $xy=4$

1. بيّن أنّ مجموعة النّقاط المفروضة هي قطع زائد متساوي السّاقين.
2. عيّن وسطاءه a,b,c وأوجد معادلة مِحوره المِحرقي.
3. أوجد إحداثيّي كل من ذِروتيه ومِحرقيه .

الحل:

1) إنّ المعادلـة مـن الشّـكل: $x.y=\frac{a^2}{2}$ فهـي تُمثّـِل قطعـاً زائـداً منسـوباً إلـى مقاربيـه المتعامـدين $x'x\ \ ,\ y'y$

فالقطع متساوي السّاقين: فيه $\frac{a^2}{2}=4$ ومنه $a=2\sqrt{2}$ عندئذٍ $b=a=2\sqrt{2}$ و $c=a\sqrt{2}=4$

إنّ معادلة المِحور المِحرقي هي $y=x$ لأنّ القطع يقع في الرّبعين الأوّل والثالث

3) لإيجاد الذروتين نوجد الحل المشترك لمعادلة المحور المحرقي ومعادلة القطع.

$x=y$ ...❶

$x.y=4$ ...❷

نعوض ❶ في ❷ فنجد: $\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}$ نعوض في ❶

فتكون الذّروتان: $A\left(2,2\right),\ A'\left(-2,-2\right)$

لإيجاد المحرقين نوجد الحل المشترك لمعادلة المحور المحرقي ❶... $x=y$

ومعادلة الدائرة (3) $x^2+y^2=16$

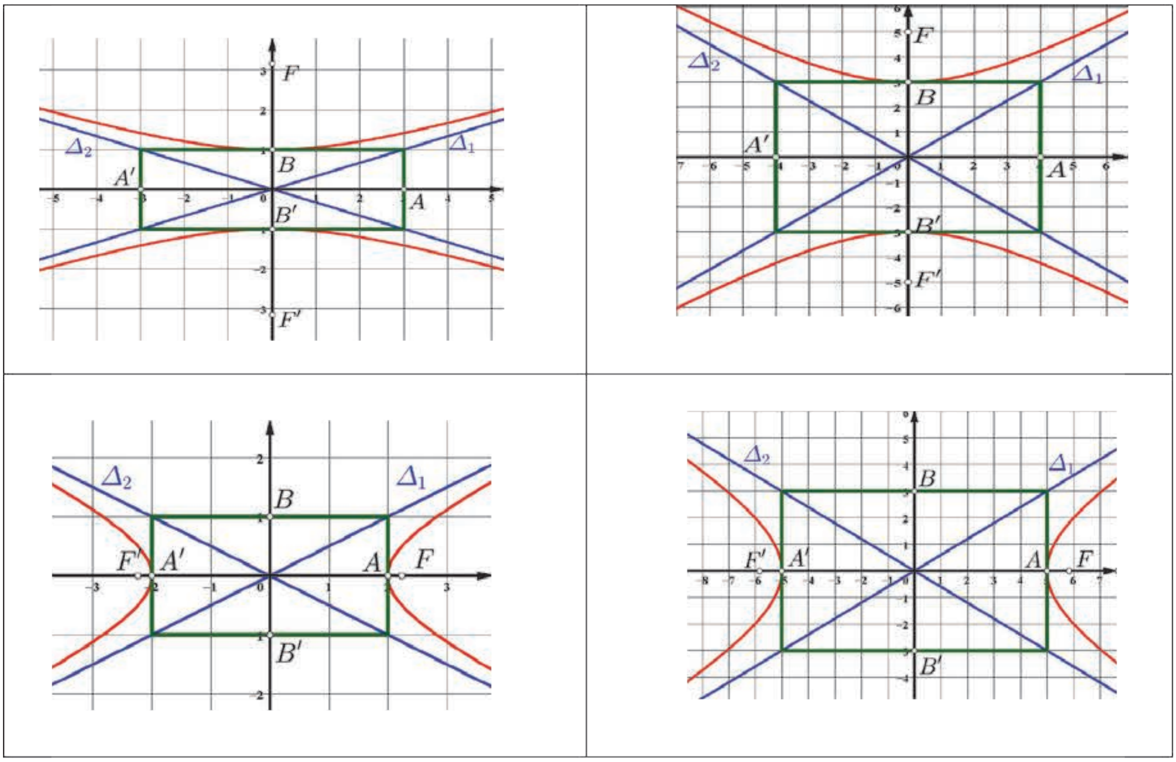
نعوض ❶ في ③ فنجد: $x^2+y^2=16$ ومنه $x^2=8$ إمّا: $x=2\sqrt{2}$ أو: $x=-2\sqrt{2}$

فالمحرقان: $\left.\begin{matrix}F\left(2\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)\\F'\left(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2}\right)\end{matrix}\right\}$

تدرّب

① فيما يلي معادلات لأربعة قطوع زائدة مرسومة، أقرن كل قطع زائد مرسوم بمعادلته اعتماداً على المحور المحرقي والذّرا:

① $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ② $y^2 - \frac{x^2}{9} = 1$ ③ $16y^2 - 9x^2 = 144$ ④ $9x^2 - 25y^2 = 225$



② أوجد كلّاً من: ذرا ومحرقي ومقاربي القطع الزائد، ثمّ ارسمه في كل حالة ممّا يأتي:

① $9x^2 - 4y^2 = 36$ ② $x^2 - y^2 + 4 = 0$ ③ $4x^2 - y^2 = 1$ ④ $x^2 - y^2 = 1$

③ أوجد معادلة القطع الزائد في كلّ حالة ممّا يأتي:

❶ محرقاه $(0, \mp 2)$ وذروتاه $(0, \mp 1)$.

❷ ذروتاه $(\mp 1, 0)$. ومعادلتا مقاربيه $y = \mp 5x$.

❸ محرقاه $(\mp 3, 0)$ ويمر من النقطة $M(4,1)$.

❹ محرقاه $(0, \mp 1)$ وطول قطره الرئيسي يساوي 1.

❺ عيّن لكل من القطوع الآتية: (المركز، المحور المِحرقي، الذُرا، المِحرقين) وارسم القطع.

$y^2 - 4x^2 = 1$, $9y^2 = 4(x^2 - 9)$, $x^2 - 5y^2 = 5$

تمرينات ومسائل

1 إختر كل إجابة صحيحة فيما يأتي

① معادلة القطع الزائد والذي محوره التناظري هو محور التراتيب هي

① $4y^2-9x^2=36$ ② $x^2+4=-y^2$ ③ $4x^2=1+y^2$ ④ $x^2+y^2=1$

② معادلة الدائرة هي.

① $9y^2-9x^2=36$ ② $x^2+4=-y^2$ ③ $4x^2=1+y^2$ ④ $x^2+y^2=1$

③ معادلة القطع الناقص والذي محوره التناظري هو محور التراتيب هي:

① $4y^2+x^2=36$ ② $x^2+4=-y^2$ ③ $4x^2=1-y^2$ ④ $x^2+9y^2=1$

2 جد معادلة كلاً من القطوع الآتية:

① **جد معادلة القطع الناقص الذي طولي قطريه 6 و 10 ومركزه $(0,0)$ وقطره الرئيسي منطبق على محور الفواصل.**

② **جد معادلة القطع الناقص الذي طولي قطريه 6 و 10 ومركزه $(0,0)$ وقطره الرئيسي منطبق على محور التراتيب.**

③ **جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه المبدأ وذروته $(6,0)$ والبعد بين محرقيه 20 .**

④ **جد معادلة القطع المكافئ الذي ذروته المبدأ ومحرقه $(6,0)$.**

3 موافق أو غير موافق

① $y^2-x^2=36$ ② $y=\sqrt{-6x+12}$

③ $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{1}=1$ ④ $\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{1}=1$

⑤ $y^2-2x=8$ ⑥ $2y-x^2=8$

⑦ $y^2+x^2=36$ ⑧ $2y^2+2x^2=36$

① المعادلات ① و ③ و ⑥ **قطوع زائدة .**

② المعادلتان ⑦ و ⑧ **تمثل قطوع ناقصيه.**

③ المعادلتان ⑦ و ⑧ **تمثل دوائر**

④ المعادلة ② **تمثل معادلة لقطع مكافئ محوره يوازي محور التراتيب.**

4 في مستوٍ منسوب لمعلم متجانس اكتب معادلة القطع النّاقص إذا علمت إنَّ

مركز القطع $O(0,0)$ $b=24,$ $c=7,$ **المحور المِحرقي منطبق على محور الفواصل.**

لنتعلّم البحث معاً

5 نتأمل في مستوٍ محدّث بمعلم متجانس النقاط $A(1,2)$ و $B(-3,2)$ و $C(-2,-1)$، والمطلوب:

❶ أثبت أنّ النقاط A و B و C لا تقع على استقامة واحدة.

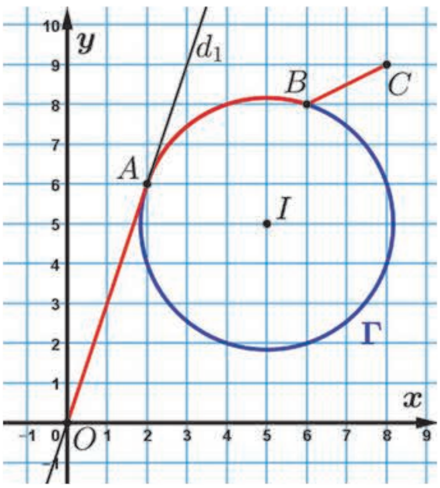
❷ جِدْ معادلة المستقيم d_1 محور القطعة المستقيمة $[AB]$، ثمّ معادلة المستقيم d_2 محور القطعة المستقيمة $[AC]$.

❸ بحل جملة معادلتين بمجهولين جِدْ إحداثيات النقطة I نقطة تقاطع d_1 و d_2.

❹ احسب البُعد IA، ثمّ استنتج معادلة الدائرة Γ المارة برؤوس المثلث ABC.

❺ مثِّل النقاط A و B و C و I ثمّ ارسم الدائرة Γ.

6 نتأمل في الشكل المرافق الدائرة Γ التي مركزها I والتي تمرُّ من النقطتين A و B، والمستقيم d_1 مماس الدائرة Γ في النقطة A. نهدف في هذه المسألة لحساب طول الخط الموضح باللون الأحمر.



نحو الحلّ

انظر للرسم جانباً الخط هو جزء من المماس في النقطة وقوس من الدائرة والقطعة المستقيمة.

بحثاً عن نتائج مباشرة.

1- اكتب إحداثيات النقاط A و B و C و I.

2- أثبت أنّ المستقيمين (IA) و (IB) متعامدان، واستنتج أنّ القوس $\overset{\frown}{AB}$ ربع الدائرة Γ.

3- احسب نصف قطر الدائرة Γ، ثمّ اكتب معادلتها.

4- احسب الأطوال OA و $\overset{\frown}{AB}$ و BC، ثمّ استنتج الطول المنشود.

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

7 إيجاد معادلة المماس لقطع مُكافِئ علم ميله

ليكن القطع المُكافِئ الذي معادلته: $y=-\frac{1}{2}x^2+x-4$، عيّن ذروته ومحرقه ومعادلة دليله ثُمّ أوجد معادلة المماس لهذا القطع الذي ميله $m=-1$.

الحل:

نحو الحلّ

بالإتمام إلى مربّع كامل نجد أنّ معادلة القطع المكافئ تكتب على الشّكل:

$(x-1)^2=-2\left(y+\frac{7}{2}\right)$ عين محوره التناظري وجهة الفتحة و ذروته M_0 واكتب معادلة دليليه

✌ بحثاً عن نتائج مباشرة. ارسم الشّكل وفق المعطيات $p=-\frac{1}{2}$ و $M_0\left(1,-\frac{7}{2}\right)$ و $F(1,-4)$ ، دليله:
$\Delta:\ y=-3$

✌ بحثاً عن طريق. معادلة حزمة المستقيمات التي ميلها $m=-1$ من الشّكل: $y=mx+d$ أي أنّ: $y=-x+d$

نعوّض في معادلة القطع نجد: $x^2-4x+8+2d=0$ ونحسب المميز $\Delta=-16-8d$

شرط التّماس: $\Delta=0$ ومنه: $d=-2$

أنجزِ الحلَّ واكتبهُ بلغةٍ سليمة.

ملاحظة: نقبل بأنّ مماس القطع المكافئ في ذروته عمود على محوره.

8 ❶ جد معادلة القطع الناقص الذي طولي قطريه 6 و 10 ومركزه $(0,0)$ وقطره الرئيسي منطبق على محور الفواصل.

❷ جد معادلة القطع الناقص الذي قطره الرئيسي منطبق على محور الفواصل وطوله 14 والبعد المحرقي 10 ومركزه $(0,0)$.

❸ جد معادلة القطع الناقص الذي قطره الرئيسي منطبق على محور التراتيب وذروته $(9,0)$ وطول قطره الكبير 20 ومركزه $(0,0)$.

9 ❶ جد معادلة القطع الناقص الذي مساحته $100\pi\ cm^2$ وذروتيه $(\pm 5,0)$.

❷ جد معادلة القطع الناقص الذي محوره الرئيسي منطبق على محور التراتيب وذروتيه $(0,\pm 5)$ والنسبة بين طولي قطريه $\frac{10}{3}$.

❸ جد معادلة القطع الناقص الذي طولي قطريه 10 و 16 ومحوره الرئيسي منطبق على محور الفواصل.

❹ جد قيم الوسيط α التي تجعل المعادلة $x^2-(2\alpha-9)y^2-3=0$ هي معادلة قطع ناقص.

10 ❶ جد معادلة القطع الزائد محوره المحرقي منطبق على محور التراتيب ذروته $(0,\sqrt{7})$ ويمر بالنقطة $(-2,3)$.

❷ جدْ في كل حالة المحور الرئيسي والذرا والمحرقين والبعد المحرقي وطول القطرين الكبير والصغير.

① $16x^2+25y^2=400$ ② $9x^2+16y^2=144$ ③ $x^2=1-3y^2$

11 جدْ في كل حالة المحور الرئيسي والذرا والمحرقين والبعد المحرقي وطول القطرين الرئيسي والثانوي.

$$x^2-\frac{25y^2}{9}-25=0$$

$$(x+3)^2-\frac{y^2}{16}-6x-10=0$$

$$25y^2-16x^2=400$$

$$9y^2-x^2-9=0$$

12 جد قيم الوسيط α التي تجعل المعادلة $y^2+\left(-\alpha+\frac{3}{5}\right)x^2+5=0$ هي معادلة قطع زائد.