الجمهوريَّةُ العربيَّةُ السوريَّةُ
وزارةُ التَّربيةِ والتَّعليمِ
المركزُ الوطنيُّ لتطويرِ المناهجِ التَّربويَّةِ

الرِّياضيّات

الهندسة

الفئة (ب)

مرحلة التعليم الأساسي

المستوى الرابع

/4/

العام الدِّراسيُّ: 1447-1446 هـ
2026-2025 م

لجنة التأليف

د. عمران قوبا

ميكاييل الحمود

نهلة مشرفي

عزمات سعيد

الإخراج الفني

فراس حوش

طُبِع أوَّل مرَّة للعام الدِّراسيِّ: 2021/ 2022 م / 1442 - 1443 هـ
نسخة تجريبيَّة

المقدمة

حاولنا في هذا الكتاب التَّوفيق بينَ ما هو قَديمٌ وما هو حديث من خلال تحديد المعلومات اللَّازمة؛ الواجب على الطالب تمثُّلها كمّاً ونوعاً، ولم يقتصرِ دور الكتاب على تقديم المعلومات والحقائق والمفاهيم المختلفة فقط وإنَّما توسع دوره لإتاحة الفرص أمام التلاميذ لاكتساب أكبر قدرٍ ممكنٍ من المهارات الرِّياضيَّة والخبرات الحديثة عن طريق تنويع طرائق عرض الدُّروس والمعلومات الّتي تساعد في تنمية المهارات الشاملة للطالب في كافَّة الجوانب وتهدف في الوقت نفسه إلى تحقيق الأهداف التربوية المنشودة.

ولما كان الكتاب المدرسي ليس المصدر الوحيد للحصول على المعلومات، فقد وجّه الكتاب التلاميذ إلى القيام بِبعض الأنشطة المختلفة التي تساعد الطلاب على تنمية ميولهم وتكوين اتّجاهات إيجابية بنَّاءَة واكتساب المعلومات بطرائق أكثر عمقاً ورسوخاً. وعلى زملائنا المدَرِّسين أن يوجِّهوا التلاميذ نحو المصادر الأخرى للمعلومات ليتمكَّنوا من المشاركة في العملية التَعَلُّميَّة التَّعليميَّة ممَّا يسهم في تنمية قدرة التلاميذ على ربط المعلومات وتحفيز مشاركتهم في الصف، وذلك للوصول إلى تلميذ قادر على أن يقرأ ويتعلم ويفكِّر تفكيراً ناقداً ويُبدي رَأيه ويشارك في صنع القرار ليكونَ في المستقبل قادراً على المساهمة في التَّطوير في أيِّ مجال من مجالات الحياة.

نأمل من زملائنا المدرِّسين أن يزوِّدونا بملاحظاتهم الميدانية ومقترحاتهم البنّاءة، متعاونين معاً لتطوير الكتاب المدرسي باستمرار، ومساهمين جميعاً في خدمة الوطن الغالي.

المؤلفون

الأيقونة	معناها
انطلاقة نشطة	في بداية كل وحدة تهدفُ إلى تعزيز المهارات الأساسية التي يحتاجها المتعلّم في هذه الوحدة والإضاءة على مفاهيمها.
نشاط	في بداية كل درس يهدف إلى طرح أسئلة تظهر مدى معرفة الطالب بمحتوى الدرس أو يقدم طرق لإثبات بعض الخواص في هذا الدرس فهو بمثابة اختبار قبلي للطالب لمحتوى الدرس.
تعلم	يُرض من خلالها تعاريف وخواص وأمثلة هي في أغلب الأحيان تعرض حلولاً نموذجية جرى صوغها صياغة لغوية سليمة وبأسلوب منهجي علمي لتكوّن نماذجَ يجبُ اتباعها عند حلِّ التدريبات والمسائل.
اكتساب معارف	تعزز ماتعلمه الطالب وتتضمن طرق وإرشادات على كيفية استعمال القضايا والمفاهيمَ الأساسيّة في أمثلة توضيحيّة.
تحقق من فهمك	تمارين ومسائل تعتبر اختبار بعدي لما تعلمه الطالب في الدرس ويقوم المدرس بالإشراف على حله من قبل الطلاب خلال الحصة الدرسية.
تدرّب	تمارين ومسائل تعزز ماتعلمه الطالب في الدرس ويتم من خلالها حل تمارين بعضها تطبيق مباشر لمفاهيم الدرس وبعضها الآخر للتحقق من فهم محتوى الدرس.
تمرينات ومسائل	مجموعة من التمارين والمسائل متدرجة المستوى لتمكين المدرس من مراعاة الفروق الفردية لطلابه وتمكن الطالب من ربط المفاهيم التي تعلمها الطالب في الوحدة وأيضاً ربط هذه المفاهيم مع ما تعلمه الطالب سابقاً.
كيف	سؤال وتوضيح الإجابة عنه بمثال.
مثال	مثال توضيحي محلول بشكل مفصل.
إضاءة	إضاءة حول مفهوم معيّن بهدف توضيحه
لإحراز تقدم	تأتي هذه التما رين والمسائل لتنمي قدرات الطلاب وتكون بمثابة تعلم من خلال التمارين والأنشطة وكذلك ليتعلم الطالب تحرير النصوص وحلولها فصياغة الحل صياغة سليمة لا تقل أهمية عن معرفة هذه الحلول.

الفهرس

الوحدة الأولى:
التناظر

1. التناظر المركزي

2 . إيجاد النظير بالنسبة إلى نقطة

3 . مراكز ومحاور التناظر

1 التناظر المركزي

سوف تتعلم:

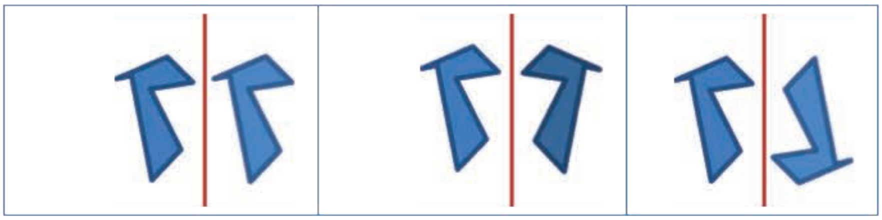
- الأشكال المتناظرة مركزيًا
- التناظر المركزي.

صلة الدرس:

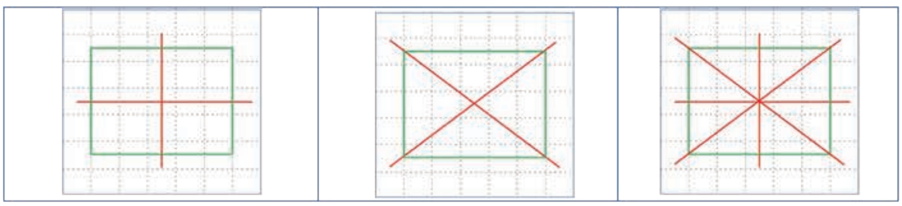
عندما ننظر إلى لوحة فسيفساء أو إلى سجّادة أو حتّى إلى رصيف، نجد الكثير من الأشكال التي تتكرّر هنا وهناك مع تغيّر في المكان والاتّجاه، لتعطي في النهاية تناسقاً جميلاً للمنظر العام.

تذكّر ما تعلّمته في المستوى السابق عن التناظر المحوريّ والدوران وضع خطاً تحت الإجابة الصحيحة في كلّ فقرةٍ من الفقرات الآتية :

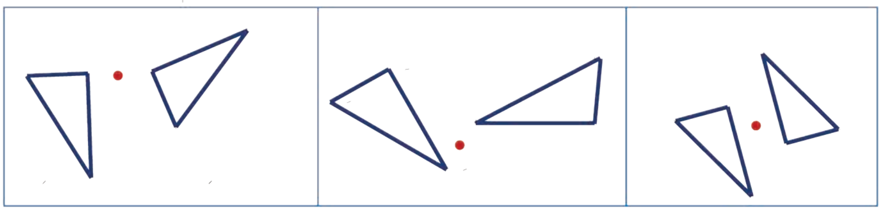
1. الشكلان الملوّنان بالأزرق متناظران بالنسبة إلى المستقيم الملون بالأحمر.



2. كل مستقيم ملوَّن بالأحمر هو محور تناظر للمستطيل الأخضر.



3. أحد المثلثين ناتج عن تدوير الشكل الأخر بمقدار 180^o



من الحرف

الزخرفة: برع الحرفيون السوريون في حرفة الزخرفة، والدلالات موجودة في جدران وسقوف كثير من القصور والبيوت الدمشقية القديمة.

من الاستخدامات

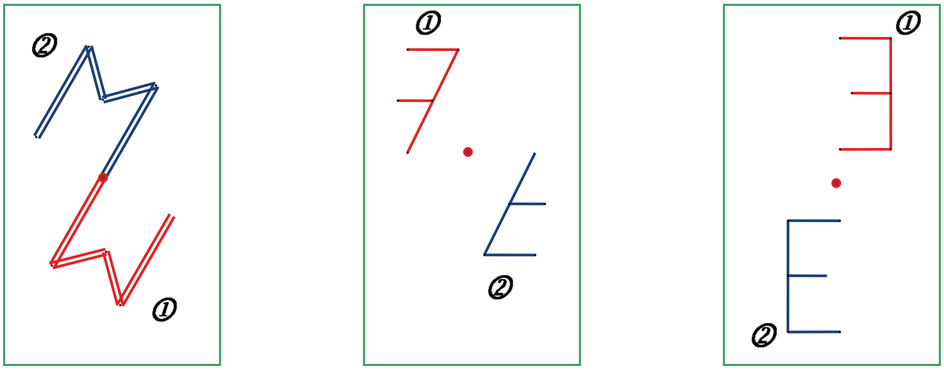
بالإضافة إلى الناحية الجماليّة تساعد التناظرات الهندسيّة المعماريّين والمزخرفين في أداء

-ما التحويل الهندسي الذي يعبّر عن انعكاس الصور في مرآة ؟

- ما الذي يميّز الدوران بزاوية مستقيمة ؟

انطلاقة نشطة

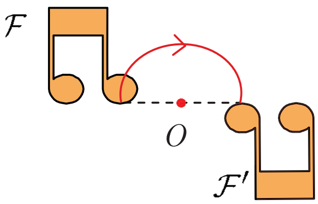
• تأمّل الأشكال الآتية وبيّن كيف تنتقل في كلّ حالةٍ من الوضع ① إلى الوضع ② .



• اكتب على ورقةٍ بيضاء الكلمة في الوضع المبيّن في الشكل ① .

ارسم على الورقة ذاتها الكلمة في الوضع ② بالطريقة المعتمدة في الاشكال السابقة.

تعلم (التناظر المركزي):



نقول إنَّ الشكلين $\mathcal{F}$ و $\mathcal{F}'$ متناظران بالنسبة إلى نقطةٍ O إذا أمكنَ تطبيقُ أحدهما على الآخر بدوران نصف دورة حول O .

نسمّي O مركز التناظر. وفي هذه الحالة يكون كلّ شكل منهما نظير الآخر بالنسبة للنقطة O .

يسمّى التناظر بالنسبة إلى مستقيم **تناظراً محورياً**.

يسمى التناظر بالنسبة إلى نقطة **تناظراً مركزياً**.

يؤول التناظر المحوري إلى طي الشكل حول محور التناظر.

يؤول التناظر المركزي إلى تدوير الشكل حول مركز التناظر نصف دورة.

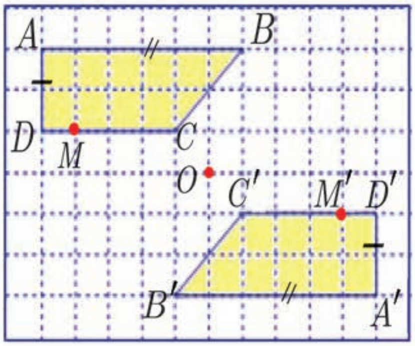
خاصة:

يحافظ التناظر المركزي على: **الأطوال والزوايا والمساحات وخاصّة الوقوع على استقامة واحدة.**

كما يحافظ على الأشكال: نظير أي شكل هو شكلٌ ينطبق عليه.

مثال

شبها المنحرف $ABCD$ و $A'B'C'D'$ متناظران بالنسبة إلى النقطة O



1. وفيه $AB = A'B' = 3\text{cm}$ $AD = A'D' = 1\text{cm}$

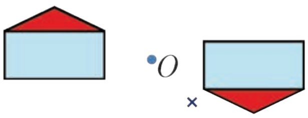
2. النقاط C و M و D على استقامة واحدة.

والنقاط M' (نظيرة M) و C' و D' على استقامة واحدة.

3. $A = A'$ و $C = C'$.

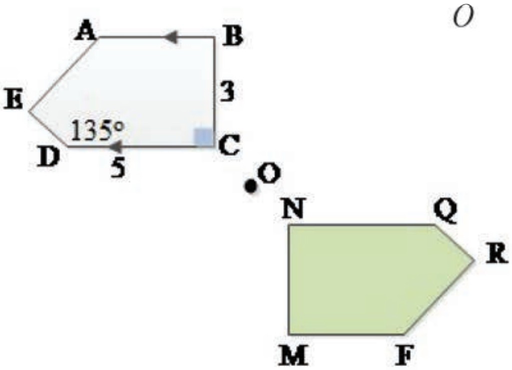
تحقق من فهمك

تحقق باستخدام ورق شفاف أن الشكلين المرسومين أدناه متناظران بالنسبة إلى النقطة O



تدرب

الشكلان $ABCDE$ و $MNQRF$ متناظران بالنسبة إلى النقطة O والمطلوب:



1) احسب DC, MN.

2) احسب قياس الزاويتين N, Q

3) أذكر ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة.

4) حدد في الشكل $MNQRF$ المستقيم الموازي لـ NQ

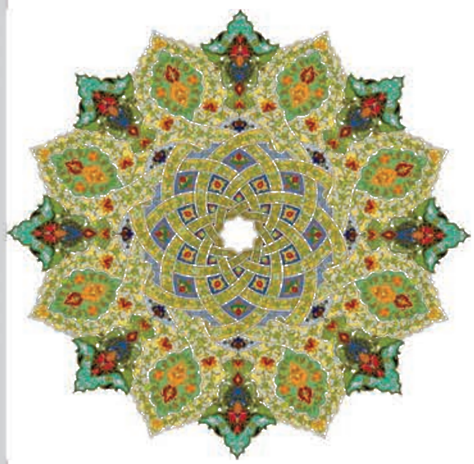
2 إيجاد النظير بالنسبة إلى نقطة

سوف تتعلم:

- إيجاد نظير نقطة.
- ايجاد نظير مستقيم، نصف مستقيم، قطعة مستقيمة، دائرة.
- إيجاد نظير شكل ما.

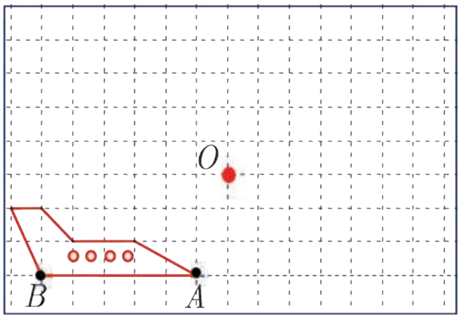
صلة الدرس:

تعرفنا في الدرس السابق الاشكال المتناظرة بالنسبة إلى نقطة، والان سوف نتعلم كيفية ايجاد نظير نقطة، مستقيم، نصف مستقيم، قطعة مستقيمة، دائرة بالنسبة إلى نقطة.



انطلاقة نشطة

تأمّل الشكل المجاور.



عين النقطة A' بحيث تكون النقطة O منتصف القطعة AA' لاحظ أن النقطتان A و A' متناظرتان بالنسبة إلى O (علل)

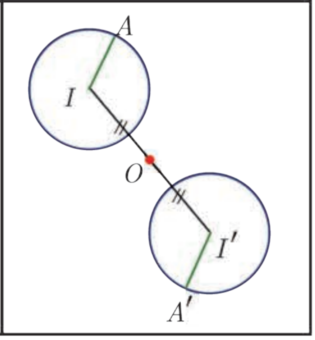
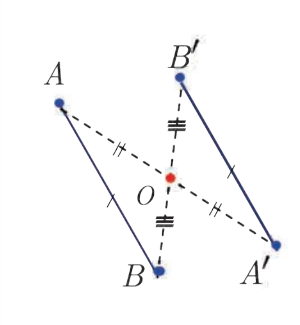
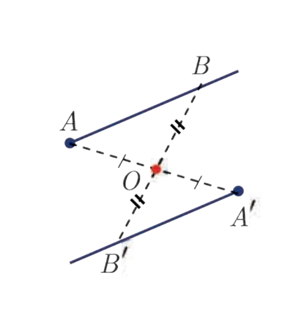
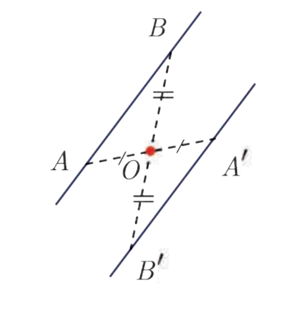
بنفس الاسلوب السابق عين B', C', D', E', F' ، ثم صل بين هذه النقاط بالمسطرة لاحظ أن الشكلين $A'B'C'D'E'F'$ ، $ABCDEF$ متناظران بالنسبة إلى النقطة O .

من الإستخدامات

يمكن أن تنتج التناظرات الهندسيّة من إيجاد نظير الاشكال والتي تساعد برمجة عمل آلات الحياكة والتطريز.

تعلم (إيجاد النظير بالنسبة إلى النقطة O)

1. نظيرة النقطة A هي النقطة A' التي تجعل O منتصف القطعة $[AA']$
2. نظير مستقيم هو مستقيم يوازيه.
3. نظير نصف مستقيم هو نصف مستقيم يوازيه.
4. نظير قطعة مستقيمة هو قطعة مستقيمة توازي الأولى وتساويها طولاً.
5. نظير دائرة مركزها I هو دائرة مركزها I' نظيرة I بالنسبة إلى النقطة O ولها نصف القطر ذاته.

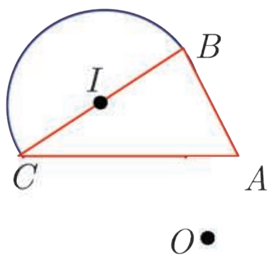
الدائرة	قطعة مستقيمة	نصف مستقيم	مستقيم
			

طريقة إنشاء نظير شكل

لرسم نظير شكل $\mathcal{F}$ بالنسبة إلى نقطة:

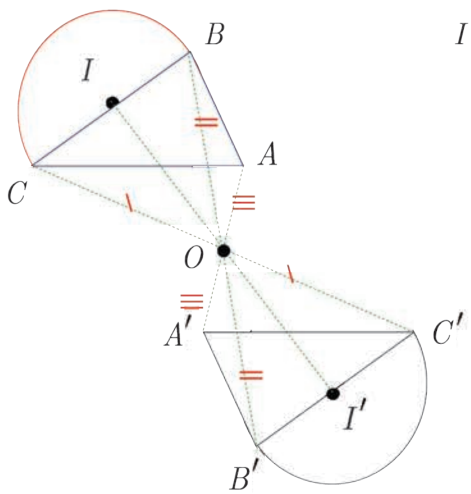
1. نختار بعض نقاط الشكل $\mathcal{F}$ وبصورة خاصة رؤوسه.
2. ننشئ نظائر هذه النقاط.
3. نصل بين النقاط الحاصلة بترتيب مماثل لترتيبها في الشكل $\mathcal{F}$.

مثال



الشكل المرسوم جانباً مؤلف من مثلث ABC ونصف دائرة قطرها $[BC]$ ومركزها I . أنشئ نظير هذا الشكل بالنسبة إلى النقطة المعطاة O .

الحل:



1. ننشئ A' و B' و C' و I' نظائر A و B و C و I بالنسبة إلى النقطة O .
2. ثم نرسم المثلث $A'B'C'$.

(يمكن أن نتحقق من أن الأضلاع المتناظرة متوازية مثنى).

3. نرسم نصف الدائرة التي مركزها I' وقطرها $[B'C']$.

فيكون بذلك قد دار الشكل $\mathcal{F}$ نصف دورة حول O .

طريقة إنشاء نظير شكل بالاستفادة من بعض الخواص

لإنشاء شكلٍ $\mathcal{F}'$ نظيرِ شكلٍ $\mathcal{F}$ بالنسبة إلى نقطة معينة، يمكننا:

1. إنشاء نظير نقطة واحدة من الشكل $\mathcal{F}$.

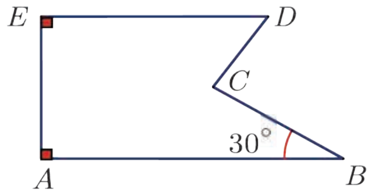
2. ثم نتابع إنشاء الشكل $\mathcal{F}'$ باستخدام الخواص التي يحافظ عليها التناظر المركزي مع الانتباه إلى توجيه الشكل $\mathcal{F}'$.

مثال

في الشكل المجاور:

$DE = 3\text{cm}$ ، $AE = 2\text{cm}$ ، $AB = 4\text{cm}$ ، $BC = 2\text{cm}$.

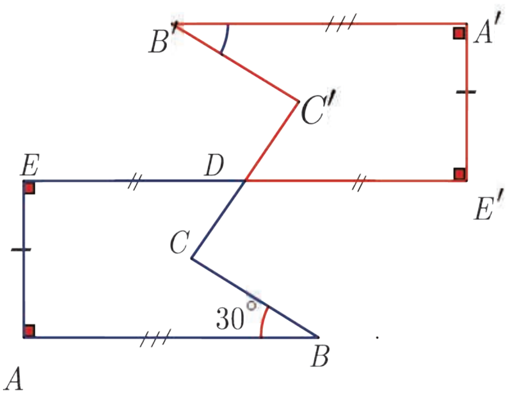
أنشئ نظير الشكل جانباً بالنسبة إلى النقطة D .



الحل:

ننشئ النقطة E' نظيرة E بالنسبة إلى النقطة D باستخدام مسطرة مدرجة.

ثمَّ ننشئ النقاط A' و B' و C' نظيرات A و B و C باستخدام مسطرة مدرجة ومنقلة وفق الترتيب التالي:



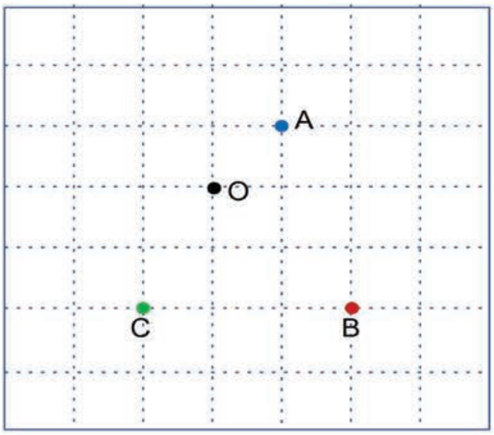
- E' تقع على DE و $DE' = DE = 3\text{cm}$.
- قياس الزاوية $\widehat{E'}$ يساوي $90°$ و $A'E' = 2\text{cm}$.
- قياس الزاوية $\widehat{A'}$ يساوي $90°$ و $A'B' = AB = 4\text{cm}$.
- قياس الزاوية $\widehat{B'}$ يساوي $30°$ و $B'C' = BC = 2\text{cm}$.

تحقق من فهمك

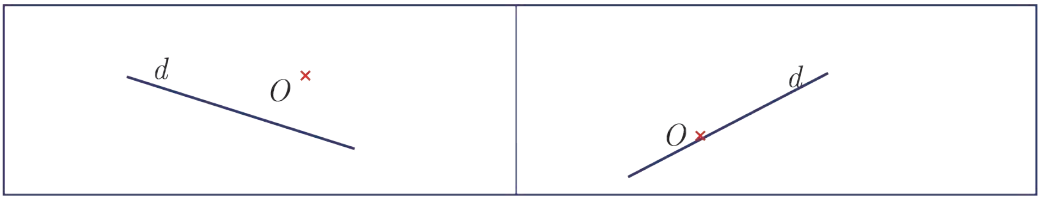
بيّن كيف يمكنك تحديد النقطة A' نظيرة A بالنسبة لـ O باستعمال مسطرة غير مدرّجة وفرجار.

تدرب

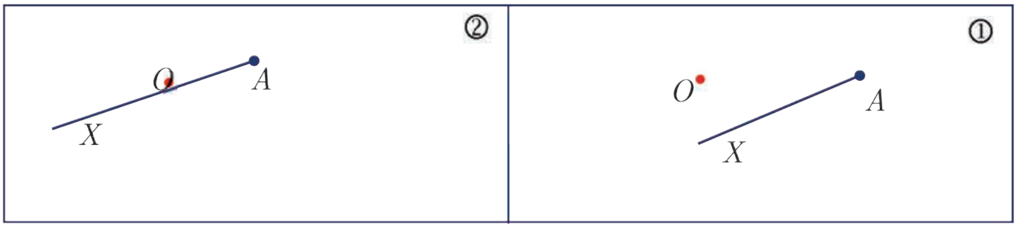
① في الشكل التالي ارسم نظيرات النقاط A و B و C بالنسبة إلى O .



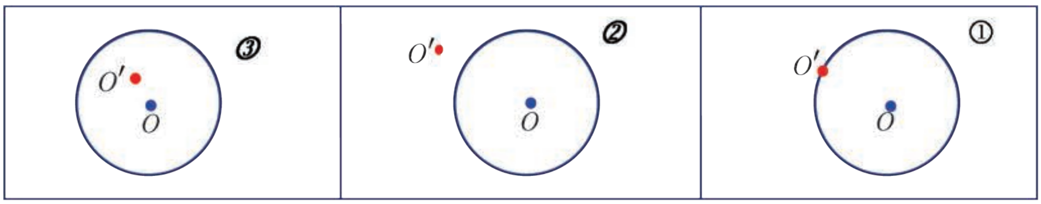
② ارسم نظير المستقيم d بالنسبة إلى النقطة O في الحالتين التاليتين :



③ أنشئ نظير نصف المستقيم $[AX)$ بالنسبة إلى O في الحالتين ① و ② .



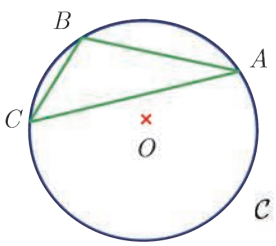
④ أنشئ نظير الدائرة التي مركزها O بالنسبة إلى النقطة O' في الحالات الآتية:



⑤ تنتمي النقاط A و B و C إلى الدائرة $\mathcal{C}$ التي مركزها O .

1 . ارسم الشكل.

2 . اشرح طريقة إنشاء نظير كل من النقاط النقاط A و B و C بالنسبة إلى O باستخدام مسطرة غير مدرجة.



3 مراكز ومحاور التناظر

سوف تتعلم:

- مراكز ومحاور تناظر الأشكال المألوفة.
- البحث عن مركز التناظر

من الاستخدامات

يستخدم مركز التناظر لايجاد محور دوران عجلة السيارة.

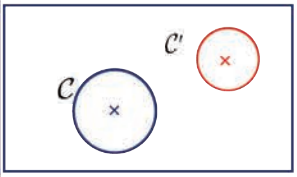
صلة الدرس:

تعرفنا في الدرسين السابقين الاشكال المتناظرة، وكيفية إيجاد نظير شكل بالنسبة إلى نقطة.

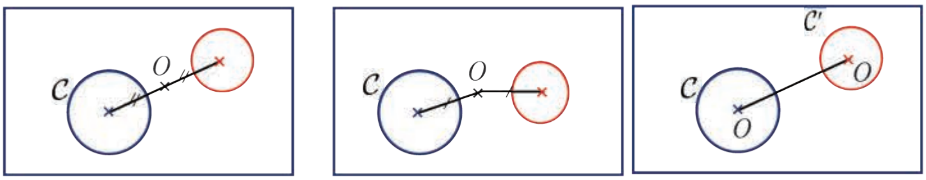
والسؤال كيف نحدد مركز ومحاور تناظر الاشكال المتناظرة

انطلاقة نشطة

طُلب من وسيم وكريم وسعاد تحديد مركز تناظر الدائرتين C, C'، فكانت إجاباتهم على النحو الآتي:



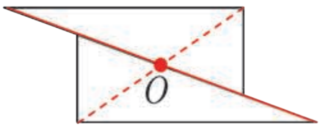
وسيم كريم سعاد



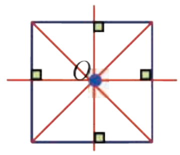
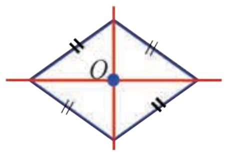
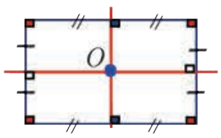
ما هي الإجابة الصحيحة ؟ ما تعليقك ؟

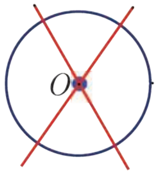
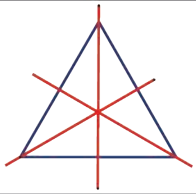
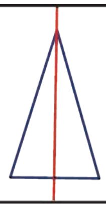
تعلم (إيجاد مركز تناظر):

يقبل الشكل $\mathcal{F}$ النقطة O مركز تناظر إذا كان $\mathcal{F}$ نظير نفسه بالنسبة إلى O .



مراكز ومحاور تناظر الأشكال المألوفة

		
المربع	المعين	المستطيل
له أربعة محاور تناظر.	له محورا تناظر.	له محورا تناظر.
O هو مركز تناظره.	O هو مركز تناظره.	O هو مركز تناظره.

		
الدائرة كلّ مستقيم مارّ بالمركز محور تناظر. مركزها هو مركز تناظر لها.	المثلث المتساوي الأضلاع له ثلاثة محاور تناظر. ليس له مركز تناظر.	المثلث المتساوي الساقين له محور تناظر. ليس له مركز تناظر.

البحث عن مركز التناظر

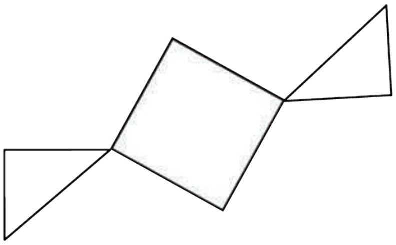
لتعيين مركز تناظر O لشكل $\mathcal{F}$:

1 . نختار نقطتين من $\mathcal{F}$ تبدوان متناظرتين.

2 . نعيِّن النقطة O منتصف القطعة الواصلة بين هاتين النقطتين.

3 . نتحقق أن O هي منتصف قطع أخرى تصل بين نقاط من الشكل ونظائرها.

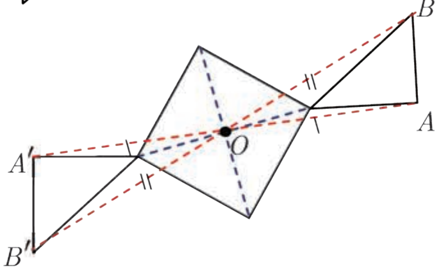
مثال



إن الشكل $\mathcal{F}$ المرسوم جانباً مؤلف من مربع ومثلثين.

تحقق من أنّ الشكل يقبل مركز تناظر.

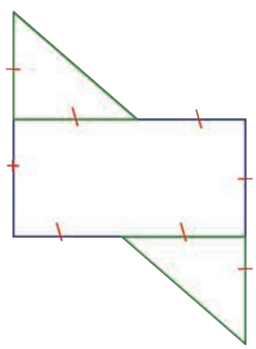
الحل:



1 . نعين O مركز تناظر المربع وهو نقطة تلاقي قطريه.

2 . نتحقّق أن النقطتين A و A' متناظرتان بالنسبة إلى النقطة O . وأنَّ النقطتين B و B' متناظرتان أيضاً بالنسبة إلى النقطة O .

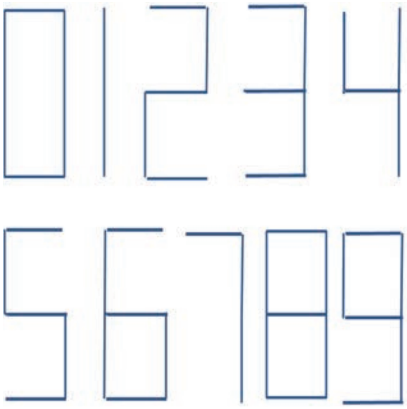
تحقق من فهمك



الشكل المرسوم جانباً مؤلف من مستطيل ومثلثين قائمين ومتساويي الساقين. ارسم هذا الشكل بالأدوات الهندسية وتحقق من أن له مركز تناظر.

تدرب

أولاً:



1. من بين الأرقام المرسومة في الشكل المرافق، ما الأرقام التي تقبل مركز تناظر؟

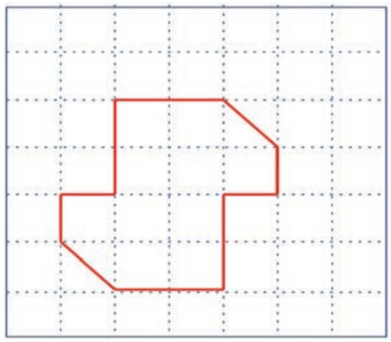
2. اكتب في كلّ من الحالتين التاليتين عدداً مؤلفاً من ثلاثة أرقام يحقق الخاصة المعطاة:

① له مركز تناظر ومحورا تناظر.

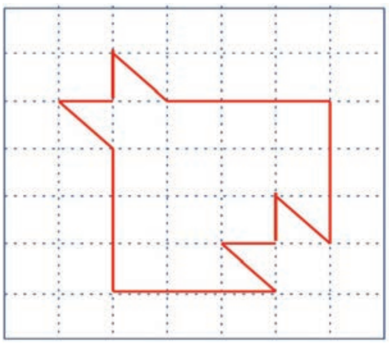
② له مركز تناظر وليس له محور تناظر.

ثانياً:

في كل من الحالتين ① و ② اختبر التناظر المركزي للشكل. في حالة الإيجاب عين مركز التناظر.



①



②

الوحدة الثانية:

مساحة المثلث ومساحة الدائرة

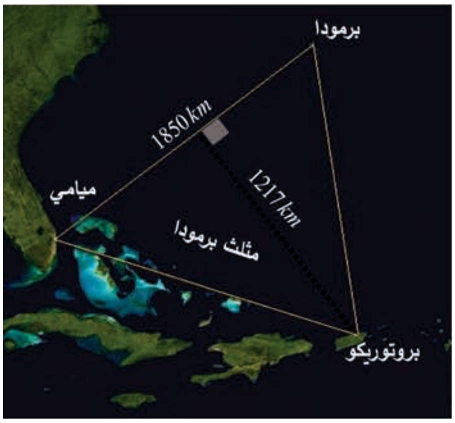
1-مساحة المثلث

2-مساحة الدائرة

1 مساحة المثلث

سوف تتعلم:

- إيجاد مساحة المثلث.



صلة الدرس:

تعلمت كيفية حساب مساحة بعض المضلعات والان سوف تتعلم كيفية حساب مساحة المثلث.

من الجغرافيا

مثلث برمودا: هو منطقة جغرافية على شكل مثلث تقع في المحيط الأطلنطي، اكتسبت اهميتها من اختفاء السفن والطائرات التي تعبرها.

من الإستخدامات

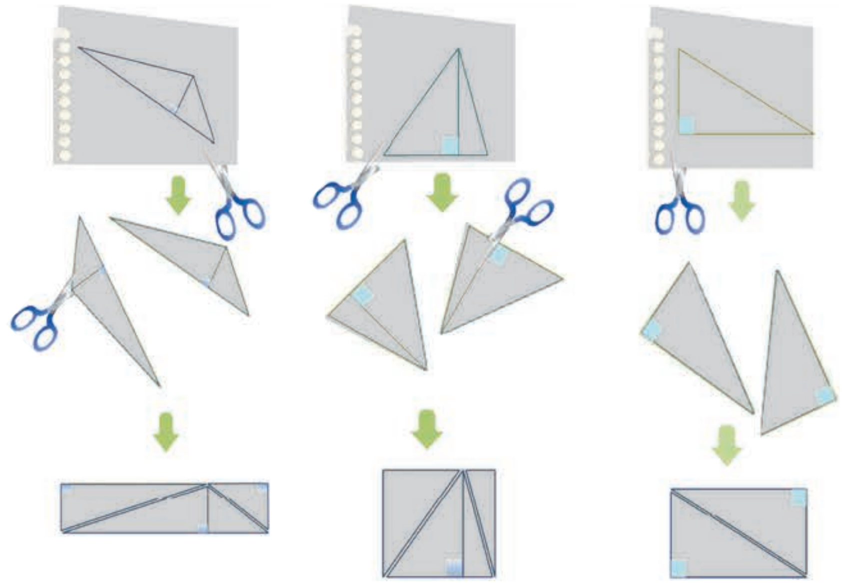
لتقدير انتاج سورية من القطن يتم حساب مساحة الاراضي المزروعة بالقطن.

انطلاقة نشطة (عمل تعاوني):

قامت يارا باستنتاج قاعدة مساحة المثلث من خلال رسم مثلث على ورقة ثم طي الورقة وبعملية القص ينتج لدينا مثلثين طبوقين وبلصق المثلثين ينتج مستطيل مساحته تساوي ضعفي مساحة المثلث.

لاحظ المراحل التي قامت بها يارا لاستنتاج قاعدة مساحة المثلث ثم حاول تنفيذها.

المثلث القائم	المثلث حاد الزوايا	المثلث منفرج الزاوية



مساحة المثلث =   مساحة المثلث =   مساحة المثلث =

تذكر

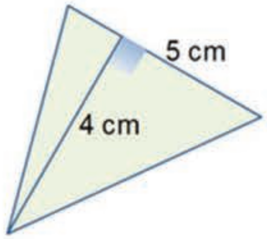
مساحة المستطيل تساوي الطول × العرض

تعلم (مساحة المثلث):

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$$

مثال

احسب مساحة المثلث المجاور.



$$S = \frac{5 \times 4}{2} = 10 cm^2$$

تطبيق ١: من الهندسة

في الشكل المجاور باب الخيمة يمثل مثلث طول قاعدته $3m$

ومساحته $3m^2$. والمطلوب: اوجد طول ارتفاع الخيمة.

الحل:

نفرض طول ارتفاع الخيمة x

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$$

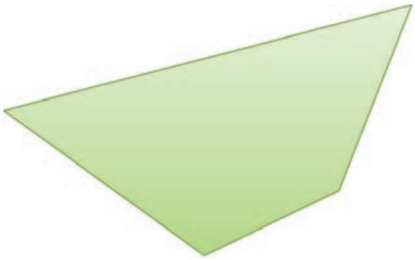
$3 = \frac{3 \times x}{2}$ ومنه $x = 2$ أي ارتفاع الخيمة $2m$

تطبيق ٢: من الفنون الجميلة

خاطت راما عدد من القطع القماشية كل منها على شكل مثلث وهذه المثلثات متساوية بالمساحة وبعد ذلك كونت منها قطعة من القماش مستطيلة الشكل طولها $72cm$ وعرضها $30cm$.

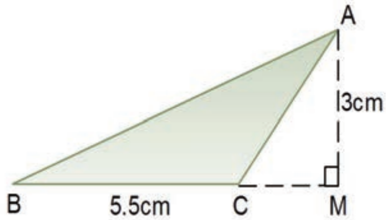
أوجد مساحة قطعة القماش المثلثية الذي صنعت منه هذه القطعة بطريقتين.

تحقق من فهمك (حساب مساحة شكل ما)



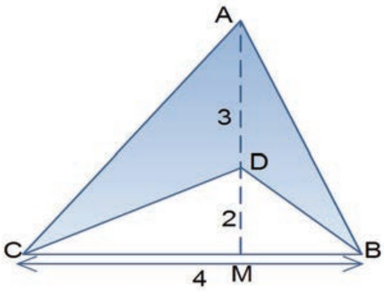
- فكر بكيفية حساب مساحة الشكل الرباعي المجاور.
- قسّم الشكل الى شكلين يمكنك حساب مساحتيهما.
- استخدم المسطرة في حساب الاطوال.
- اكتب المساحة الناتجة وقارن الاجابة مع زميلك.

تدرب



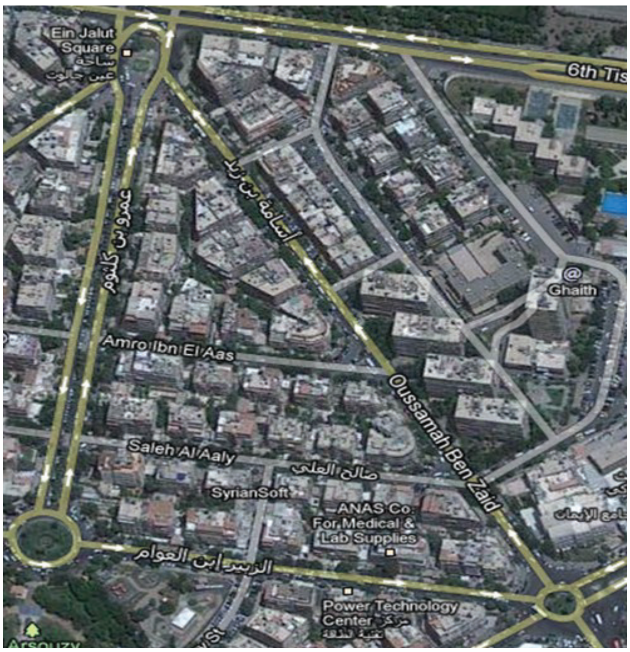
① في الشكل المجاور: ABC مثلث فيه $BC = 5.5cm$

و $AM = 3cm$. والمطلوب: احسب مساحة المثلث ABC .



② في الشكل المجاور: ABC مثلث فيه $AD = 3$ و $DM = 2$

$CB = 4$. والمطلوب: احسب مساحة الجزء الملون.



③ يسكن مازن في دمشق في الحي الذي يحيط به شارع اسامة بن زيد وشارع عمرو بن كلثوم وشارع الزبير بن العوام. (لاحظ شكل الحي)

استخدم مازن برنامج الغوغل ارث لحساب الاطوال ونتج لديه:

طول شارع الزبير بن العوام $= 311m$

طول شارع عمرو بن كلثوم $= 389m$

ساعد مازن في حساب مساحة الحي.

(عد الى الصورة الموجودة في بداية الدرس وحاول إيجاد مساحة مثلث برمودا)

2 مساحة الدائرة

سوف تتعلم:

- إيجاد مساحة الدائرة.

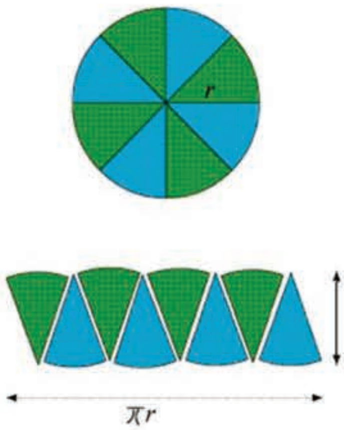
صلة الدرس:

تعلمت في الصف السادس كيفية استخراج قاعدة مساحة الدائرة من خلال رسم الدائرة على الشبكة والان سوف تتعلم كيفية استخراج قاعدة مساحة الدائرة انطلاقاً من مساحة متوازي الاضلاع.

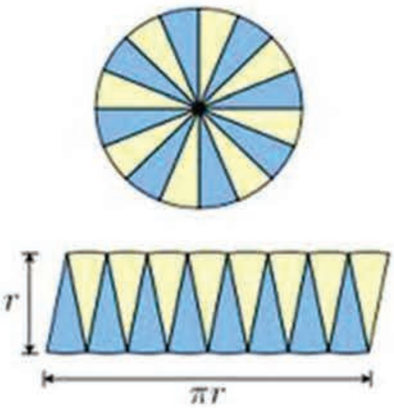
انطلاقة نشطة

تأمل الشكلين الآتيين ثم حاول استنباط الطريقة التي قام بها أرخميدس لاستنتاج مساحة الدائرة.

الشكل١



الشكل٢



وضح سبب زيادة عدد التقسيمات في الشكل الثاني، ثم استنتج مساحة الشكل الناتج؟

معلومة

أول من أوجد مساحة قرص دائري هو العالم ارخميدس (٢٨٤-٢١٢ ق.م) وذلك بتقطيع القرص بانتظام إلى عدد كبير

من الإستخدامات

تُستعمل مساحة الدائرة لحساب الحاجة من العشب الإصطناعي لتغطية ساحة العقدة الطرقية.

تذكر

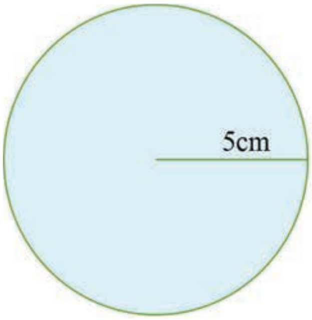
- محيط الدائرة: $P = 2\pi r$
- مساحة متوازي الاضلاع تساوي القاعدة × الارتفاع.

حيث العدد π يساوي تقريبا 3.14

تعلم (مساحة الدائرة):

مساحة الدائرة: $S = \pi r^2$ حيث يدل r^2 على $r \times r$

مثال



أوجد مساحة الدائرة التي نصف قطرها يساوي ٥.

الحل:

$$S = \pi r^2$$
$$= \pi (5)^2$$
$$= 25\pi \ cm^2$$

تطبيق١: من الزراعة

في ارض زراعية تدور انبوبة لرش الماء على بعد $7m$ لري المحصول الزراعي. ما المساحة التي تم رشها بالماء.

الحل:

$$S = \pi r^2$$
$$= \pi (7)^2$$
$$= 49\pi \ m^2$$

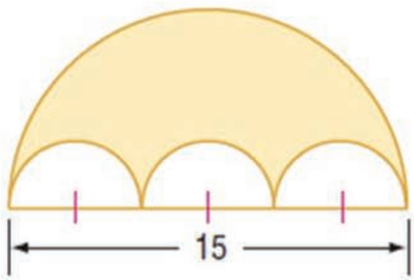
وبأخذ $\pi = \frac{22}{7}$ يكون $S = 154 m^2$

تطبيق٢: من الهندسة

قاعة مسرح دائرية الشكل طول قطرها $42m$

احسب مساحة القاعة.

تحقق من فهمك (حساب مساحة شكل ما)



الشكل المجاور مؤلف من أربع انصاف دوائر ثلاث منها طبوقة

وقطر الدائرة الكبرى يساوي $15cm$

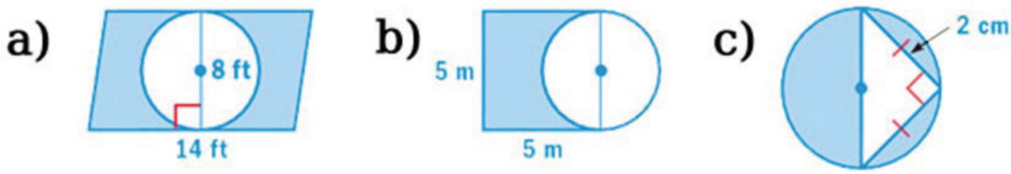
احسب محيط الشكل الملون ومساحته.

تدرب

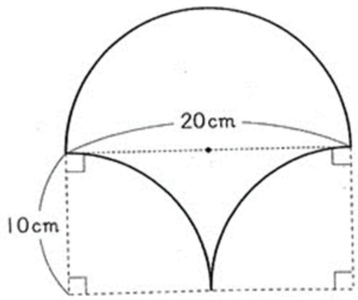
① احسب مساحة كل من الدوائر الآتية:

$a)\ r_1 = 5cm \qquad b)\ r_2 = 0.1km \qquad c)\ r_3 = 200mm$

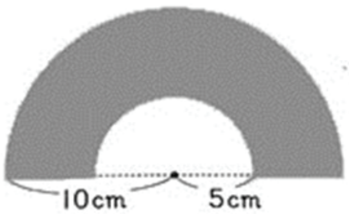
② في الحالات الثلاث الآتية أوجد مساحة الشكل الملون.



③ احسب مساحة الشكل المرسوم جانباً.

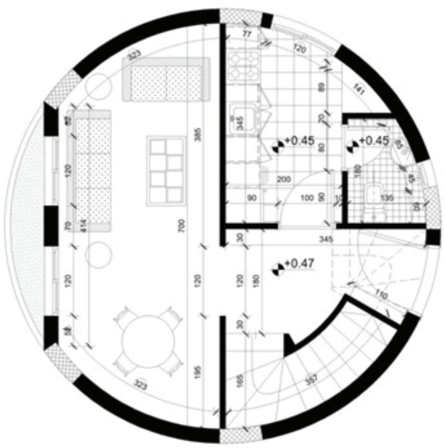


④ احسب مساحة الشكل المرسوم جانباً.



⑤ اتفق أحمد مع مقاول بناء على شراء بيت قيد الانشاء دائري الشكل نصف قطر دائرته بتكلفة للمتر الواحد 30000ل س.

احسب تكلفة هذا البيت.



(في التدريب السابق خذ $\pi = 3.14$)

(عد الى الصورة الموجودة في بداية الدرس وحاول إيجاد مساحة ساحة الامويين علماً أن نصف قطرها يساوي $70m$)

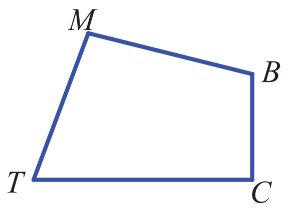
الوحدة الثالثة

متوازيات الأضلاع

1. متوازي الأضلاع ومركز التناظر
2. مساحة متوازي الأضلاع
3. مستقيمان متوازيان وثالث قاطع
4. الانتقال من الشكل الرباعي إلى متوازي الأضلاع
5. حالات خاصة: مستطيل، معين، مربّع

انطلاقة نشطة

لكلِّ سؤالٍ إجابةٌ صحيحةٌ واحدةٌ، ضع خطاً تحتها.



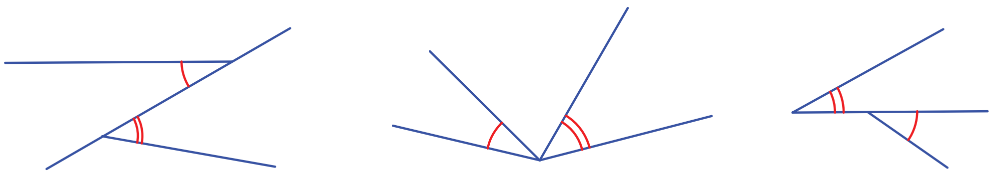
① يُقرأ الشكل الرباعي المرسوم جانباً.......

1) $MBTC$ 2) $MTCB$ 3) $MCTB$

② في الشكل الرباعي السابق، القطعتان $[BT]$ و $[MC]$ هما:

1) قطران 2) رأسان 3) ضلعان

③ الزاويتان المشتركتان بالرأس هما المرسومتان:



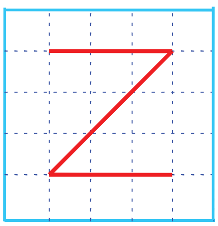
❶ ❷ ❸

1) في الشكل ❶ 2) في الشكل ❷ 3) في الشكل ❸

④ ضلعا الزاوية $\widehat{BCD}$ هما نصفا المستقيمين ....

1) $[CB)$ و $[CB)$ 2) $[DC)$ و $[BC)$ 3) $[BC)$ و $[CB)$

⑤ الشكل المرافق



1) يقبل محور تناظر.

2) يقبل مركز تناظر.

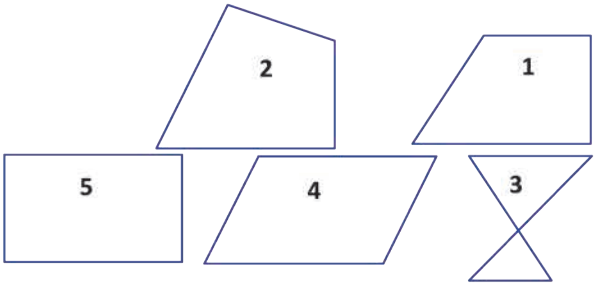
3) لا يقبل مركز تناظر ولا يقبل محور تناظر.

1 متوازي الأضلاع ومركز التناظر

صلة الدرس:

درست سابقاً تعريف متوازي الاضلاع وفي هذا الدرس سوف تتعلم خواص متوازي الاضلاع.

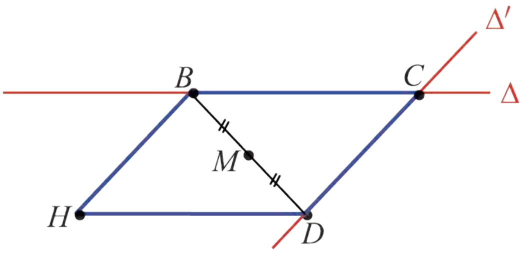
انطلاقة نشطة (متوازي الأضلاع)



أولاً: أي الأشكال المرسومة أعلاه يبدو أنه متوازي أضلاع؟

ثانياً: ارسمْ، على ورقة بيضاء، متوازي أضلاع $ABCD$. أين يبدو مركز تناظره؟

ثالثاً: ليكن Δ و Δ' مستقيمين متقاطعين في C، ولتكن B نقطة من Δ و D نقطة من Δ'. $BCDH$ متوازي أضلاع والنقطة M هي منتصف قطره $[BD]$.



1) أوجد، شارحاً إجاباتك، نظير كلٍّ من العناصر الآتية وفق التناظر الذي مركزه M:

① المستقيم Δ ② المستقيم Δ' ③ النقطة C.

2) كيف تؤكد، إذن، أنَّ M هي مركز تناظر متوازي الأضلاع $BCDH$؟

3) حدد الأطوال المتساوية والزوايا المتساوية القياس في الشكل معلّلاً إجابتك.

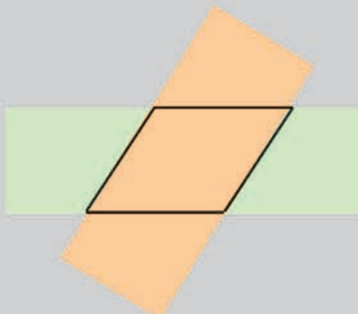
سوف تتعلم:

- معرفةُ واستخدامُ تعريف متوازي الأضلاع.
- إثبات خواص قطري متوازي أضلاع، أضلاعه، زواياه

في التصميم:

يستخدم المصممون شكل متوازي الأضلاع لتصميم اشكال الابنية والادوات الكهربائية والمنزلية.

هل تعلم:



يمكنك الحصول على متوازي أضلاع من تقاطع شريطين.

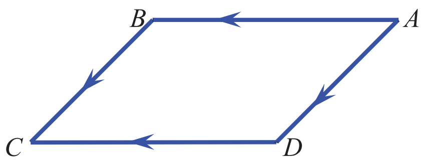
لاحظ أنَّ كل ضلعين متقابلين، في الرباعي المرسوم أعلاه، متوازيان.

تعلم

متوازي الأضلاع هو مضلعٌ رباعيٌ فيه كلِّ ضلعينِ متقابلينِ متوازيان.

مثال:

الرباعي $ABCD$ المرسوم جانباً، فيه: $(AB) \parallel (DC)$ و $(AD) \parallel (BC)$ فهو متوازي أضلاع.

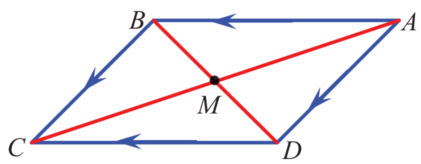


خاصة (1)

نقطةُ تقاطعِ قطري متوازي الأضلاع هي مركز تناظره. نسمّي هذه النقطة مركز متوازي الأضلاع.

مثال:

الرباعي $ABCD$ المرسوم جانباً هو متوازي الأضلاع: فنقطة تقاطع قطريه M هي مركزه.

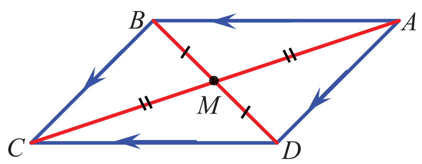


خاصة (2)

قطرا متوازيَ الأضلاع متناصفان.

مثال:

الرباعي $ABCD$ المرسوم جانباً هو متوازي الأضلاع، M هي نقطة تقاطع قطريه. إذن $MA = MC$ و $MB = MD$.

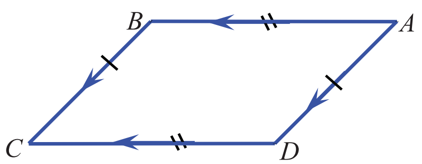


خاصة (3)

كلّ ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع طولاهما متساويان.

مثال:

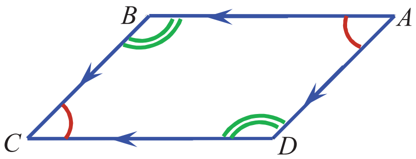
الرباعي $ABCD$ المرسوم جانباً هو متوازي الأضلاع،



خاصة (4)

كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع قياسهما متساويان.

مثال:



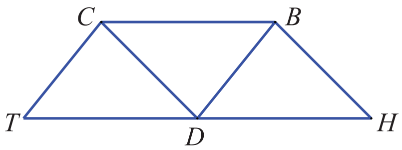
الرباعي $ABCD$ المرسوم جانباً هو متوازي الأضلاع،

إذن $\widehat{A} = \widehat{C}$ و $\widehat{B} = \widehat{D}$.

استخدام خواص متوازي الأضلاع

في المسائل المتعلقة بمتوازي الأضلاع، نستفيد من خواص أضلاعه المتقابلة وزواياه المتقابلة وتناصف قطريه.

مثال:



في الشكل المجاور: $BCDH$ و $BCTD$ متوازيا أضلاع.

أثبت أنَّ النقطة D هي منتصف القطعة $[HT]$.

فكرة الحل:

لإثبات أنَّ D هي منتصف $[HT]$، علينا إثبات أنَّ H و D و T على استقامة واحدة، وأنَّ $DH = DT$.

يمكن إثبات أن النقاط A,B,C على استقامة واحدة بأن نثبت أن $(AB) \parallel (BC)$

الحل:

- $BCDH$ متوازي أضلاع، إذن $(BC) \parallel (HD)$ (1) و $BC = HD$ (2)
- $BCTD$ متوازي أضلاع، إذن $(BC) \parallel (DT)$ (3) و $BC = DT$ (4)
- نستنتج من (1) و(3) أنَّ $(HD) \parallel (DT)$.

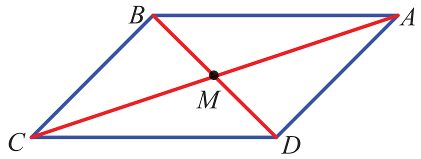
ولما كان المستقيمان (HD) و (DT) مشتركين بالنقطة D، كانت النقاط H و D و T على استقامة واحدة... (*)

- نستنتج من (2) و(4)أنَّ $HD = DT$ ... (**)

- نستنتج أخيراً من (*) و(**) أنَّ النقطة D هي منتصف القطعة $[HT]$.

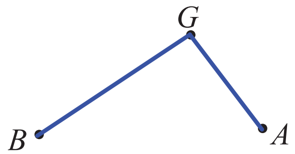
تحقق من فهمك

الرباعي $ABCD$ المرسوم جانباً هو متوازي الأضلاع،إعتمادا على خواص متوازي الاضلاع.



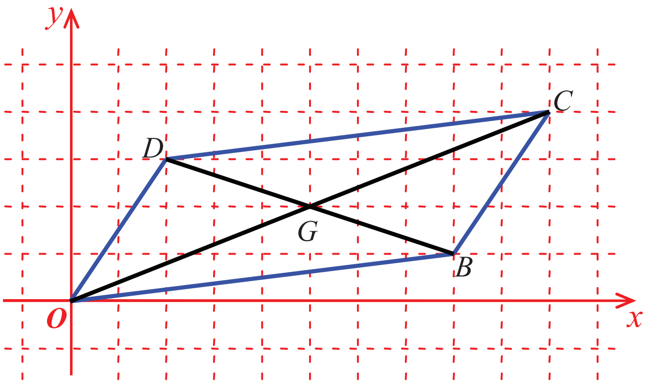
1) حدد المستقيمات المتوازية.
2) حدد القطع المستقيمة المتساوية.
3) حدد الزوايا المتساوية بالقياس.

تدرب



① انقل الشكل المرسوم جانباً إلى كراسك ثم عيّن النقطتين C و D، علماً أن G هي مركز متوازي الأضلاع $ABCD$ الذي عليك رسمه.

②في الشكل المرافق : $MBCD$ متوازي أضلاع مرسوم في معلم متعامد مبدؤه O، G نقطة تلاقي قطريه. إحداثيا B هما $(1,8)$ وإحداثيا D هما $(2,3)$.



1. اذكر إحداثيات النقطتين C و G.

2. تحقق أنَّ إحداثيي C تساويان على التوالي مثلي إحداثيي G.

3. تحقق أنَّ فاصلة G تساوي نصف مجموع فاصلتي B و D، وترتيبها يساوي نصف مجموع ترتيبيهما.

4. تحقق أنَّ فاصلة C تساوي مجموع فاصلتي B و D، وترتيبها يساوي مجموع ترتيبيهما.

2 مساحة متوازي الأضلاع

سوف تتعلم:

• حساب مساحة متوازي أضلاع

في الهندسة

يحسب مخطط المدن المساحات عند التخطيط لإنشاء مواقف السيارات.

ملاحظة

عند حساب مساحة سطح، يجب أن تقاس الأطوال بواحدة قياس الأطوال ذاتها.

صلة الدرس:

سوف نتعلم كيفية حساب مساحة متوازي أضلاع انطلاقاً من مساحة المستطيل.

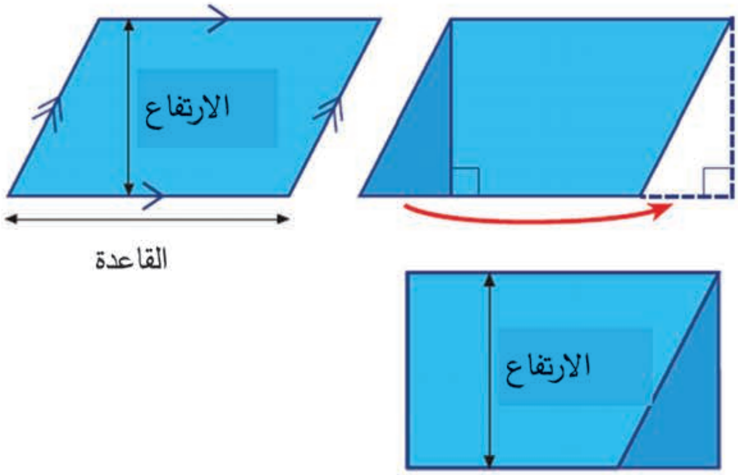
انطلاقة نشطة

الرباعي $ABCD$ المرسوم جانباً هو متوازي أضلاع.

1. قصّت ريم الشكل المرافق ثمَّ قالت واثقةً:

« قمتُ بعمليةِ قصٍ تليها عمليةُ لصقٍ، فحصلتُ على مستطيلٍ له مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$»

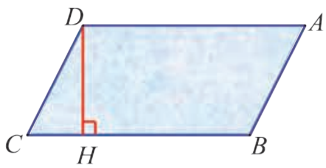
كرِّرْ رسمَ الشكل على ورقة بيضاء، ثمَّ قمْ بعمليتي القص واللصق اللتين قامت بهما ريم.



2. قال عمّارُ: « قمتُ، أنا أيضاً، بعمليةِ قصٍ تليها عمليةُ لصقٍ، فحصلتُ على مستطيلٍ تختلف أبعاده عن أبعاد ذلك الذي حصلتْ عليه ريم، ومع ذلك له مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$»

قمْ بما قام به عمّار.

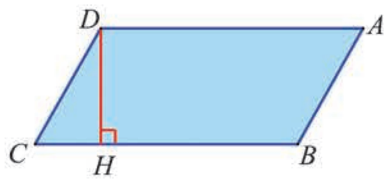
3. اذكرْ طريقتين لحساب مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.



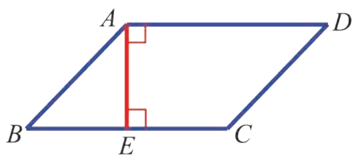
تعلم

ارتفاع متوازي الأضلاع $ABCD$ المتعلق بضلعه $[BC]$ هو كل قطعة مستقيمة عمودية على المستقيمين (BC) و (AD) ومحددة بهما. عندئذ، نسمي $[BC]$ قاعدة متوازي الأضلاع.

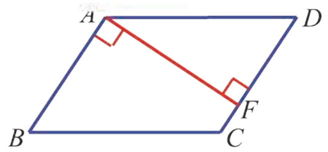
نقول أيضاً إنَّ طول الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ هو طول إحدى تلك القطع.



انظر إلى الشكلين ① و ② أدناه:



الشكل ①



الشكل ②

في الشكل ①: $[BC]$ هي قاعدة، إذن $[AE]$ هو ارتفاع.

في الشكل ②: $[DC]$ هي قاعدة، إذن $[AF]$ هو ارتفاع.

تعلم

مساحةُ متوازي أضلاعٍ تساوي جداءَ ضرب طول أحد أضلاعه بالارتفاع المتعلق به.

نرمز إلى مساحة متوازي الأضلاع بالرمز S، فيكون:

في الشكل السابق ①: $S = BC \times AE$ وفي الشكل السابق ②: $S = DC \times AF$

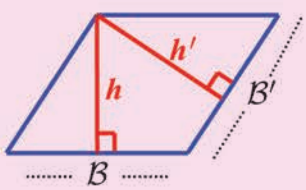
نرمز عادة لقاعدة متوازي الأضلاع بالرمز $\mathcal{B}$ ولارتفاعه بالرمز h، فيكون $S = \mathcal{B} \times h$

استخدام طريقتي حساب المساحة:

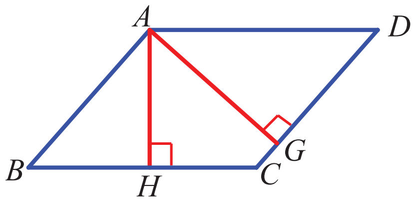
في متوازي أضلاعٍ، إذا علمنا ثلاثةً من الأطوال

$\mathcal{B}$ و h و $\mathcal{B}'$ و h'، تمكنّا من حساب الطول

الرابع باستخدام العلاقة $\mathcal{B} \times h = \mathcal{B}' \times h'$



مثال



في الشكل المرافق: $ABCD$ متوازي أضلاع، $BC = 5\,cm$

و $AH = 3\ cm$ و $AG = 3.75\ cm$.

احسب طول القطعة $[CD]$.

الحل: نرمز إلى مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ بالرمز S.

فإذا اتخذنا $[BC]$ قاعدة، كان $[AH]$ الارتفاع المتعلق بها، عندها:

$$S = BC \times AH = 5 \times 3 = 15 \quad \dots (1)$$

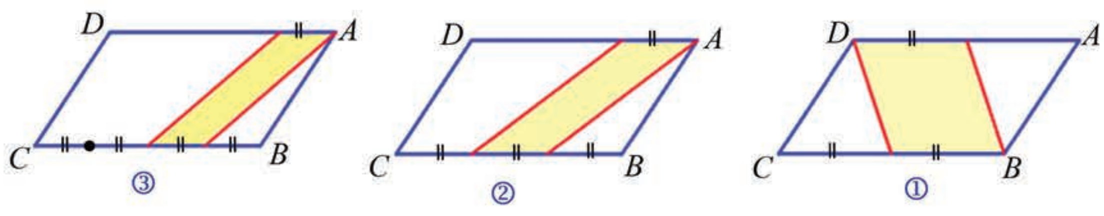
وإذا اتخذنا $[CD]$ قاعدة، كان $[AG]$ الارتفاع المتعلق بها، عندها:

$$S = CD \times AG = CD \times 3.75 = 4.5 \times CD \quad \dots (2)$$

نستنتج من (1) و(2) أنَّ $3.75 \times CD = 15$، ومنها $CD = \dfrac{15}{3.75} = 4\ cm$

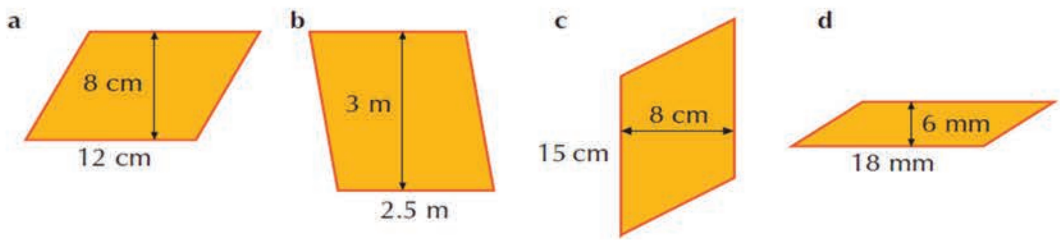
تحقق من فهمك

ما نسبة مساحة المنطقة المظلّلة إلى مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$، في كلٍّ من الحالات الآتية:



تدرب

احسب مساحة كل من متوازيات الاضلاع الآتية:



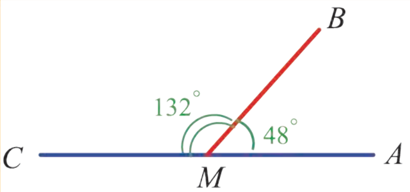
3 مستقيمان متوازيان وثالث قاطع

سوف تتعلم:

- خواص زاويتين متتامتين، متكاملتين، متقابلتين بالرأس.
- خواص الزوايا الحاصلة بين كلٍّ من مستقيمين متوازيين ومستقيم قاطع لهما.

صلة الدرس:

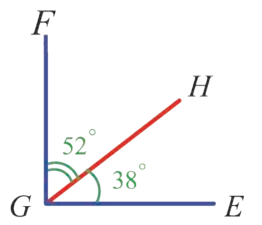
تعلمت في الدرسين السابقين متوازي الاضلاع ومساحته ولكنك تحتاج إلى الاعتماد على خواص الزوايا الحاصلة بين كلٍّ من مستقيمين متوازيين ومستقيم قاطع لهما من أجل إثبات أن شكل رباعي هو متوازي أضلاع.



في الشكل (1):

هل النقاط A و M و C على استقامة واحدة؟

شكل (1)



في الشكل (2):

هل المستقيمان (GE) و (GF) متعامدان؟

شكل (2)

1. ارسم مستقيمين Δ و Δ' متقاطعين في M، ثمَّ ضعْ نقطةً B على Δ وأخرى C على Δ'.
2. ارسم النقطة B' نظيرة B بالنسبة إلى M، والنقطة C' نظيرة C بالنسبة إلى M.
3. اشرح لماذا $\widehat{BMC} = \widehat{B'MC'}$.

تعلم (الزاويتان المتتامتان):

نقول عن زاويتين إنَّهما **متتامتان**، إذا كان مجموع قياسيهما يساوي 90°.

مثال: الزاويتان $A = 32^o$ و $B = 28^o$ متتامتان، لأنَّ $A + B = 32^o + 58^o = 90^o$.

تعلم (الزاويتان المتكاملتان):

نقول عن زاويتين إنَّهما **متكاملتان**، إذا كان مجموع قياسيهما يساوي 180°.

مثال: الزاويتان $\widehat{C} = 120^\circ$ و $\widehat{D} = 60^\circ$ متكاملتان، لأنَّ $\widehat{C} + \widehat{D} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$.

تعلم (الزاويتان المتقابلتان بالرأس):

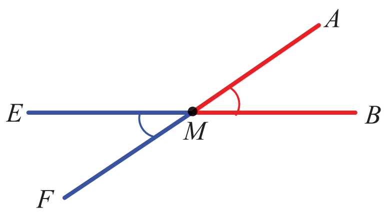
نقول عن زاويتين إنَّهما**متقابلتان بالرأس**، إذا كانتا تشتركان برأسٍ واحد وضلعا إحداهما امتدادان لضلعي الأخرى.

مثال: في الشكل المجاور:

النقاط A و M و F على استقامة واحدة.

والنقاط B و M و E على استقامة واحدة.

فالزاويتان $\widehat{AMB}$ و $\widehat{EMF}$ متقابلتان بالرأس.



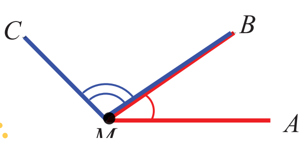
خاصة : إذا تقابلت زاويتان بالرأس، تساوى قياساهما.

مثال: في الشكل السابق، الزاويتان $\widehat{AMB}$ و $\widehat{EMF}$ متساويتان لأنهما متقابلتان بالرأس.

تعلم (الزاويتان المتجاورتان):

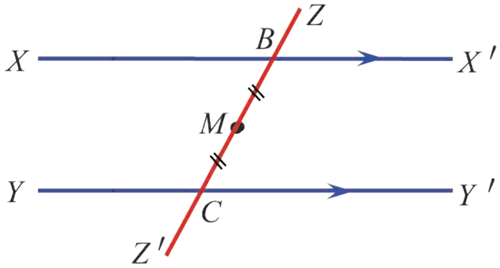
نقول إنَّ زاويتين **متجاورتان**، إذا كانتا تشتركان بضلعٍ واحد وتقعان إلى طرفي الضلع المشترك.

في الشكل المرافق:الزاويتان $\widehat{AMB}$ و $\widehat{BMC}$ تشتركان بالضلع $[MB)$



وتقعان إلى طرفي هذا الضلع، فهما متجاورتان.

انطلاقة نشطة (مستقيمان متوازيان وقاطع)



في الشكل المرافق:

المستقيمان (XX') و (YY') متوازيان.

والمستقيم (ZZ') يقطع (XX') في B

ويقطع (YY') في C.

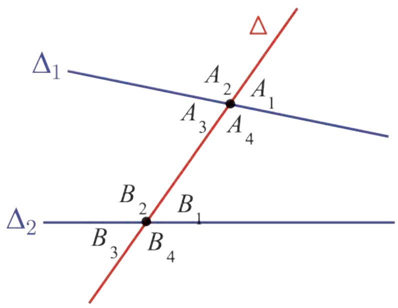
والنقطة M هي منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

1. ماهو نظير كلٍّ من نصفي المستقيمين $[BX)$ و $[BZ')$ بالنسبة إلى النقطة M؟

2. اشرح لماذا $\widehat{XBZ'}=\widehat{Y'CZ}$.

3. اشرح، بطريقة مماثلة، لماذا $\widehat{X'BZ'}=\widehat{YCZ}$.

تعلم



في الشكل المجاور: المستقيم Δ قاطعٌ للمستقيمين Δ_1 و Δ_2.

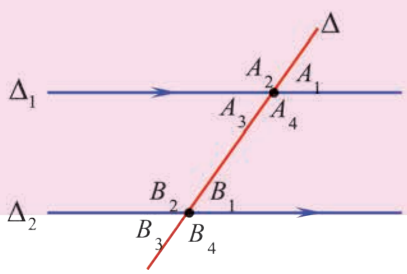
- نسمي $\widehat{A_3}$ و $\widehat{B_1}$ زاويتين متبادلتين داخلاً. وكذلك $\widehat{A_4}$ و $\widehat{B_2}$.
- نسمي $\widehat{A_1}$ و $\widehat{B_3}$ زاويتين متبادلتين خارجاً. وكذلك $\widehat{A_2}$ و $\widehat{B_4}$.
- نسمي $\widehat{A_1}$ و $\widehat{B_1}$ زاويتين متناظرتين. وكذلك $\widehat{A_2}$ و $\widehat{B_2}$. $\widehat{A_3}$ و $\widehat{B_3}$. $\widehat{A_4}$ و $\widehat{B_4}$.

خواص:

إذا قُطِع مستقيمان متوازيان بقاطعٍ، عندئذ:

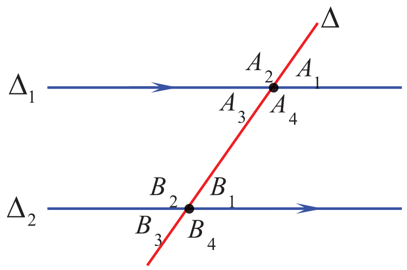
1. كلّ زاويتين متبادلتين داخلاً متساويتان.

2. كلّ زاويتين متبادلتين خارجاً متساويتان.



3. كلُّ زاويتين متناظرتين متساويتان.

مثال: في الشكل المرافق:



$\Delta_1 \parallel \Delta_2$ والمستقيم Δ قاطع لهما في A و B.

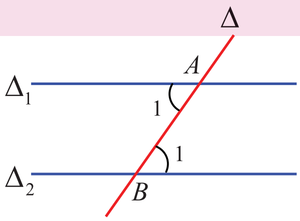
1) $A_3 = B_1$ لأنهما متبادلتان داخلاً. وللسبب ذاته $A_4 = B_2$.

2) $A_1 = B_3$ لأنهما متبادلتان خارجاً. وللسبب ذاته $A_2 = B_4$.

3) $A_1 = B_1$ لأنهما متناظرتان. وللسبب ذاته $A_2 = B_2$ و $A_3 = B_3$ و $A_4 = B_4$.

تعلم (إثبات توازي مستقيمين) :

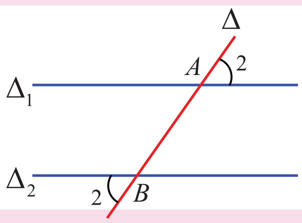
1) إذا قُطِع مستقيمان بقاطعٍ وتساوت زاويتان متبادلتان داخلاً، كان المستقيمان متوازيين.



في الشكل المرافق: $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$ وهما في وضع التبادل الداخلي،

إذن $\Delta_1 \parallel \Delta_2$.

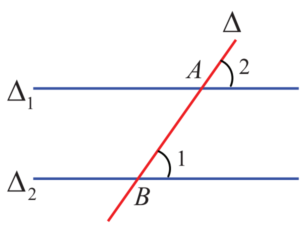
2) إذا قُطِع مستقيمان بقاطعٍ وتساوت زاويتان متبادلتان خارجاً، كان المستقيمان متوازيين.



في الشكل المرافق: $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$ وهما في وضع التبادل الخارجي،

إذن $\Delta_1 \parallel \Delta_2$.

3) إذا قُطِع مستقيمان بقاطعٍ وتساوت زاويتان متناظرتان، كان المستقيمان متوازيين.



في الشكل المرافق: $\widehat{A_2} = \widehat{B_1}$ وهما بوضع التبادل الداخلي،

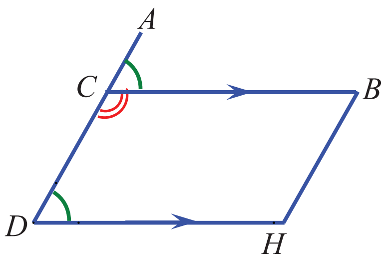
إذن $\Delta_1 \parallel \Delta_2$.

مثال (استخلاص خاصة لمتوازي الأضلاع):

أثبت أن كلَّ زاويتين متتاليتين، من زوايا متوازي أضلاع، متكاملتان.

ملاحظة: من المفيد رسمُ متوازي أضلاعٍ وترميز رؤوسه حتى لو لم يطلب ذلك صراحةً، وقد يكون الرسم ضرورياً في كثير من الحالات.

الحل:



- نرسم متوازي أضلاع $BCDH$، فيكون المطلوب إثبات أنَّ:

$\widehat{BCD}+\widehat{CDH}=180^\circ$ و $\widehat{CDH}+\widehat{DHB}=180^\circ$

و $\widehat{DHB}+\widehat{HBC}=180^\circ$ و $\widehat{HBC}+\widehat{BCD}=180^\circ$

- نرسم نصف المستقيم $[DA)$ ماراً بالنقطة C.

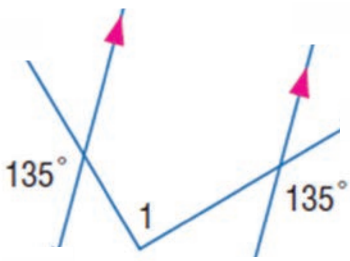
$BCDH$ متوازي أضلاع، فالمستقيمان (BC) و (HD) متوازيان، والمستقيم (AD) قاطعٌ لهما في النقطتين C و D، إذن $\widehat{ACB}=\widehat{CDH}$ ... (1) لأنهما متناظرتان.

- $\widehat{BCD}+\widehat{BCA}=180^\circ$ ... (2) لأنَّ النقاط A و C و D على استقامة واحدة.
- نستنتج من (1) و(2) أنَّ $\widehat{BCD}+\widehat{CDH}=180^\circ$.

ملاحظة: نثبتُ، بطريقة مماثلة (أو باستخدام خاصة تساوي زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع) الأجزاءَ الأخرى مما هو مطلوب.

تحقق من فهمك

في الشكل المجاور احسب قياس الزاوية $\hat{1}$.

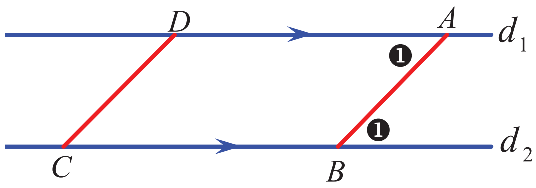


تدرب

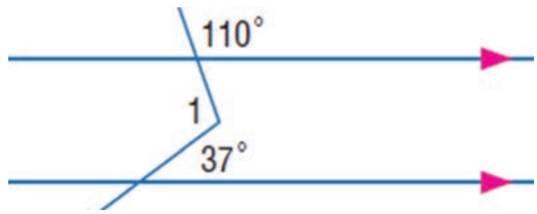
① في الشكل المجاور : المستقيمان d_1 و d_1 متوازيان. والزاويتان $\widehat{A}_1$ و $\widehat{B}_1$ متساويتان.

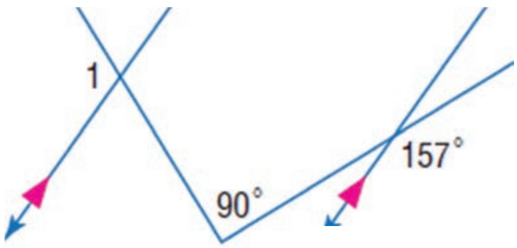
1. ما وضع المستقيمين (AB) و (DC)؟ علّلْ إجابتك.

2. ما نوع الرباعي $ABCD$؟علّلْ إجابتك.



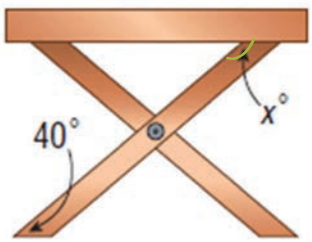
② في الشكلين الآتيين احسب قياس الزاوية $\widehat{1}$.





③ في الشكل المجاور منضدة قابلة للطي

احسب قياس الزاوية x^o.



4 الانتقال من الشكل الرباعي إلى متوازي الأضلاع

سوف تتعلم:

- تبيان فيما إذا كان الشكل الرباعي متوازي الأضلاع.

من الاستخدامات:

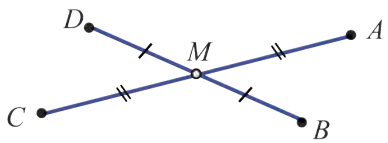
استخدمت الاشكال الرباعية والحالات الخاصة لها منذ آلاف السنين .

صلة الدرس:

بعد أن تعلمت الشكل الرباعي، ومتوازي الأضلاع ، والآن إذا كان لديك شكل رباعي كيف تتبيَّن أنه متوازي الأضلاع؟

انطلاقة نشطة : متوازي الأضلاع (مضلع رباعي قطراه متناصفان)

أولاً: تأمل الشكل المجاور



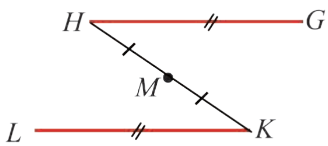
استفد من خواصٍ للتناظر بالنسبة إلى النقطة M،

كي توضِّح سبب توازي (AB)و (CD)

وسبب توازي (CB) و (DA).

ما النتيجة التي تعرفها وتسمح لك بتحديد نوع الرباعي $ABCD$؟

ثانياً:في الشكل المجاور استخدم التناظر بالنسبة إلى النقطة M لإثبات أن M هي منتصف $[GL]$.



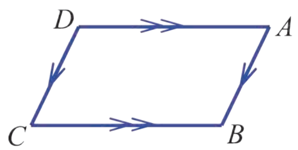
ما الخاصة التي تعرفها وتفيد في تحديد نوع المضلع الرباعي $GHLK$؟

تعلم (إثبات أن شكل رباعي متوازي أضلاع) :

1−إذا كان كل ضلعين متقابلين في مضلع رباعي متوازيين كان الرباعي متوازي أضلاع.

في الشكل المرافق:لدينا $ABCD$ مضلع رباعي فيه:

$$(AD)\parallel(BC) \text{ و } (AB)\parallel(DC)$$



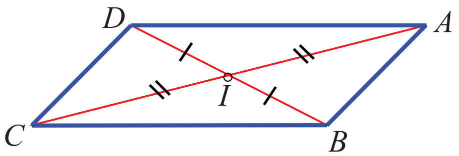
ومنه $ABCD$ متوازي أضلاع.

2- إذا تناصف قطرا مضلعٍ رباعي كان الرباعي متوازي أضلاع.

في الشكل المرافق:لدينا $ABCD$ مضلع رباعي فيه:

$IB = ID$ و $IA = IC$

ومنه $ABCD$ متوازي أضلاع.

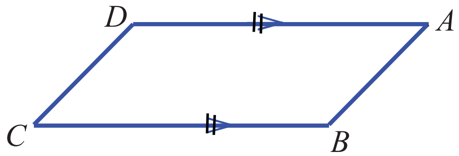


3- إذا توازى، في مضلع رباعي ، ضلعان متقابلان وتساوى طولاهما، كان الرباعي متوازي أضلاع.

في الشكل المرافق:لدينا $ABCD$ مضلع رباعي فيه:

$(AD) \parallel (BC)$ و $AD = BC$

ومنه $ABCD$ متوازي أضلاع.



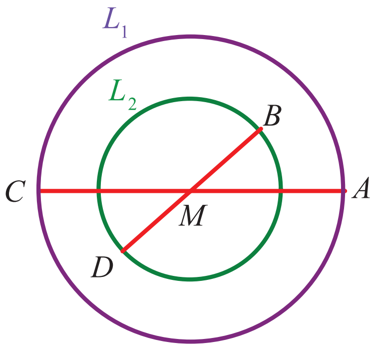
مثال 1 (إنشاء متوازي أضلاع علم طولا قطريه):

أنشئْ متوازيَ أضلاعٍ $ABCD$ على أن يكون $AC = 5\ cm$ و $DB = 3\ cm$، ثم علِّل إنشاءك.

طريقة الإنشاء:

لإنشاء متوازي أضلاع طولا قطريه ℓ و ℓ'. نرسم قطعتين مستقيمتين متناصفتين طولاها ℓ و ℓ' ، ثم نصل بين أطرافهما.

تنفيذ الإنشاء:



1. نرسم دائرة L_1 مركزها M ونصف قطرها $2.5\ cm$

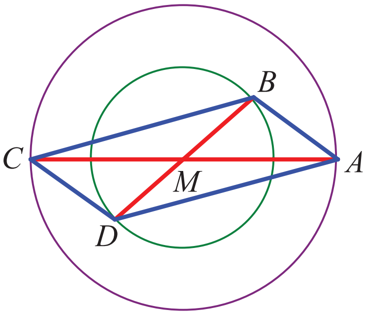
وليكن أحد أقطارها $[AC]$ $(AC = 5\ cm)$

2. نرسم دائرة L_2 مركزها M ونصف قطرها $1.5\ cm$

وليكن أحد أقطارها $[BD]$ $(BD = 3\ cm)$

3. نصل النقاط A و B و C و D فيكون

$ABCD$ متوازيَ أضلاعٍ.



تعليل الإنشاء:

القطعتان المستقيمتان $[AC]$ و $[BD]$ متقاطعتان في M. ولدينا $MA = MC = 2.5\ cm$ و $MB = MD = 1.5\ cm$. أي إن قطري الرباعي $ABCD$ متناصفان، فهو متوازي أضلاع. ثم إن $AC = 5\ cm$ و $BD = 3\ cm$، إذن $ABCD$ يحقق المطلوب.

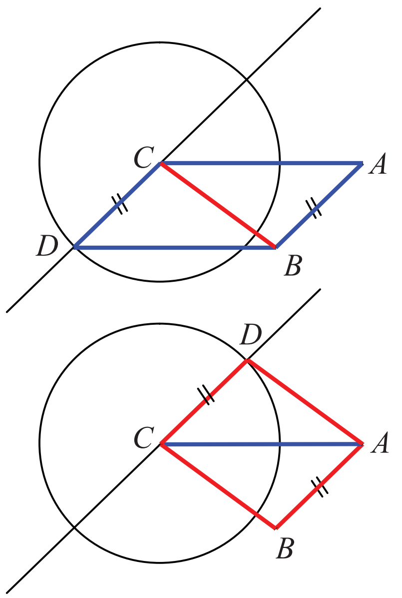
مثال2 (إنشاء متوازي أضلاع باستخدام ضلعين متقابلتين، متساويتي الطول):

A و B و C ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة . أنشئ متوازي أضلاع تكون A و B و C ثلاثةً من رؤوسه ورأسه الرابع D، ثم علِّل إنشاءك.

طريقة الإنشاء:

نرسم قطعتين مستقيمتين متوازيتين ومتساويتي الطول ونصل بين أطرافهما فنحصل على متوازيَ أضلاع.

تنفيذ الإنشاء:



1.نرسم القطعة المستقيمة $[AB]$.

2. نرسم موازياً للمستقيم (AB)يمر بالنقطة C ونعّين عليه نقطة D بحيث يكون $CD = AB$.

3. نرسم الرباعي $ABDC$أو $ABCD$ لنحصل على متوازي أضلاع وفق ما طُلب.

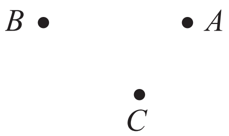
تعليل الإنشاء:

القطعتان المستقيمتان $[AB]$و $[CD]$متوازيتان ومتساويتان، فالرباعي $ABDC$متوازي أضلاع.

كما أنَّ $ABCD$هو الآخر يحقق ما طلب.

تحقق من فهمك

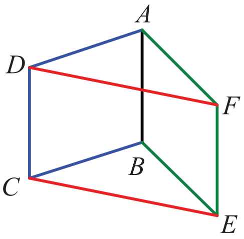
A و B و C ثلاث نقاط معطاة.



أنشئ متوازي الأضلاع $ABCD$.

تدرب

1. $ABCD$ و $ABEF$ متوازيا أضلاع. أثبت أنَّ $CDFE$ متوازي أضلاع.



2. أنشئ متوازي أضلاع $EFHG$، طولا قطريه $4\ cm$ و $6\ cm$.

3. أنشئ متوازي أضلاع $IJKL$، على أن يكون: $JK = 3\ cm$ و $JL = 5\ cm$ و $\widehat{KJL} = 90^\circ$.

سوف تتعلم:

- تبيان ما إذا كان متوازي الأضلاع مستطيل.
- تبيان ما إذا كان متوازي الأضلاع معين.
- تبيان ما إذا كان متوازي الأضلاع مربع.

معلومة:

كل مضلع رباعي فيه ثلاث زوايا قائمة، تكون الزاوية الرابعة هي الأخرى قائمة، ومن ثمَّ يكون الرباعي مستطيلاً.

5 حالات خاصة: مستطيل، معين، مربّع

صلة الدرس:

درست متوازي أضلاع والآن إذا علمتَ أن شكلاً رباعياً مُفترضاً هو متوازي أضلاع، فكيف تتبيَّن كونه مستطيلاً أو معيناً أو مربعاً؟

انطلاقة نشطة :(من متوازي أضلاع إلى مستطيل)

أولاً: ارسم متوازي أضلاع $ABCD$ على أن تكون $\widehat{ABC} = 90°$.

سيبدو لك $ABCD$ مستطيلاً. أثبت ذلك.

ثانياً:ارسم متوازي أضلاع $ABCD$ على أن يكون $AC = BD$. يبدو $ABCD$ مستطيلاً. أثبت ذلك.

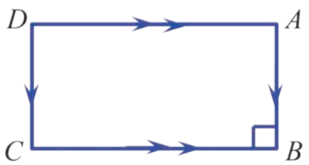
تعلم **(الانتقال من متوازي أضلاع إلى مستطيل) :**

حالة المستطيل

1) إذا كانت إحدى زوايا متوازي أضلاع قائمة، كان مستطيلاً .

في الشكل المرافق: لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع و $\widehat{ABC} = 90°$

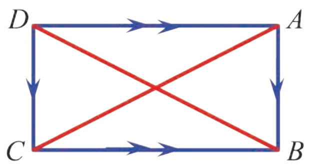
ومنه $ABCD$ مستطيل.



2) إذا تساوى طولا قطري متوازي أضلاع ، كان مستطيلاً .

في الشكل المرافق: لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع و $AC = BD$

ومنه $ABCD$ مستطيل.



تحقق من فهمك

أنشئ مستطيلاً طول قطره $7\ cm$.

انطلاقة نشطة (من متوازي أضلاع إلى معين)

أولاً: ارسم متوازي أضلاع $ABCD$ يحقق $AB = BC$. يبدو $ABCD$ معيناً. أثبت ذلك.

معلومة كل مضلع رباعي تساوت أطوال أضلاعه كان معيناً.

ثانياً: ارسم متوازي أضلاع $ABCD$ قطراه متعامدان.

1. كيف تبدو لك طبيعة هذا الرباعي ؟

2. اشرح لماذا المستقيم (AC) هو محور القطعة $[BD]$ واستنتج أنَّ $AB = AD$ وأنَّ $CB = CD$.

3. بمَ يمكنك أن تسمي متوازي الأضلاع $ABCD$؟ ولماذا؟

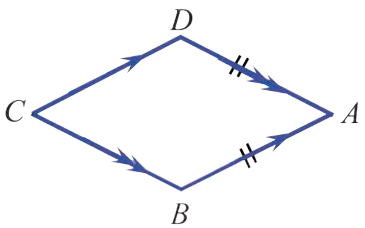
تعلم (الانتقال من متوازي أضلاع إلى معين، مربع) :

حالة المعين

1) إذا تساوى طولا ضلعين متجاورين في متوازي أضلاع، كان معيناً.

في الشكل المرافق: لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع و $AB = AD$

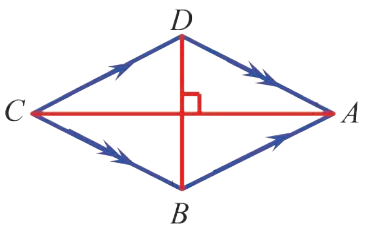
ومنه $ABCD$ معين.



2) إذا تعامد قطرا متوازي أضلاع، كان معيناً.

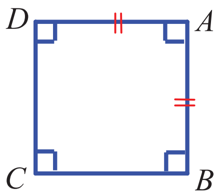
في الشكل المرافق: لدينا $ABCD$ متوازي أضلاع و $(AC) \perp (BD)$

ومنه $ABCD$ معين.



حالة المربع

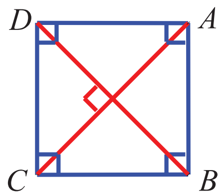
1) إذا تساوى بعدا مستطيل، كان مربعاً.



في الشكل المرافق: لدينا $ABCD$ مستطيل و $AB = AD$

ومنه $ABCD$ مربع.

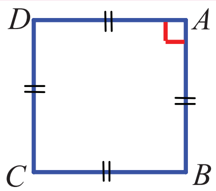
2) إذا تعامد قطرا مستطيل، كان مربعاً.



في الشكل المرافق: لدينا $ABCD$ مستطيل و $(AC) = (BD)$

ومنه $ABCD$ مربع.

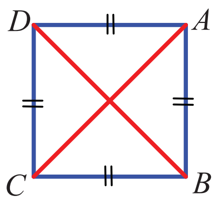
3) إذا كانت إحدى زوايا معين قائمة، كان مربعاً.



في الشكل المرافق:لدينا $ABCD$ معين و $\widehat{ABC} = 90°$

ومنه $ABCD$ مربع.

4) إذا تساوى قطرا معين، كان مربعاً.



في الشكل المرافق:لدينا $ABCD$ معين و $AC = BD$

النتيجة: $ABCD$ مربع.

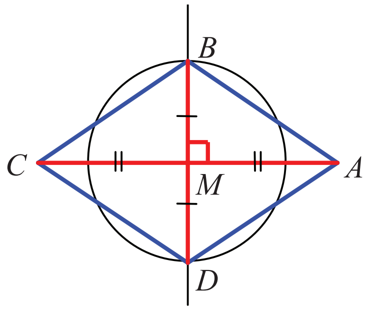
مثال(إنشاء معين علم طولا قطريه):

أنشئ معيناً $ABCD$ على أن يكون قطراه $AC = 6\text{ cm}$ و $BD = 4\text{ cm}$ ، ثم علّل إنشاءك

طريقة الإنشاء:

لإنشاء معين طولا قطريه ℓ و ℓ' ، نرسم قطعتين مستقيمتين بهذين الطولين متعامدتين في منتصفهما ثم نصل بين أطرافهما.

خطوات الإنشاء:



1. نرسم قطعة مستقيمة $[AC]$ بطول $6\,\text{cm}$، ثم نعين منتصفها M.

2. نرسم محور القطعة $[AC]$ ونأخذ عليه نقطتين

B و D بحيث يكون $MB = MD = 2\,\text{cm}$.

3. نصل بين نهايات القطعتين $[AC]$ و $[BD]$

فيكون الرباعي $ABCD$ هو المعين المطلوب.

تعليل الإنشاء:

$ABCD$ مضلع رباعي قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان في M، فهو متوازي أضلاع. ولأنَّ قطريه متعامدان، فهو معين.

ثم إنَّ $AC = 6\,cm$ و $BD = 2 \times 2 = 4\,cm$، إذن $ABCD$ هو المعين المطلوب.

تحقق من فهمك

1. أنشئ معيناً طولا قطريه 6 سم و 4 سم.

2. أنشئ مربعاً طول قطره 6 سم

تدرب

a) أنشئ معيناً $ABCD$ على أن يكون $AC = 5cm$ و $BD = 7cm$، ثم علّل إنشاءك.

b) ارسم دائرة (L) مركزها G، ثم ارسم فيها قطرين متعامدين $[AC]$ و $[BD]$.

1. $ABCD$ متوازي أضلاع. لماذا؟

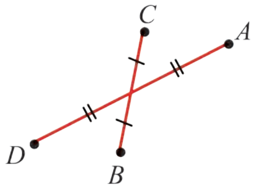
2. $ABCD$ مستطيل. لماذا؟

3. ما نوع الرباعي $ABCD$؟ علِّلْ إجابتك

تمرينات ومسائل

1 اختيار من متعدد

ارسم دائرة حول الإجابة الصحيحة في كلٍّ من الحالات التالية :



1) في الشكل المرسوم جانباً، الرباعي $ABCD$ هو:

a مستطيل b متوازي أضلاع c معين

2) إذا تعامد قطرا متوازي الأضلاع $ABCD$، كان $ABCD$:

a مستطيلاً b مربعاً c معيناً

3) $ABCD$ متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة، فهو:

a مستطيل b معين c مربع

4) $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $AB = BC$، فهو:

a مستطيل b معين c مربع

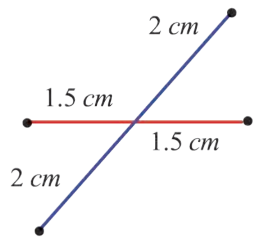
5) $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $AC = BD$، فهو:

a مستطيل b معين c مربع

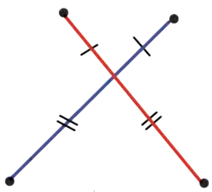
6) $ABCD$ متوازي أضلاع قطراه متعامدان ومتساويان، فهو:

a مستطيل b معين c مربع

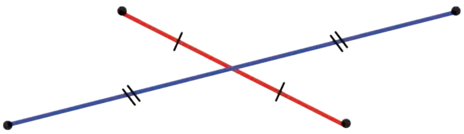
2 رسمنا في كلٍ من الأشكال الثلاثة التالية قطري مضلع رباعي. ارسم دائرة حول كل حالة يكون فيها الرباعي متوازي أضلاع وعلِّلْ إجابتك.



a

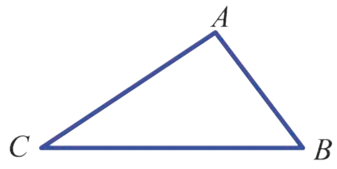


b

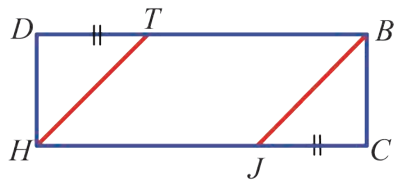


c

3 انقل الشكل المبين جانباً إلى كراسك، ثم أنشئ متوازي الأضلاع $ABCD$ مرة باستعمال خاصة قطريه ، ومرة أخرى باستخدام خاصة ضلعين متقابلين.



4 $BCHD$ مستطيل. T نقطة من القطعة $[BD]$ و J نقطة من القطعة $[CH]$ و $DT = CJ$.



1. ما نوع الرباعي $TBJH$؟ لماذا ؟

2. قارن بين طولي $[TH]$ و $[BJ]$.

5 ABC مثلث، D منتصف $[AC]$.

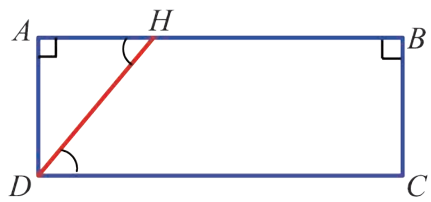
1. ارسم الشكل.

2. ارسم من C المستقيم الموازي للمستقيم (AB) ولتكن H نقطة تقاطعه مع المستقيم (BD).

3. سمِّ نظيرةَ كلٍ من النقطتين A و B بالنسبة إلى النقطة D.

4. استنتج أن الرباعي $ABCH$ هو متوازي أضلاع.

6 في الشكل المجاور :



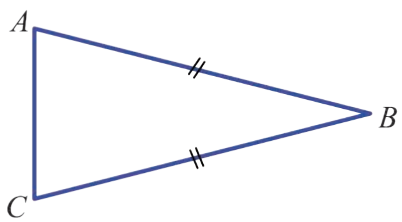
1. $\widehat{CBA} = \widehat{DAB} = 90^\circ$، أثبت أن $(AD) \parallel (BC)$.

2. $\widehat{AHD} = \widehat{HDC}$، أثبت أنَّ $(AB) \parallel (DC)$.

3. **أثبت أنَّ** الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع.

4. هل الرباعي $ABCD$ مستطيل؟ علِّل إجابتك.

7 BAC مثلث متساوي الساقين رأسه B.



1. ارسم الشكل في دفترك.

2. ارسم النقطة C' نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة B.

3. ارسم النقطة A' نظيرة النقطة A بالنسبة إلى النقطة B.

4. أثبت أن الرباعي $AC'A'C$ متوازي أضلاع.

3. أثبت أن $AC'A'C$ مستطيل.

8 أكمل كلاً من العبارات التالية بكتابة رباعي أو متوازي أضلاع.

1. إذا كان قطرا .... متعامدين كان معيناً.

2. إذا كانت أضلاع .... متساوية الطول، كان معيناً.

3. إذا كان ضلعان متجاوران من .... متساويي الطول، كان معيناً.

9 نفِّذْ الإنشاء التالي:

1. ارسم قطعة مستقيمة $[AB]$ بطول $5cm$.

2. عيِّنْ H منتصف القطعة $[AB]$.

3. ارسم القطعة $[CD]$ التي منتصفها H، بطول $5cm$. على أن تكون $\widehat{CHA} = 60^\circ$.

4. ارسم الرباعي $ACBD$.

5. ما نوع الرباعي $ACBD$؟ لماذا ؟

10 أكمل كلاًّ من العبارات الآتية بملء الفراغ :

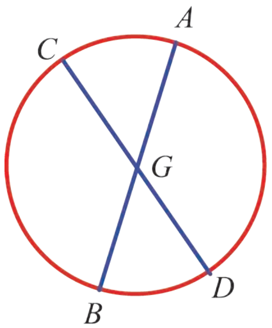
1. كل مستطيل هو ....

2. كل ... هو معيّن.

3. كل معين هو ...

4. كل مربع هو ... وهو ... وهو ...

11 $[AB]$ و $[CD]$ قطران في دائرة مركزها G.



1. لماذا يكون الرباعي $ACBD$ متوازي أضلاع ؟

2. لماذا يكون متوازي الأضلاع $ACBD$ مستطيلاً ؟

3. كيف يؤخذ القطران $[AB]$ و $[CD]$ ليكون الرباعي $ACBD$ مربعاً؟ علِّلْ إجابتك.

12 ABC مثلث.

1. ارسم ABC ثم عيّن النقطة D نظيرة النقطة A بالنسبة إلى المستقيم (BC).

2. إذا كان الرباعي $ABDC$ معيناً، ما نوع المثلث ABC؟

3. إذا كان الرباعي $ABDC$ مربعاً، ما نوع المثلث ABC؟

13

1. ارسم مستطيلاً $ABCD$ مركزه M.

2. عين النقطة H على أن يكون $AMBH$ متوازي أضلاع.

3. ما نوع الرباعي $AMBH$ ؟ علّل إجابتك.

4. ماذا يمكنك أن تقول عن القطعتين المستقيمين $[AB]$ و $[MH]$ ؟ لماذا ؟

14 هل توافق أم لا توافق على صحة كلٍّ من الادعاءات التالية ؟

1. إذا توازى ضلعان في مضلعٍ رباعي كان شبه منحرف.

2. قطرا متوازي الأضلاع متساويا الطول ومتناصفان.

3. إذا كان لمضلع رباعي مركز تناظر كان متوازي أضلاع.

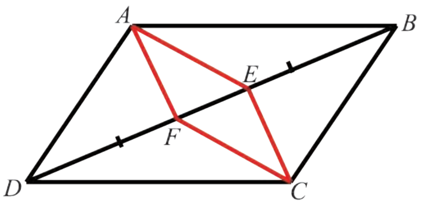
4. قطرا مستطيل هما محورا تناظر له.

15 ABD مثلث، نرمز إلى نظيرة A بالنسبة إلى المستقيم (BD) بالرمز C.

ما نوع الرباعي $ABCD$ في كلٍ من الحالتين الآتيتين:

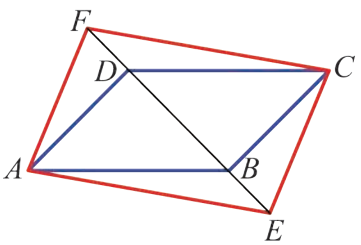
أولاً) المثلث ABD متساوي الأضلاع.

ثانياً) المثلث ABD متساوي الساقين وقائم الزاوية في A.



16 في الشكل المرسوم جانباً : $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $BE = DF$.

أثبت أنَّ $AECF$ متوازي أضلاع.



17 في الشكل المرسوم جانباً:

$ABCD$ متوازي أضلاع فيه $BE = DF$.

أثبت أنَّ $AECF$ متوازي أضلاع.

18 MBC مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه 5cm. A و D نقطتان تجعلان $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه M.

1. ارسم شكلاً.

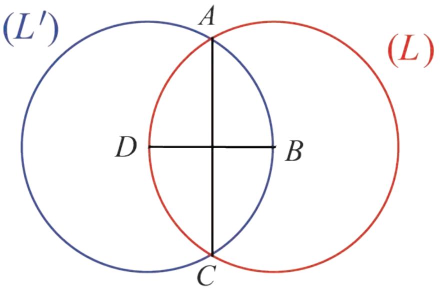
2. أثبت أنَّ $ABCD$ مستطيل.

3. عين M' نظيرة M بالنسبة إلى المستقيم (BC).

4. برهن أن الرباعي $MBM'C$ معيّن.

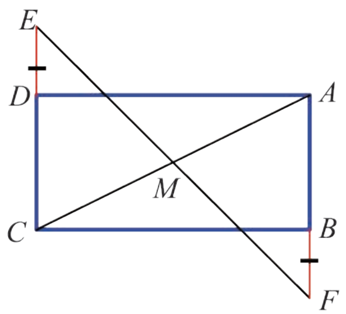
5. عين النقطتين G و H، نظيرتي B و M (على التوالي) بالنسبة إلى النقطة C.

6. أثبت أن الرباعي $MBHG$ مستطيل.



19 (L) دائرة مركزها B وتمر بالنقطة D. (L') دائرة مركزها D وتمر بالنقطة B. تتقاطع الدائرتان في النقطتين A و C.

أثبت أن القطعتين المستقيمتين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتان ومتعامدتان.



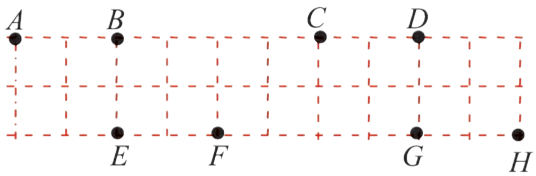
20 في الشكل المرافق: $ABCD$ مستطيل.

E نقطة على نصف المستقيم $[CD)$.

F نقطة على نصف المستقيم $[AB)$.

$DE = BF$ و M نقطة تقاطع القطعتين $[AC]$ و $[EF]$.

أثبت أنَّ $ME = MF$.



21 في الشبكة المرسومة جانباً ثماني نقاط:

A و B و C و D و E و F و G و H.

1. سمِّ مستطيلاً رؤوسه أربعٌ من هذه النقاط.

2. سمِّ عشرة متوازيات أضلاع رؤوس كلٍ منها أربعٌ من هذه النقاط.

3. بكم طريقة يمكنك تغيير موضع A على الشبكة لتحصل على مربع رؤوسهُ أربعٌ من هذه النقاط.

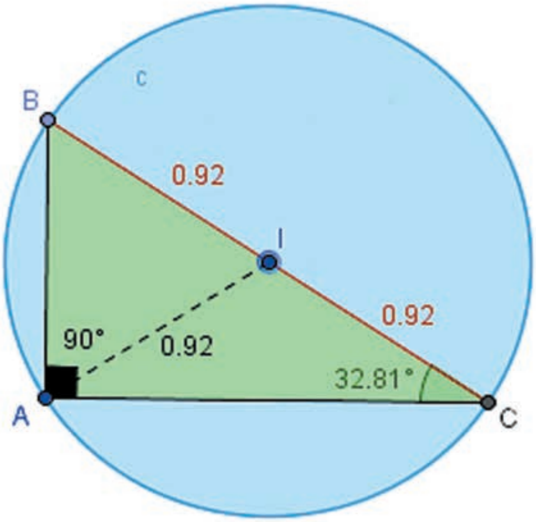
الوحدة الرّابعة:
دائرة مارة برؤوس مثلث
مبرهنة فيثاغورث

1. دائرة مارة برؤوس مثلث قائم

2. مبرهنة فيثاغورث – مبرهنة فيثاغورث العكس

3. مسافة نقطة عن مستقيم

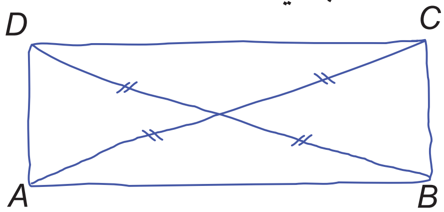
4. مماس دائرة



انطلاقة نشطة

في كلٍ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، ارسم دائرة حولها مبرراً اجابتك:

① الإشارات على الشكل المرافق والمرسوم يدوياً، تشير إلى أنَّ الرباعي $ABCD$ هو .....



① مربع

② مستطيل

③ معين

② المثلث FGH قائم في G، فوتره هو

① FG

② GH

③ HF

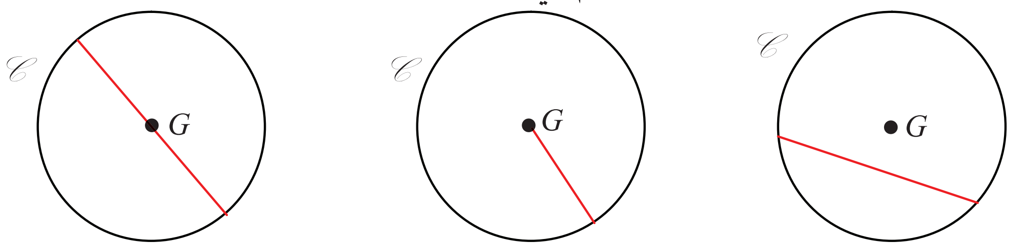
③ مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث هو نقطة تلاقي

① ارتفاعاته

② محاور أضلاعه

③ متوسطاته

④ $\mathscr{C}$ دائرة مركزها G، أحد أقطارها مرسوم في الشكل



①　②　③

⑤ مربع العدد (-7) هو العدد

① -14

② -49

③ 49

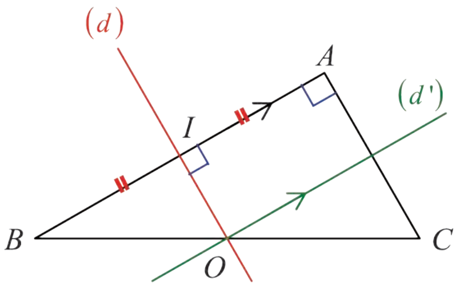
⑥ مربع مساحته $19\ \text{m}^2$ طول ضلعه مقرباً لمنزلتين عشريتين يساوي

① $4.4\ \text{m}$　② $4.36\ \text{m}$　③ $4.3\ \text{m}$

1 دائرة مارة برؤوس مثلث قائم

نشاط « تعرف دور وتر المثلث القائم في الدائرة المارة برؤوسه»

1. **البحث عن الدائرة المرسومة على المثلث القائم**



① ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A.

② ارسم (d) محور ضلعه $[AB]$، فيقطع وتره $[BC]$ في النقطة O. بم نعلل أنَّ O هي منتصف $[BC]$؟

③ ارسم من O المستقيم (d') موازياً المستقيم (AB).
استنتج مركز الدائرة المرسومة على المثلث ABC. اشرح.

④ اكتب الخاصة التي استنتجناها مما سبق.

2. **بالعكس**

① ارسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O وأحد أقطارها $[BC]$.

② وضَعْ نقطةً A على $\mathscr{C}$ تختلف عن B وعن C. كيف يبدو لك المثلث ABC؟

③ وضِعْ على الشكل النقطة A' التي تقابل A قطرياً.

④ هات صفتين لقطري الرباعي $ABA'C$. استنتج بالتالي طبيعة الرباعي $ABA'C$.

⑤ اشرح إذن كيف يمكنك معرفة طبيعة المثلث ABC.

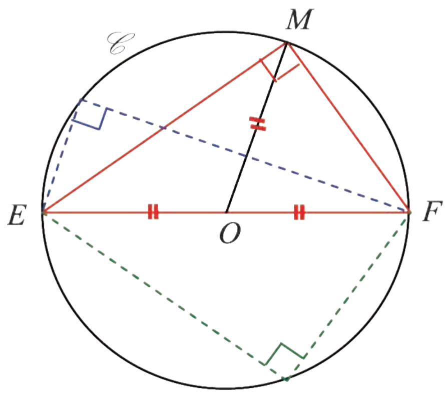
⑥ اكتب الخاصة التي يمكن استنتاجها مما سبق.

تعلم

خواص

1. إذا كان EMF مثلثاً قائم الزاوية في M، كان $[EF]$ قطراً في الدائرة المارة برؤوس المثلث.
2. إذا كان $[EF]$ قطراً في الدائرة المارة برؤوس المثلث EMF، كان EMF قائم الزاوية في M.
3. EMF مثلث والنقطة O هي منتصف $[EF]$. إذا كان EMF قائم الزاوية في M، كان $OM = OE = OF$.
4. EMF مثلث والنقطة O هي منتصف $[EF]$. إذا كان $OM = OE = OF$، كان EMF قائم الزاوية في M.

بصياغة أخرى: إذا كان طولُ متوسطٍ في مثلثٍ يساوي نصف طول الضلع المقسوم به، كان المثلث قائم الزاوية في الرأس الذي رسم منه ذلك المتوسط.



5. $[EF]$ هو وتر المثلث القائم EMF ، فهو قطرٌ في الدائرة $\mathscr{C}$ المارة برؤوسه.

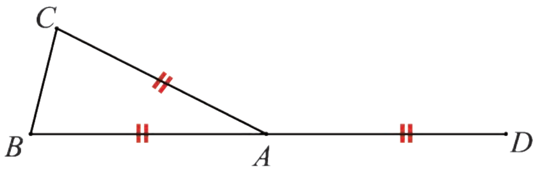
6. النقطة O هي منتصف الوتر $[EF]$ في المثلث EMF القائم في M ، إذن $OM = OE = OF$.

مثال

ABC مثلث متساوي الساقين في A .

D صورة النقطة B وفق التناظر الذي مركزه A .

اشرح لماذا المثلث BCD قائم الزاوية في C .



الحل ABC مثلث متساوي الساقين في A ، إذن

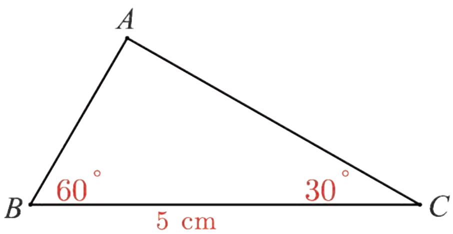
$AB = AC \ldots (1)$

D هي صورة النقطة B وفق التناظر الذي مركزه A ، إذن $AB = AD \ldots (2)$

نستنتج من (1) و (2) أنَّ $AB = AC = AD$. فالمثلث BCD قائم الزاوية في C.

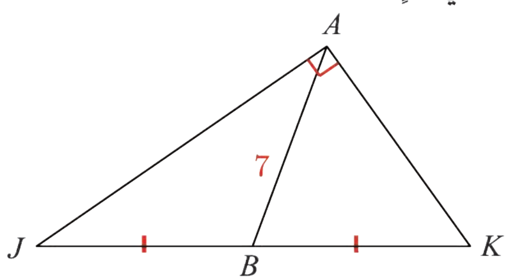
تحقق من فهمك

في الشكل المرافق: عين مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC ؟ وما طول نصف قطرها؟

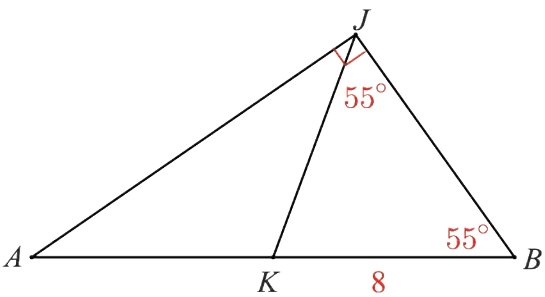


تدرب

① في كلٍ من الحالتين ① و ② احسب الطول JK .

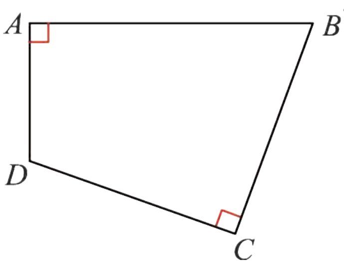


①



②

② في الشكل المرافق: $ABCD$ شكل رباعي زاويتاه $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ قائمتان.



1. ارسم الشكل.
2. اشرح لماذا تقع رؤوسه A و B و C و D على دائرة واحدة.
3. عيّن مركز الدائرة المارة بتلك النقاط ثم ارسمها.

2 مبرهنة فيثاغورث- ومبرهنة فيثاغورث العكس

نشاط

« تعرف مبرهنة فيثاغورث واستعمالها ووضع مبرهنة فيثاغورث العكسية في الخدمة »

1. تجربة ثلاث حالات ومشاهدة

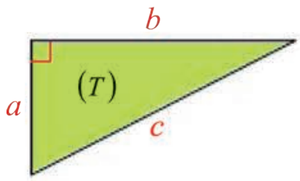
① ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A ، وقس أطوال أضلاعه.

② أكمل الجدول الآتي:

	AB^2	AC^2	$AB^2 + AC^2$	BC^2
حالة أولى				
حالة ثانية				
حالة ثالثة				

③ تأملْ نواتج حساباتك. ماذا تلاحظ ؟

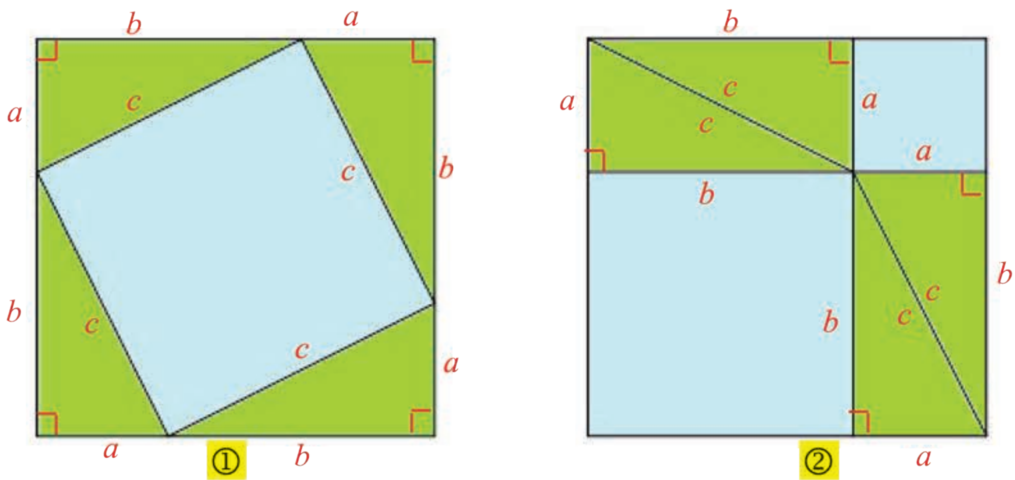
2. إثبات



في الشكل المجاور مثلث قائم (T)، طولا ضلعيه القائمين a و b وطول وتره c.

نرسم مربعين طول ضلع كلٍ منهما يساوي $a + b$

ونحدد على كلٍ منهما أربعة مثلثات مطابقة للمثلث (T)، كما يلي:



1. ما طبيعة كلٍ من الأشكال الرباعية الملونة باللون الأزرق؟

2. اشرح لماذا مساحة الرباعي الملون بالأزرق في الشكل ① تساوي مجموع مساحتي الرباعيين الملونين بالأزرق في الشكل ②.

3. اكتب المساواة التي حصلت عليها في 2. بدلالة a و b و c.

4. اكتب نصاً معبراً عن العلاقة بين أطوال أضلاع مثلث قائم.

1. تجربة

1. أكمل الجدول الآتي:

x	3	4	5	9	12	13	15
x^2							

2. في هذا الجدول، يمكن اكتشاف ثلاث قيم للرمز x، مربع كلٍ منها يساوي مجموع مربعي قيمتين أخريين واردتين فيه. إحدى هذه القيم $x = 5$، لاحظ $5^2 = 3^2 + 4^2$. ما القيمتان الأخريان؟

3. ارسم المثلثات الثلاثة التي تحقق أطوال أضلاعه تلك العلاقة. كيف تبدو طبيعة تلك المثلثات؟

نحو صيغة العكس

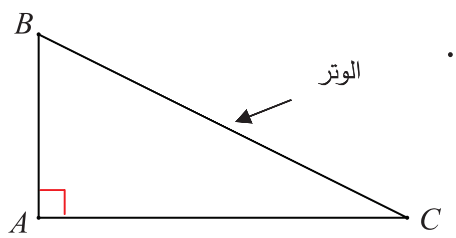
إذا كانت أطوال أضلاع مثلث a و b و c تحقق العلاقة $a^2 + b^2 = c^2$، كان المثلث قائم الزاوية في رأسه المقابل للضلع الذي طوله c.

صغْ نصاً لهذه المعلومة والتي تسمى مبرهنة فيثاغورث العكسية.

تعلم

نص مبرهنة فيثاغورث

مربع الوتر في مثلث قائم، يساوي مجموع مربعي ضلعيه القائمين.



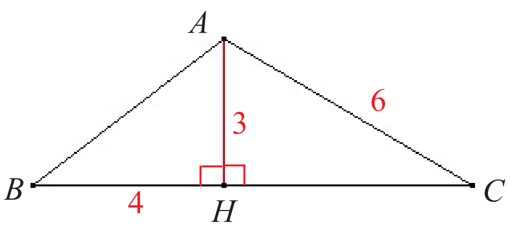
المعطيات		النتيجة
ABC مثلث قائم في A	حسب مبرهنة فيثاغورث	$BC^2 = AB^2 + AC^2$

نتيجة

وتر المثلث القائم هو أطول أضلاعه.

مثال $[AH]$ ارتفاعٌ في المثلث ABC.

استعمل المعطيات المشار إليها في الشكل المرافق



لحساب الطول AB واحسب HC.

إذا علم طولا ضلعين في مثلث قائم، نحسب طول الضلع الثالثة باستعمال مبرهنة فيثاغورث.

الحل

حساب AB:

$(AH) \perp (BC)$، إذن $\widehat{AHB} = 90°$، فالمثلث AHB قائم الزاوية في H.

يمكننا إذن أن نكتب، حسب مبرهنة فيثاغورث:

$AB^2 = AH^2 + HB^2$، إذن $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$، وبالتالي $AB = 5$.

حساب HC:

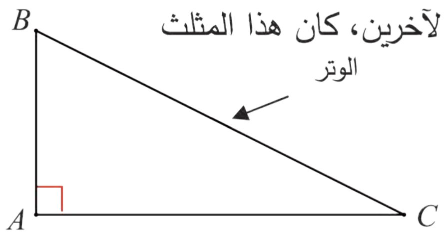
نجد بالمثل أنَّ المثلث AHC قائم الزاوية في H.

فحسب مبرهنة فيثاغورث: $AC^2 = AH^2 + HC^2$، إذن $6^2 = 3^2 + HC^2$، وبالتالي:

$HC^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$. ومنها $HC = \sqrt{27}$.

مبرهنة فيثاغورث العكسية

إذا كان مربع أحد أضلاع مثلث يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين، كان هذا المثلث قائم الزاوية في الرأس المقابل للضلع الأكبر.



المعطيات		النتيجة
ABC مثلث و $BC^2 = AB^2 + AC^2$	حسب مبرهنة العكس ←	ABC قائم في A

مثال في كلٍ من الحالتين الآتيتين، بيّنْ إن كان المثلث ABC قائم الزاوية أم لا. عند الإيجاب ضع خطاً تحترأس الزاوية القائمة وعلّل إجابتك.

① $AB = 40\ \text{cm}$ و $AC = 42\ \text{cm}$ و $BC = 58\ \text{cm}$.

② $AB = 11\ \text{cm}$ و $AC = 9\ \text{cm}$ و $BC = 15\ \text{cm}$.

احسب مربع أطول الأضلاع ثم مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

الحل

① $[BC]$ هو أطول أضلاع المثلث، فإن كان المثلث قائماً، كان A هو الرأس القائم.

$BC^2 = 58^2 = 3364 \quad \ldots (1)$

$AB^2 + AC^2 = 40^2 + 42^2 = 1600 + 1764 = 3364 \quad \ldots (2)$

نجد من (1) و (2) أنَّ $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

فحسب مبرهنة فيثاغورث العكسية، يمكن تأكيد أنَّ المثلث ABC قائم الزاوية في A .

② نحسب مربع طول أطول الأضلاع: $BC^2 = 58^2 = 3364 \quad \dots (1)$

ثم $AB^2 + AC^2 = 40^2 + 42^2 = 1600 + 1764 = 3364 \quad \dots (2)$

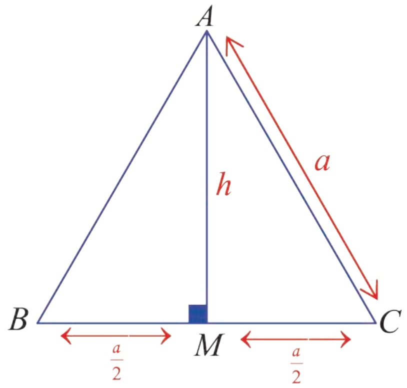
نجد من (1) و (2) أنَّ $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$.

فالمثلث ABC ليس قائماً في A، وبالتالي ليس قائم الزاوية.

اكتساب معارف

كيف نحسب ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع؟

لنفترض وجود مُثلّث متساوي الأضلاع وليكن ABC طول ضلعه a . و AM ارتفاع فيه فهو متوسط أيضاً.



فحسب مبرهنة فيثاغورث:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2$$

$$a^2 = h^2 + \frac{a}{4}^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a}{4}^2 = \frac{3a^2}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$$

إذن: $$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

مثال

مُثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه 4 cm . احسب ارتفاع هذا المُثلّث.

الحل

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm}$$

كيف نحسب مساحة المثلث المتساوي الأضلاع؟

نعلم أن مساحة المثلث تعطى بالعلاقة $S = \frac{a \times h}{2}$.

وباستعمال علاقة حساب الارتفاع السابقة تصبح مساحة المثلث المتساوي الأضلاع كما يأتي

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

مثال

مُثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه 3 cm . احسب مساحة هذا المُثلّث.

الحل

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$$

تحقق من فهمك

① ABC مثلث قائم في A . طولا ضلعيه القائمين: $AB = 5\text{ cm}$ و $AC = 12\text{ cm}$.

1. استعمل مبرهنة فيثاغورث لحساب BC الطول الحقيقي لوتر هذا المثلث.

2. ارسم المثلث ABC حسب معطيات النص، ثم قِسْ طول الوتر $[BC]$ كي تدعم حسابك السابق.

② في كلٍ من الحالتين الآتيتين، بيّن إن كان المثلث ABC قائم الزاوية أم لا.

في حالة الإيجاب، اذكر الرأس القائم واشرح إجابتك.

① $AB = 24\text{ cm}$; $AC = 7\text{ cm}$; $BC = 25\text{ cm}$

② $AB = 4\text{ cm}$; $AC = 7\text{ cm}$; $BC = 5.75\text{ cm}$

③ ABC مثلث متساوي الأضلاع. طول ضلعه 5 احسب مساحة هذا المُثلّث وارتفاعه.

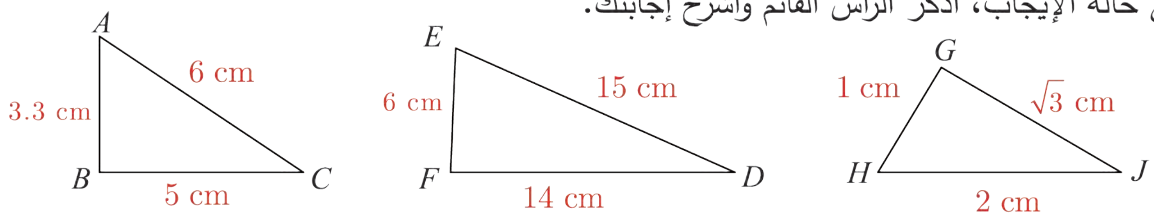
تدرب

① RST مثلث قائم في S . أكمل الجدول الآتي بقيمٍ حقيقية أو بقيم تقريبية لأقرب جزء من مئة:

RT	ST	SR	
	6.5	13.4	①
8.5	4		②
13.7		9.3	③

② في كلٍ من الحالات الآتية، بيّن إن كان المثلث قائم الزاوية أم لا.

في حالة الإيجاب، اذكر الرأس القائم واشرح إجابتك.



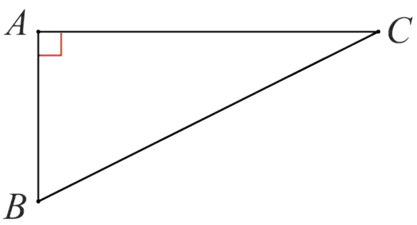
③ ② ①

3 مسافة نقطة عن مستقيم

نشاط

« الاستفادة من مبرهنة فيثاغورث لمعرفة أقرب نقطة من مستقيم معلوم إلى نقطة معلومة »

1. الأطول



1. ABC مثلث قائم في A. اشرح، مستفيداً من مبرهنة فيثاغورث، لماذا BC^2 أكبر من كلٍ من AB^2 و AC^2.

2. ما الضلع الأطول في المثلث القائم؟

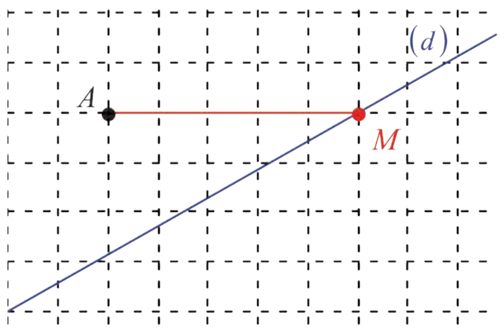
2. الأقصر

A نقطة خارج المستقيم (d).

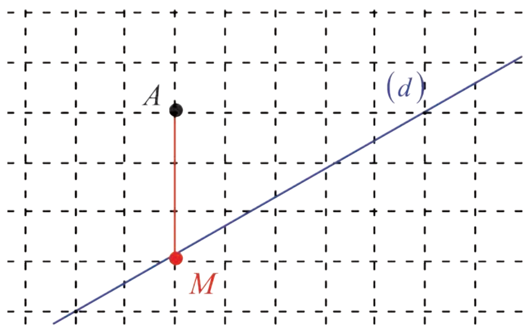
طلب مدرس الصف الثامن من طلابه التعرف إلى أقرب نقطة M من المستقيم (d) عن النقطة A.

رسم طلال الشكل ① ورسمت لمياء الشكل ②.

أيمكن رسم شكل أصح مما رسما؟ استفد من مبرهنة فيثاغورث.



①



②

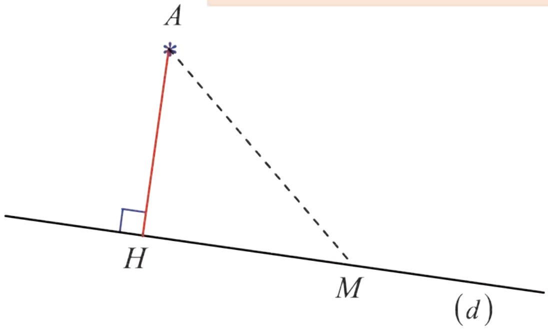
تعلم

خاصة وتعريف

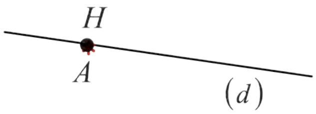
A نقطة خارج المستقيم (d).

- أقرب نقاط (d) من A، هي النقطة H حيث $(AH)\perp(d)$.
- يسمى الطول AH مسافة A عن (d) أو بعدها عنه.

نتيجتان



① إذا كانت $M \in (d)$ و $M \neq H$ ، كان $AH < AM$



② في الحالة الخاصة، إذا كانت $A \in (d)$ ، كان بعد A عن (d) مساوياً الصفر . أي $AH = 0$

اكتساب معارف

كيف نحسب ارتفاع شبه منحرف متساوي الساقين علمت أطوال أضلاعه؟

تذكّر: شبه المنحرف هو شكل رباعي توازى فيه ضلعان فقط. وعند تساوي الضلعين الباقيتين (الساقين) نقول أنه شبه منحرف متساوي الساقين.

مثال

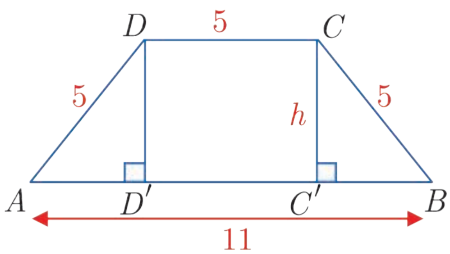
$ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين قاعدتاه $[AB]$ و $[DC]$. فيه $AB = 11$ و $DC = 5$ و $DA = 5$. والمطلوب:

① احسب ارتفاع شبه المنحرف.

② احسب مساحة شبه المنحرف.

الحل

① في الشكل المجاور المثلثين $DDD', BC'C$ طبوقين. علل؟

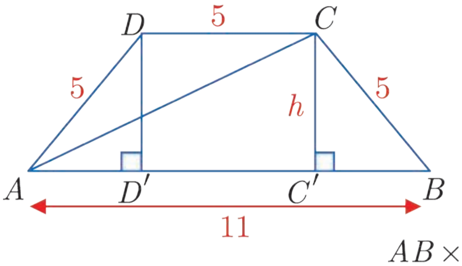


الشكل $DD'C'C$ مستطيل. علل؟

إذن $AD' = C'B = 3$

وبحسب مبرهنة فيثاغورث

$$BC^2 = CC'^2 + C'B^2$$
$$25 = h^2 + 9$$
$$h^2 = 25 - 9 = 16$$
$$h = 4$$



② في الشكل المجاور نرسم القطعة المستقيمة $[AC]$ فتكون مساحة شبه المنحرف ناتج عن مجموع مساحتي المثلثين ABC , ADC وبالتالي:

$$S=\frac{AB\times h}{2}+\frac{CD\times h}{2}=\frac{AB\times h+CD\times h}{2}$$
$$=\frac{AB+CD}{2}h=\frac{11+5}{2}\times 4=32$$

يمكن استعمال القاعدة السابقة لحساب مساحة شبه المنحرف والتي تنص على أن مساحة شبه المنحرف تساوي نصف مجموع القاعدتين مضروباً بارتفاعه

تحقق من فهمك

ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A، وفيه $AB=4\text{ cm}$ و $AC=5\text{ cm}$.

1. ما بعد النقطة B عن المستقيم (AC)؟
2. ما بعد النقطة C عن المستقيم (AB)؟

تدرب

① ارسم مستقيماً (d) ونقطة M تبعد عنه مسافة 3 cm.

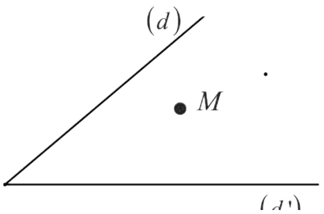
1. ارسم النقطة M_1 صورة النقطة M وفق التناظر الذي محوره (d).
2. ارسم ثلاث نقاط أخرى على بعد 3 cm عن المستقيم (d).
3. أين تقع النقاط التي تبعد عن (d) 3 cm؟

② ارسم مستقيماً (d) وضِعْ عليه نقطةً A.
حدِّدْ موقع النقطة M التي تبعد عن A مسافة 5 cm وعن (d) مسافة 3 cm. اشرح عملك.

③ ABC مثلث فيه $AB=5\text{ cm}$ و $AC=8\text{ cm}$ ومساحته 20 cm^2.

1. ارسم شكلاً يحقق هذه المعطيات وارسم ارتفاعه $[BH]$.
2. احسب بعد B عن المستقيم (AC).
3. احسب بعد C عن المستقيم (AB).

④ ما أقصر مسار للانتقال من نقطةٍ من المستقيم (d) إلى نقطة من المستقيم (d') مروراً بالنقطة M؟ اشرح.



4 مماس دائرة

نشاط

« تعرُّف مفهوم المستقيم المماس لدائرة»

.1 ① ارسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O ونصف قطرها $2\ \text{cm}$ و $[AB]$ قطر فيها.

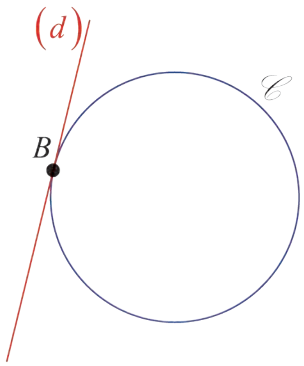
② ارسم ثلاثة مستقيمات (d_1) و (d_2) و (d_3) التي تعامد المستقيم (AB) وتبعد عن O على التوالي $5\ \text{cm}$ و $3\ \text{cm}$ و $0.5\ \text{cm}$.

.2 ① ارسم المستقيم (d) العمودي على (AB) في النقطة B.

② وضِّعْ على المستقيم (d) نقطةً M تختلف عن B.

اشرح لماذا $OM > OB$.

③ استنتج أنَّ المستقيم (d) يشترك مع الدائرة $\mathscr{C}$ بالنقطة B فقط.



معنى الكلمات

القول « المستقيم (d) مماس للدائرة $\mathscr{C}$ »

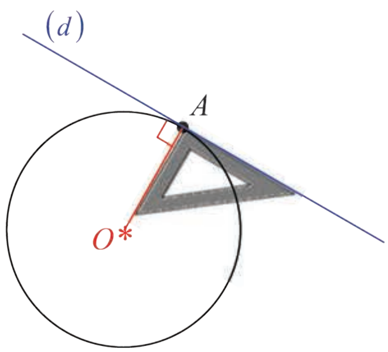
يعني « المستقيم (d) يشترك مع الدائرة $\mathscr{C}$ بنقطة واحدة »

والنقطة المشتركة تسمى **نقطة التماس.**

فيقال إنَّ المستقيم (d) يمس الدائرة $\mathscr{C}$ في تلك النقطة.

تعلم

تعريف



A نقطة من الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O.

مماس الدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة A منها، هو المستقيم (d) المرسوم من A والعمودي على المستقيم (OA).

خاصتان

① بعد مركز الدائرة عن مماس لها يساوي نصف قطرها.

② مماس الدائرة في نقطةٍ A منها، يشترك معها بنقطة واحدة فقط، هي النقطة A.

تحقق من فهمك

$[AB]$ قطعة مستقيمة طولها 4 cm.

1. ارسم هذه القطعة، وارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي قطرها $[AB]$.
2. ارسم مماسي الدائرة $\mathscr{C}$ من A و B.
3. ما الوضع النسبي لهذين المماسين؟ تحقق من إجابتك.

تدرب

① ارسم مثلثاً ABC زاويتاه $\widehat{BAC} = 65^{\circ}$ و $\widehat{ACB} = 25^{\circ}$ وضلعه $AC = 4\text{ cm}$.

1. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها A والمارة بالنقطة B.
2. اشرح لماذا المستقيم (BC) مماس للدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة B.

② ارسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O وارسم قطراً لها وليكن $[AB]$، ثم وضِعْ نقطة M على هذه الدائرة تحقق $\widehat{BOM} = 55^{\circ}$.

1. ارسم (d) مماس الدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة M. لتكن C نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (AB).
2. احسب قياس الزاوية $\widehat{OCM}$.

③ ABC مثلث متساوي الساقين في A، والنقطة M هي منتصف ضلعه $[BC]$.

1. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها A والمارة بالنقطة M.
2. ما وضع المستقيم (BC) بالنسبة إلى الدائرة $\mathscr{C}$؟ برِّرْ إجابتك.

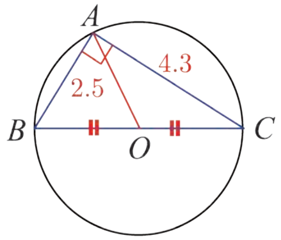
④ 1. ارسم مثلثاً IJK متساوي الساقين في J ويكون $IJ = 5\text{ cm}$ و $\widehat{IJK} = 30^{\circ}$.
2. ارسم المثلث المتساوي الأضلاع JKL خارج المثلث IJK.
3. أثبت أنَّ (IJ) مماس في النقطة J للدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها L ونصف قطرها 5 cm.

⑤ 1. ارسم دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O ووضِّعْ عليها نقطةً A.
2. ارسم باستعمال الفرجار النقطة M على الدائرة $\mathscr{C}$ والتي تحقق $MA = MO$.
3. ارسم باستعمال الفرجار والمسطرة النقطة T نظيرة النقطة O بالنسبة إلى النقطة M.
4. أثبت أنَّ المستقيم (AT) هو مماس الدائرة $\mathscr{C}$ في النقطة A.

يزودك هذا التمرين بطريقة لإنشاء مماس لدائرة مركزها O في نقطةٍ A منها، باستعمال المسطرة والفرجار.

تمرينات ومسائل

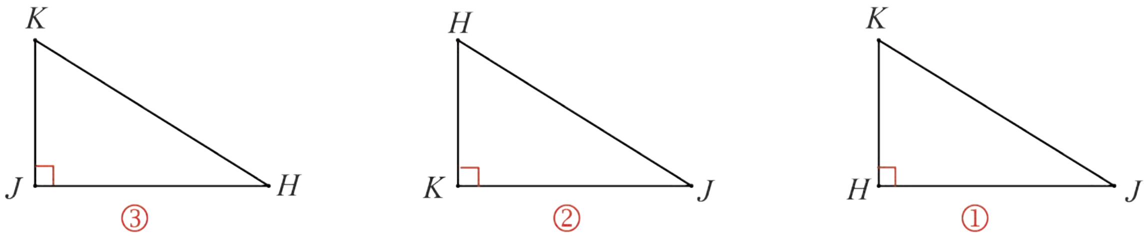
1 **في كل حالة من الحالات الآتية،إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات، ضع خطاً تحتها.**



❶ حسب المعطيات على الشكل المرافق، يمكننا التأكيد على أنَّ :

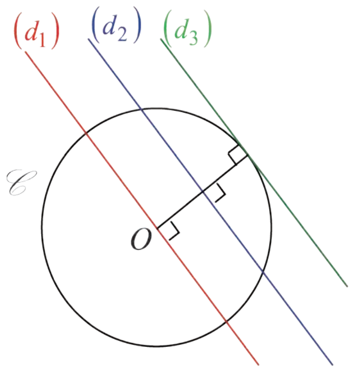
① $BC = 5$. ② $BC = 4.6$. ③ $BA = 2.5$.

❷ المساواة $HJ^2 + JK^2 = KH^2$ صحيحة في المثلث

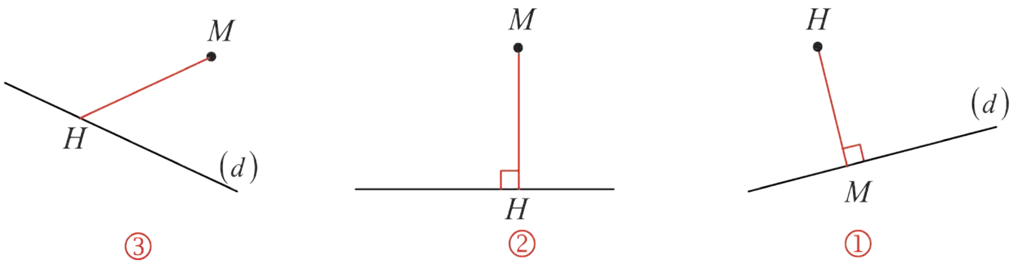


❸ المماس للدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O هو المستقيم

① (d_1) ② (d_2) ③ (d_3)

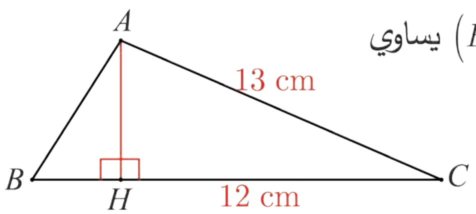


❹ MH هو بعد النقطة M عن المستقيم (d) في الشكل

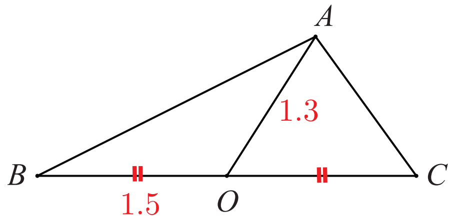


❺ $[AH]$ هو ارتفاع في المثلث ABC، إذن بعد A عن (BC) يساوي

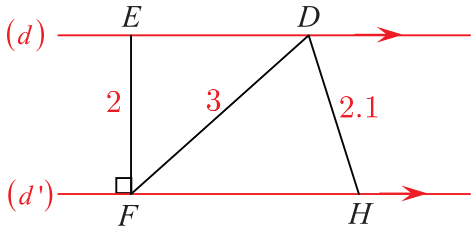
① 6 cm ② 12 cm ③ 5 cm



2 قلْ إن كنت موافقاً أم لا على العبارات الآتية:

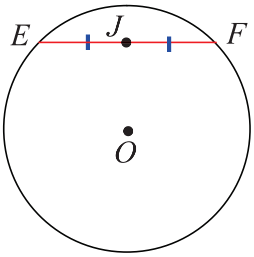


❶ المثلث ABC قائم الزاوية في A.



❷ المستقيمان (d) و (d') متوازيان.
بعد النقطة D عن المستقيم (d') يساوي 2.

❸ ABC مثلثٌ أطوال أضلاعه $AB = 12\text{ cm}$ و $BC = 14\text{ cm}$ و $AC = 12\text{ cm}$.
هذا المثلث قائم ومتساوي الساقين في A.



❹ المستقيم (EF) مماس للدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O والمارة بالنقطة J منتصف $[EF]$.

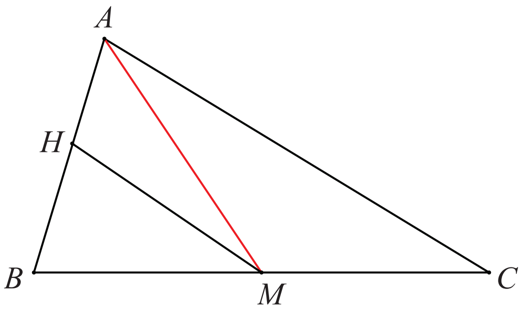
❺ ABC مثلثٌ قائم في A مع $AB = 5\text{ cm}$ و $AC = 6\text{ cm}$، إذن $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
يترتب على ذلك أنَّ $BC = AB + AC = 5\text{ cm} + 6\text{ cm} = 11\text{ cm}$.

❻ ABC مثلثٌ أطوال أضلاعه $AB = 10\text{ cm}$ و $AC = 6\text{ cm}$ و $BC = 8\text{ cm}$.
فالمستقيم (AC) مماس للدائرة التي قطرها $[BC]$.

3 في EFC مثلث، أطوال أضلاعه $EF = 6\text{ cm}$ و $EC = 4\text{ cm}$ و $FC = 8\text{ cm}$.
$[EE']$ و $[FF']$ إثنان من ارتفاعاته.

1. ارسم شكلاً مناسباً.
2. ما مركز الدائرة المرسومة على المثلث $EE'F$؟ وكم هو نصف قطرها؟
3. ما مركز الدائرة المرسومة على المثلث $FF'E$؟ وكم هو نصف قطرها؟
4. اشرح إذن لماذا تقع النقاط E و F و E' و F' على دائرة واحدة.

4 في الشكل المرافق:



ABC مثلث، $[AM]$ أحد متوسطاته.

H نقطة من $[AB]$ تحقق $MH = MB$.

1. ارسم الشكل ورمِّزْ القطع المتساوية.
2. تعرَّف الدائرة المارة برؤوس المثلث HBC.
3. لماذا $[CH]$ ارتفاع في المثلث ABC؟

5 $ABCD$ شكل رباعي فيه $\widehat{D} = 90^o$. E هي صورة النقطة A وفق التناظر الذي مركزه D.

1. ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص.
2. اشرح لماذا المثلث ACE متساوي الساقين في C.

6 E و F و G ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

الدائرة $\mathscr{C}_1$ التي قطرها $[EF]$ والدائرة $\mathscr{C}_2$ التي قطرها $[FG]$ تتقاطعان في H.

1. ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص.
2. ما طبيعة كلٍ من المثلثين EFH و FGH؟ استنتج أنَّ النقاط E و G و H على استقامة واحدة.
3. ما دور المستقيم (FH) في المثلث EFG؟

7 1. ارسم قطعةً مستقيمة $[BC]$ طولها 6 cm.

2. باستعمال الفرجار ومسطرة مدرجة، عين موضعاً للنقطة A ليكون المثلث ABC قائم الزاوية في A ويكون $AB = 4\text{ cm}$. أيوجد أكثر من موضع للنقطة A؟ وضِّحْ.

8 لتكن $\mathscr{C}$ دائرة أحد أقطارها $[MN]$. A نقطة من هذه الدائرة و B صورة M وفق التناظر الذي مركزه A.

1. ارسم شكلاً معبراً عن معطيات النص.
2. ما طبيعة المثلث MAN؟ اشرح.
3. ما دور (AN) في المثلث NMB؟ اشرح.
4. استنتج أنَّ $NM = NB$.

9 JKL مثلث قائم في J. طولا ضلعيه: $JK = 4.5\text{ cm}$ و $KL = 7.5\text{ cm}$.

استعمل مبرهنة فيثاغورث لحساب الطول JL.

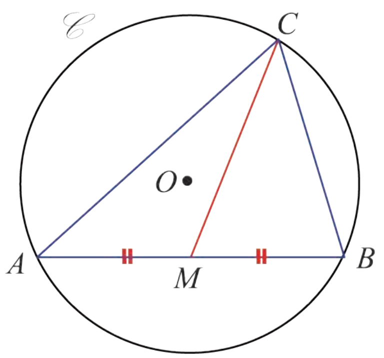
10 طرح مدرس الرياضيات على طلاب الصف الثامن المسألة الآتية: A و B و C ثلاث نقاط من دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O.

النقطة M هي منتصف القطعة $[AB]$ و $AB = 2CM$.

ارسم شكلاً معبراً عن معطيات النص.

رسم عدنان الشكل الذي تراه جانباً.

اشرح لماذا هذا الشكل لا يعبر عن معطيات النص.



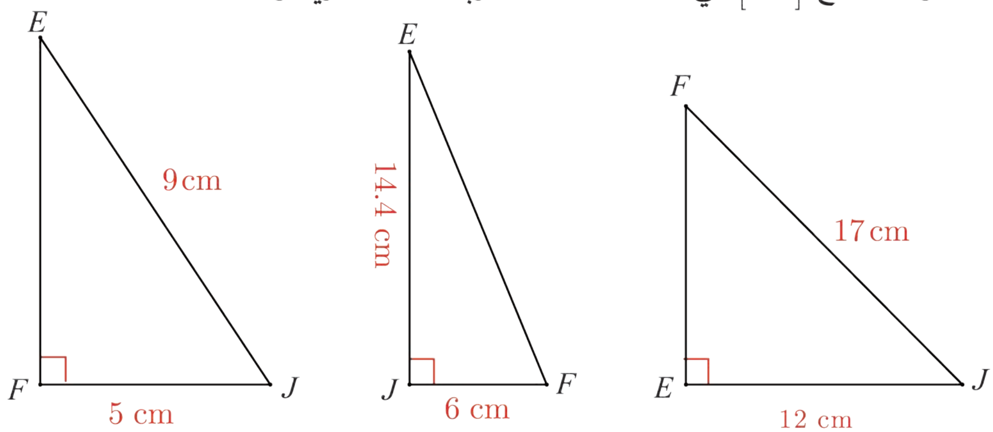
11 E و F نقطتان من نصف دائرة قطرها $[IJ]$.

المستقيمان (IE) و (JF) متقاطعان في K، والمستقيمان (IF) و (JE) متقاطعان في L.

1. ارسم شكلاً معبراً عن معطيات النص، ورمز الزوايا القائمة في الشكل.
2. ما دور النقطة L في المثلث IJK؟
3. لماذا المستقيمان (IJ) و (KL) متعامدان؟

12 في كلٍ من الحالات ① و ② و ② :

احسب طول الضلع $[EF]$ في المثلث EFJ مقرباً لخانة عشرية واحدة.

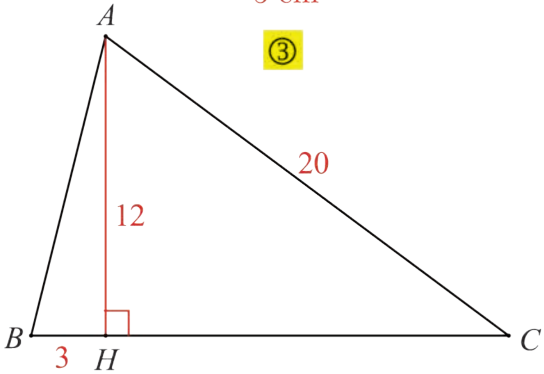


③ ② ①

13 $[AH]$ ارتفاع في المثلث ABC.

استعمل المعلومات المعطاة على الشكل المرافق

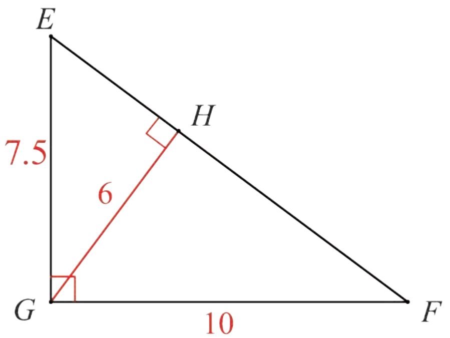
لحساب الطولين AB و HC .



14 EFG مثلث قائم في مثلث قائم في G.

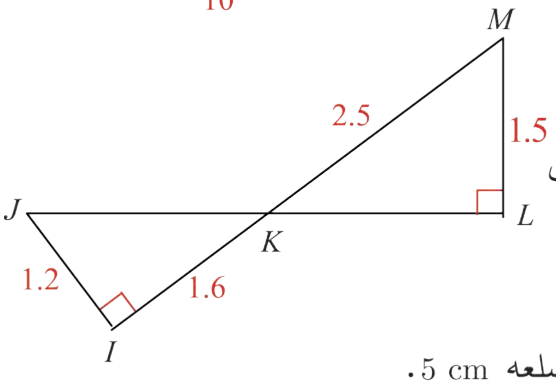
$[GH]$ ارتفاعه المرسوم من G.

1. استعمل المعلومات المعطاة على الشكل لحساب الطولين EF و HF.
2. احسب الطول HE بطريقتين مختلفتين.



15 J و K و L ثلاث نقاط على استقامة واحدة، كذلك النقاط I و K و M.

1. استعمل المعلومات المثبتة على الشكل المرافق لحساب الطولين JK و KL.
2. ما وضع النقطة K بالنسبة إلى القطعة $[JL]$؟



16 1. ارسم مثلثاً متساوي الأضلاع GHK طول ضلعه $5\ \text{cm}$.

2. احسب طول أحد ارتفاعات هذا المثلث مقرباً لخانة عشرية واحدة.

17 $ABCD$ مستطيلٌ، بعداه $AB = 13\ \text{cm}$ و $BC = 9\ \text{cm}$.

1. ارسم هذا المستطيل.
2. احسب نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه مقرباً الجواب إلى لخانة عشرية واحدة.

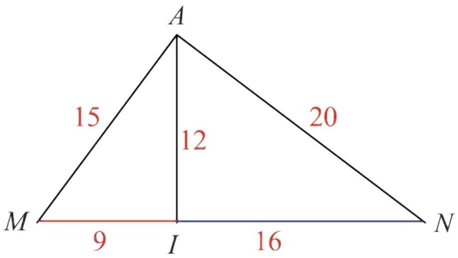
18 $ABCD$ معين مركزه O. $AB = 7.5\ \text{cm}$ و $BD = 4.2\ \text{cm}$.

1. ارسم هذا المعين.
2. احسب AC، ثم احسب مساحة $ABCD$.

19 ABC ، ضلعاه: $AB = 15\ \text{cm}$ و $BC = 18\ \text{cm}$.

النقطة M هي منتصف $[BC]$ مع $AM = 12\ \text{cm}$.

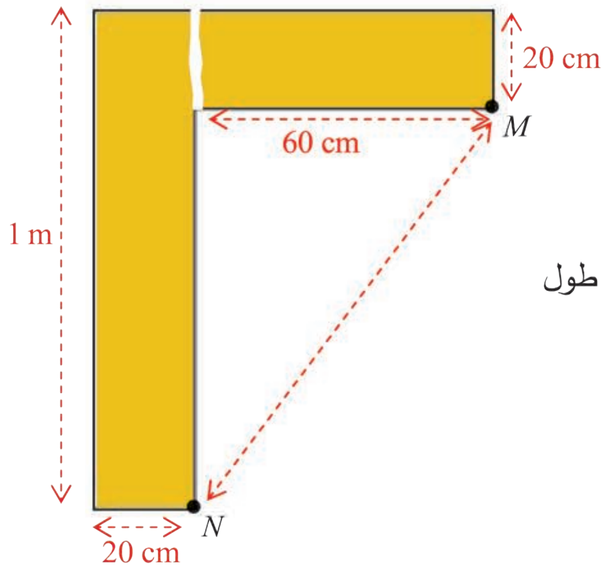
1. ارسم شكلاً يناسب معطيات النص.
2. ما طبيعة المثلث AMB؟
3. استنتج طبيعة المثلث ABC.



20 في الشكل المرافق، النقاط A و M و I و N تحقق $AM = 15$ و $AI = 12$ و $AN = 20$ و $IM = 9$ و $IN = 16$.

1. أثبت أنَّ كلاً من المثلثين AIM و AIN قائم الزاوية.
2. ما الوضع النسبي للنقاط M و I و N؟ استنتج طبيعة المثلث AMN.

21 دعامتان متعامدتان

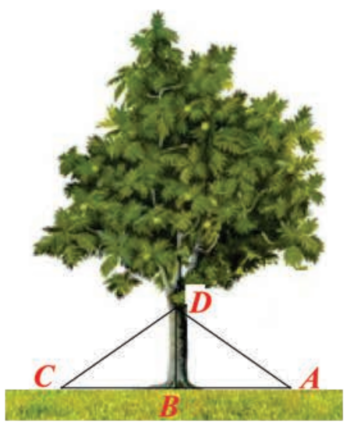


أراد نجارٌ أن يتحقق من تعامد الدعامتين الخشبيتين الممثلتين بالشكل المرسوم جانباً، حيث ثبت على الشكل بعدا كلٍ منهما.

تأكد النجار أنَّ الدعامتين متعامدتان بعد أن قاس طول قطعة مستقيمة.

ما تلك القطعة؟ وكم طولها؟

22 نقل فلاح هذه الشجرة من إحدى الغابات إلى حديقة منزلية لغرسها شاقولياً على أرض مستوية فاستعمل الرابطين $[DA]$ و $[DC]$. طول كلٍ منهما $2.5\ \text{m}$.



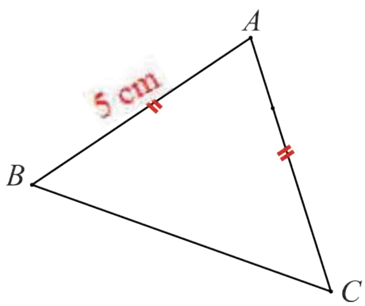
طلب الفلاح من سامر ابن صاحب المنزل، وهو طالب في الصف الثامن، أن يبين له إن كانت الشجرة قد ثبتت شاقولياً أم لا.

قاس سامر الأطوال:

$BA = 2\ \text{m}$ و $BD = 140\ \text{cm}$ و $AD = 2.5\ \text{m}$

1. هل نصبت الشجرة شاقولياً؟ لماذا؟
2. كم يجب أن الطول BD لتصبح الشجرة شاقولية؟

23 ABC مثلث متساوي الساقين في A.

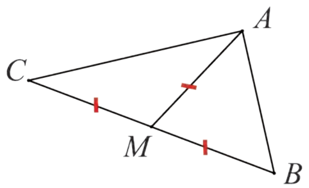


فيه $AB = 5\ \text{cm}$ ومساحته $12\ \text{cm}^2$.

1. احسب بعد C عن المستقيم (AB).
2. أيمكن توقع بعد B عن المستقيم (AC)؟ لماذا؟

لإحراز تقدم

24 عودة إلى مثلث قائم



معلومة

في مثلث ABC، إذا كانت M منتصف $[BC]$ وكان $MA = \frac{1}{2}MB$، كان المثلث ABC قائم الزاوية في A.

1. ارسم مثلثاً EFG متساوي الأضلاع وطول ضلعه $4\ \text{cm}$.
2. ارسم: I نظيرة النقطة G بالنسبة إلى النقطة F، و J نظيرة النقطة F بالنسبة إلى النقطة G، و K نظيرة النقطة F بالنسبة إلى النقطة E.
3. جِدْ على الشكل جميع المثلثات القائمة مع الإشارة إلى الرأس القائم ووتر كلٍ منها.

25 حساب طول

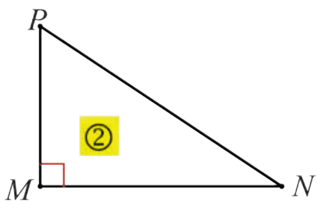
يجب معرفة دور كل من الأطوال الثلاثة في مساواة مبرهنة فيثاغورث.

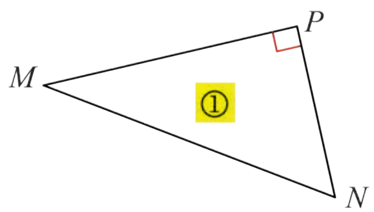
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

BC ← طول الوتر

AB ، AC ← طولا الضلعين القائمين

1. في أيٍّ من المثلثين ① و ② يمكن كتابة $MN^2 = PM^2 + PN^2$؟



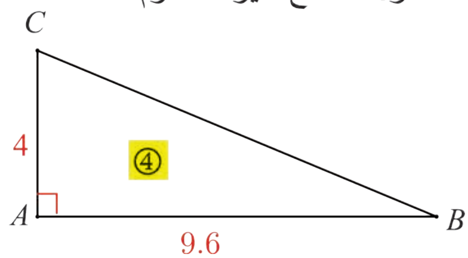


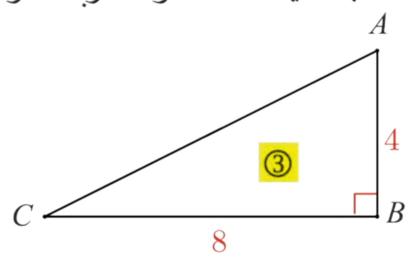
2. في كلٍ من الحالتين ③ و ④:

① ما الرأس القائم في المثلث ABC وما وتره؟

② اكتب مساواة مبرهنة فيثاغورث.

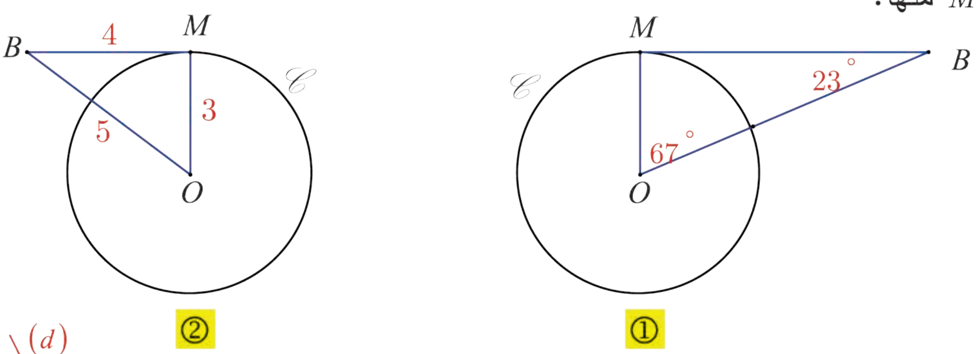
③ احسب القيمة التامة أو المقربة لمنزلة عشرية واحدة لطول الضلع غير المعلوم.

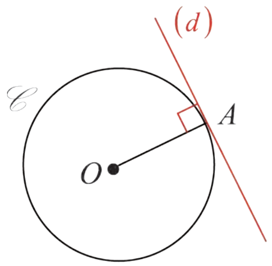




26 مماس دائرة

في كلٍ من الحالتين ① و ② اشرح لماذا المستقيم (BM) مماس للدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O في النقطة M منها.



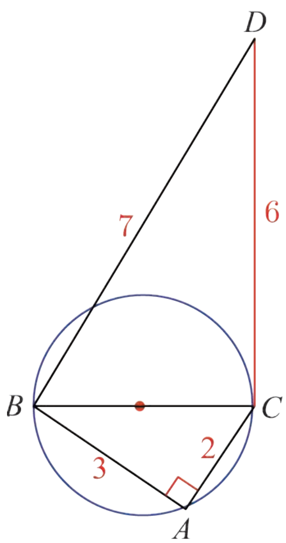


إذا كانت A نقطة من الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O. كان المستقيم (d) العمودي على (OA) في النقطة A مماس للدائرة $\mathscr{C}$.

27 تعلم صياغة نص

اقرأ النص والحل المنجز من قبل أحد الطلاب. ثم حرِّرْ الحل مع الأخذ بمجمل ملاحظات المصحح.

النص



ABC مثلث قائم الزاوية في A، $AB = 3$ و $AC = 2$.

DBC مثلث فيه $DC = 6$ و $DB = 7$.

هل المستقيم (CD) مماس للدائرة التي قطرها $[BC]$؟

حل الطالب، مع ملاحظات المصحح

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$

  $BC^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

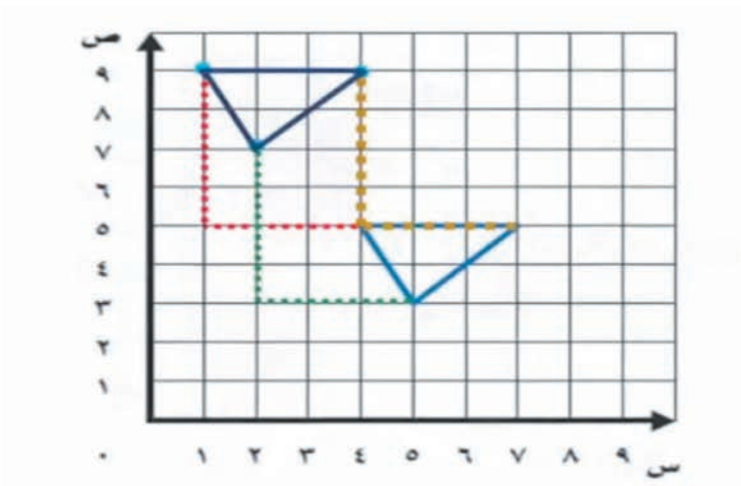
  جيد، ولكن ما الخاصة التي استخدمتها؟ وفي أي مثلث؟
- $BC = \cancel{3.6}$ هذه ليست القيمة الحقيقية.
- في المثلث BCD: $BC^2 + CD^2 = \cancel{3.6^2} + 6^2$ الملاحظة السابقة.
- إذن $\cancel{BC^2} + CD^2 = 48.96$ عوض $BC^2 = 13$ ثم أكمل.
- $BC^2 + CD^2 \neq DC^2$، فالمثلث DCB ليس قائماً في C.

  لأنك لم تعوض بالقيم الحقيقية .
- ~~بالنتيجة، المستقيم (CD) ليس مماساً لهذه الدائرة.~~

الوحدة الخامسة

متوازيات الأضلاع والانسحاب

1. الانسحاب وخواصه
2. صورة نقطة وفق انسحاب
3. صورة شكل وفق انسحاب
4. تطابف المثلثات



انطلاقة نشطة

1. في كلٍ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، ضع خطاً تحتها:

① متوازي الأضلاع $ABCD$ يُقرأ أيضاً:

① $ABDC$

② $ADCB$

③ $DCAB$

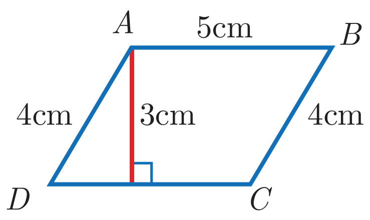
② الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع، فالقطعتان المستقيمتان:

① $[AB]$ و $[CD]$ متناصفتان

② $[AD]$ و $[BC]$ متناصفتان

③ $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتان

③ مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ المرسوم جانباً تساوي:



① $12\ \text{cm}^2$

② $15\ \text{cm}^2$

③ $20\ \text{cm}^2$

④ الرباعي $EFGH$ هو متوازي أضلاع، إذن:

① $EF = HG$ و $EH = FG$

② $EG = HF$

③ $EF = FG$

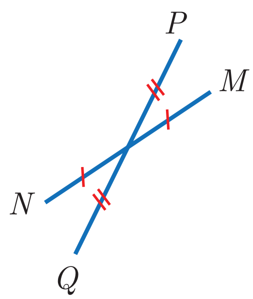
⑤ الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع مركزه O، إذن:

① $OA = OB$

② O هي منتصف $[AB]$

③ O هي مركز تناظر لمتوازي الأضلاع

⑥ القطعتان المستقيمتان $[QP]$ و $[NM]$ متناصفتان، إذن:



① $MNQP$ هو متوازي أضلاع

② $MNPQ$ هو متوازي أضلاع

③ $MPNQ$ هو متوازي أضلاع

⑦ $(AB)\parallel(FE)$ و $(AF)\parallel(BE)$، فالرباعي:

① $AFBE$ هو متوازي أضلاع

② $AEBF$ هو متوازي أضلاع

③ $ABEF$ هو متوازي أضلاع

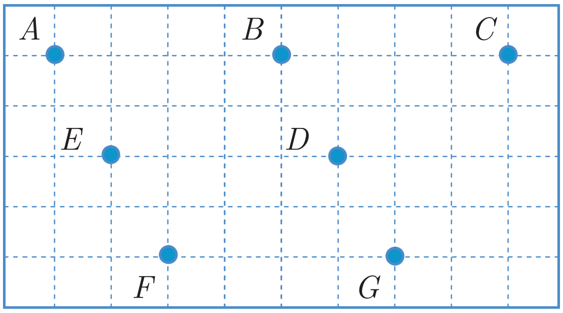
⑧ شكل رباعي محدب فيه ضلعان متقابلان متوازيان متساويان. نستنتج أنّ هذا الرباعي هو:

①مستطيل ② معين ③ متوازي أضلاع

⑨ شكل رباعي محدب $ABCD$ فيه $AB = CD$ و $AD = BC$، نستنتج أنّ هذا الرباعي هو:

①مستطيل ② معين ③ متوازي أضلاع

2. تأمل الشكل المرافق، ثم سمِّ جميع متوازيات الأضلاع التي تؤخذ رؤوسها من النقاط السبعة.



3. $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ دائرتان متمركزتان في O. $[AB]$ قطرٌ في الدائرة $\mathscr{C}$ و $[CD]$ قطر في الدائرة $\mathscr{C}'$
يحقق $\widehat{AOD} = 30^\circ$.

1) ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات المسألة.

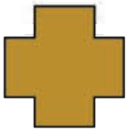
2) أثبت أنَّ الرباعي $ACBD$ هو متوازي أضلاع.

إذا اشتركت دائرتان بمركز واحد، قلنا إنهما متمركزتان.

نرمز للدائرة بالرمز $\mathscr{C}$ وهو الشكل الرسومي للحرف C.

1 الانسحاب وخواصه

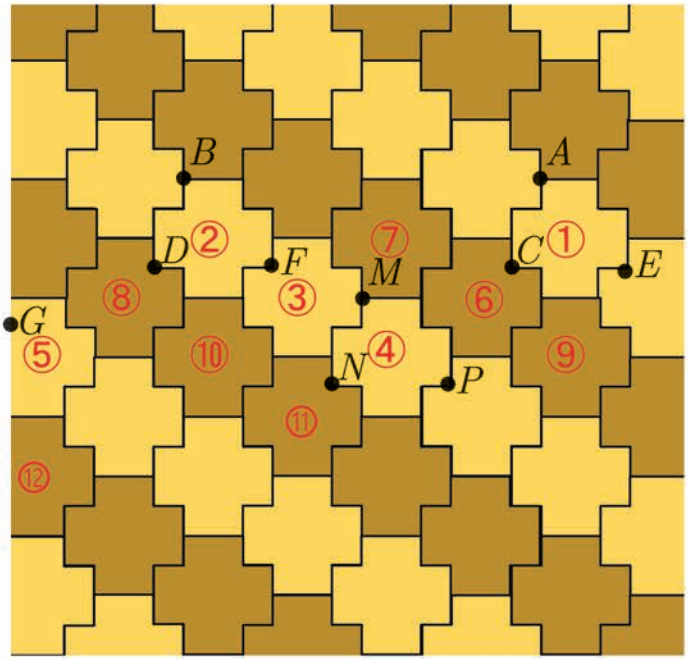
قص الشكل واستعمله في النشاط الآتي



نشاط « نحو مفهوم الانسحاب انطلاقاً من ترصيف »

.1 في أحد أرصفة دمشق

الأسئلة الآتية تسمح بطرح مفهوم الانسحاب وفق مستقيم.



.1 ضع، على ورقة شفافة، قصاصتي الحجر ① والحجر ②. علِّمْ أيضاً النقاط A و C و E، ثم ارسم المستقيمات (AB) و (CD) و (EF).

.2 وفق أية حركة يمكن أن تنتقل قصاصة الحجر ① لتنطبق على قصاصة الحجر ②؟

.3 وفق تلك الحركة، ما النقاط التي تنطبق عليها A و C و E؟ وما المواضع التي تشغلها قصاصتا الحجر ④ و الحجر ⑨؟

.4 ارسم على ورقة شفافة الشكلين الرباعيين $ABDC$ و $ABFE$. ما طبيعة كلٍ منهما؟

نقول إنَّ الحجر ② هو صورة الحجر ① وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B .

.2 انسحاب آخر

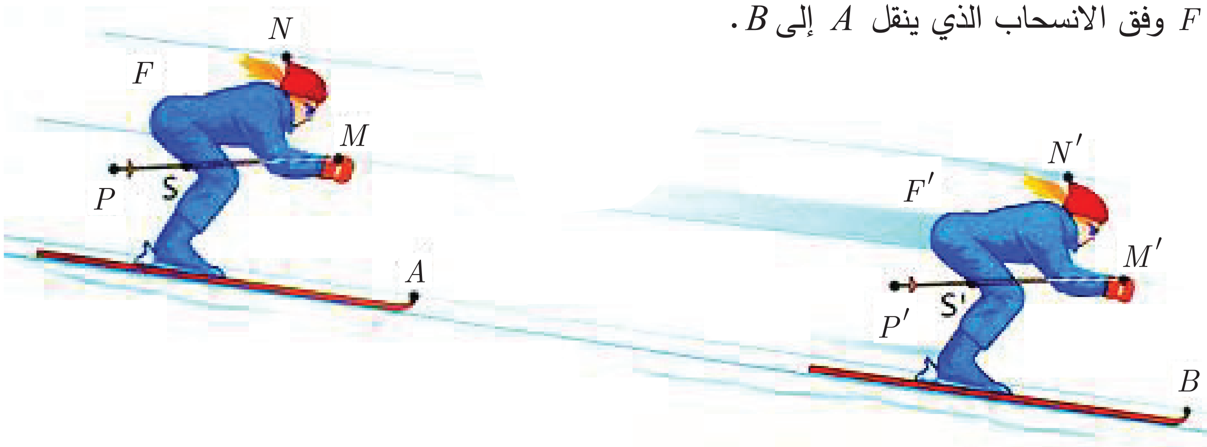
.1 هذه المرة، وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة M .

ما صورة الحجر ①؟ وما صورة الحجر ⑥؟ وما صورة كلٍ من النقطتين C و E؟ وأخيراً، ما صورة الحجر ⑦ ؟

.2 هل يوجد انسحاب ينقل الحجر ⑧ إلى الحجر ⑪ إنْ نعم، ما هو؟

تعلم

عند التزلج من A إلى B، ينطبق الشكل F على الشكل F'. نقول إنَّ الشكل F' هو صورة الشكل F وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.



$(MM') \parallel (AB)$ $(NN') \parallel (AB)$ $MM' = NN' = AB$

خواص الانسحاب

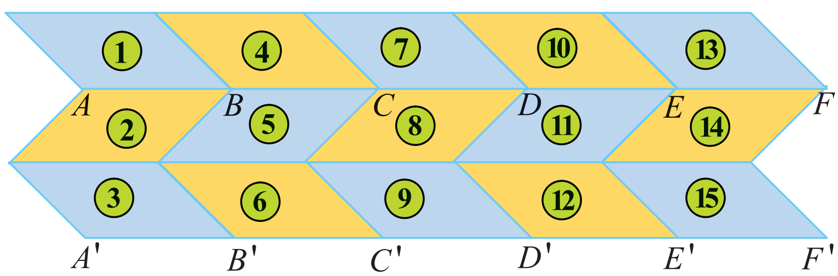
يحافظ الانسحاب على: • الأطوال • الاستقامة • قياس الزوايا • المساحات

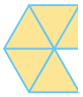
في الصورة السابقة

- M' و N' و P' و S' هي صور النقاط M و N و P و S وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.
- $M'N' = MN$
- النقاط M و S و P على استقامة واحدة، فالنقاط M' و S' و P' على استقامة واحدة.
- $\widehat{S'M'N'} = \widehat{SMN}$
- مساحة المثلث $S'M'N'$ تساوي مساحة المثلث SMN.

تحقق من فهمك

① لدينا في الشكل التالي 15 متوازي أضلاع طبوقة مرقمة من الرقم 1 حتى الرقم 15.

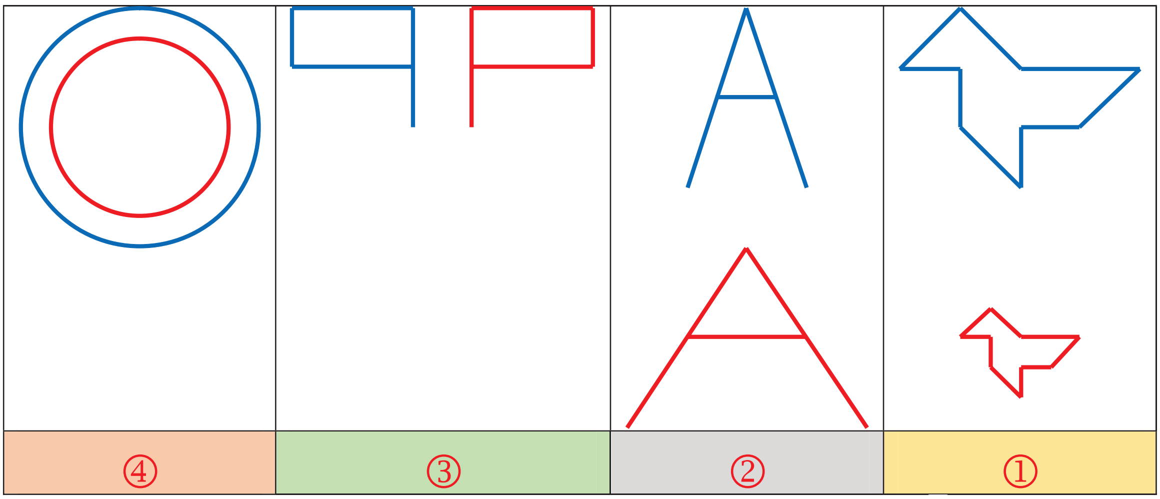




قص الشكل واستعمله في التدرب الآتي

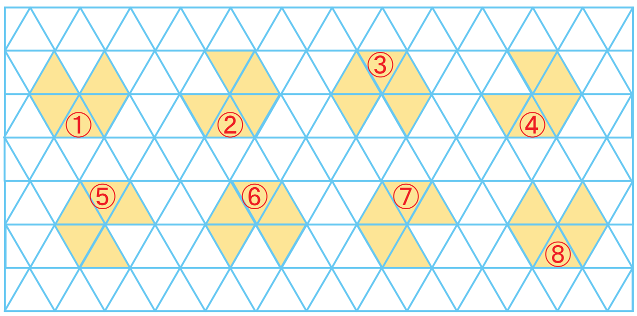
1. ما صورة كل من متوازيي الأضلاع ① و ② وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى D.
2. ما صورة كل من متوازيي الأضلاع ⑮ و ⑪ وفق الانسحاب الذي ينقل F إلى C.
3. ما صورة كل من متوازيي الأضلاع ⑦ و ⑬ وفق الانسحاب الذي ينقل D إلى D'.
4. وفق أي انسحاب ينتقل متوازي الأضلاع ③ إلى متوازي الأضلاع ⑦.
5. وفق أي انسحاب ينتقل متوازي الأضلاع ④ إلى متوازي الأضلاع ⑨.
6. وفق أي انسحاب ينتقل متوازي الأضلاع ⑨ إلى متوازي الأضلاع ⑬.

② اشرح لماذا الشكل الأحمر ليس صورة للشكل الأزرق وفق انسحاب.



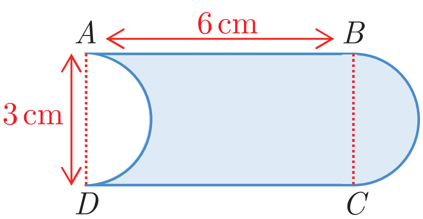
تدرب

① تأمل الشكل التالي:



واذكر رقمي كل شكل وصورته وفق انسحاب.

② تأمل الشكل المرسوم جانباً.

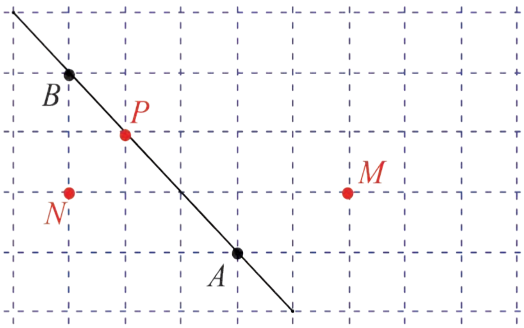


1. ما صورة نصف الدائرة التي قطرها $[BC]$ وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A؟
2. استنتج مساحة المنطقة الملونة باللون الأزرق

2 صورة نقطة وفق انسحاب

نشاط « رسم صورة نقطة وفق انسحاب، باستخدام أدوات هندسية»

.1 على ورقة سنتيمترية



.1 انقل الشكل المرافق إلى ورقة سنتيمترية.
وضِعْ النقطة M' التي تجعل الرباعي

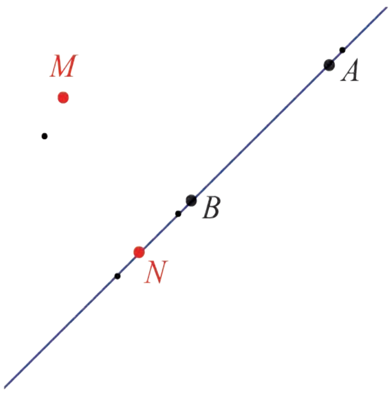
$ABM'M$ متوازي أضلاع.

.2 ما صورة النقطة M وفق الانسحاب الذي
ينقل النقطة A إلى النقطة B؟

.3 وضِّعْ وفق هذا الانسحاب:

① N' صورة النقطة N ② P' صورة النقطة P

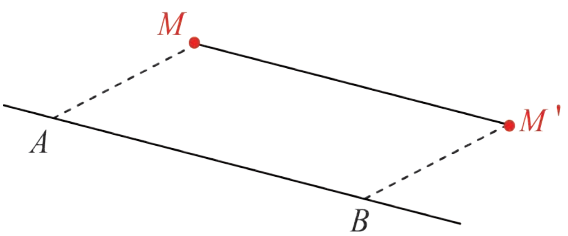
.2 على ورقة بيضاء



.1 انقل الشكل المرافق إلى ورقة بيضاء.

.2 ليكن T الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.
وفق هذا الانسحاب، استعمل الأدوات الهندسية لرسم
النقطة M' صورة النقطة M، والنقطة N' صورة النقطة
N. اشرح العمل الذي قمت به.

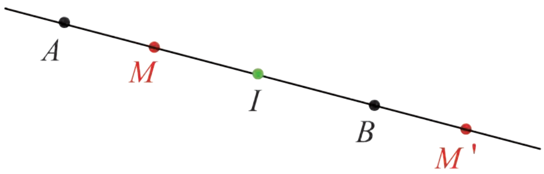
تعلم



تعريف:

القول إنَّ « النقطة M' هي صورة النقطة M التي **لا تنتمي** إلى المستقيم (AB)، وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B » يعني أنَّ « الرباعي $ABM'M$ متوازي أضلاع » ويترتب على ذلك أنَّ القطعتين $[AM']$ و $[BM]$ متناصفتان.

حالة خاصة:



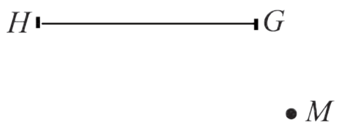
في حالة النقطة M **تنتمي** إلى المستقيم (AB)،
تكون النقاط A و B و M' و M على استقامة واحدة، وكانت القطعتان $[AM']$ و $[BM]$ متناصفتين.

اكتســاب معــارف

كيف نرسم صورة نقطة؟

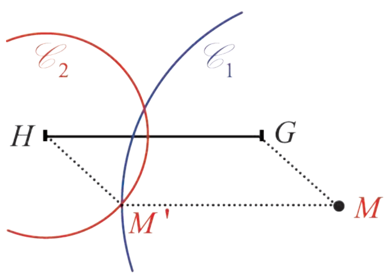
مثال

ارسمْ (مستخدماً الفرجار فقط) النقطة M' صورة النقطة M وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة G إلى النقطة H.



تذكَّرْ: في الإنشاء الهندسي، نستخدم فقط فرجاراً ومسطرةً غير مدرجة.

طريقة الانشاء



- لنكمل HGM إلى متوازي أضلاع $HGMM'$.
- نرسم الدائرة $\mathscr{C}_1$ التي مركزها M و نصف قطرها يساوي GH (فتحة الفرجار)
- نرسم الدائرة $\mathscr{C}_2$ التي مركزها H و نصف قطرها يساوي GM (فتحة الفرجار)
- تتقاطع الدائرتان في نقطتين. نختار النقطة التي تكمل HGM إلى رباعي. فتكون هي النقطة M' صورة النقطة M.

التعليل: $MM' = GH$ (نصف قطر الدائرة $\mathscr{C}_1$)

$HM' = GM$ (نصف قطر الدائرة $\mathscr{C}_2$)

فالرباعي $HGMM'$ متوازي أضلاع، ويترتب على ذلك أنَّ M' هي صورة M.

تحقق من فهمك

في كلٍ من الحالتين الآتيتين، ارسم الشكل الموافق ثم أكمل العبارتين الآتيتين:

1. N هي صورة M وفق الانسحاب الذي ينقل P إلى Q وكانت M لا تقع على (PQ)، إذن .... هو متوازي أضلاع.
2. وفق الانسحاب الذي ينقل J إلى K، R هي صورة T وكانت T لا تقع على (JK)، إذن .... هو متوازي أضلاع.

تدرب

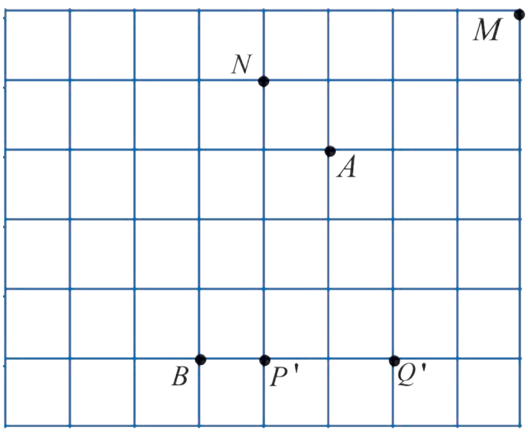
① ارسم مثلثاً ABC، ثم ارسم باستعمال الفرجار:

1. النقطة E، صورة A وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى C.
2. النقطة F، صورة E وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى A.
3. النقطة G، صورة F وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

② ارسم متوازيَ أضلاعٍ $ABCD$ مركزه M، ثم انقل العبارات الآتية إلى دفترك وأكملها:

1. صورة النقطة D وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B هي ...
2. وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى ...، A هي صورة D.
3. وفق الانسحاب الذي ينقل M إلى A، ... هي صورة C.

③ انسخ الشبكة الآتية على صفحةٍ من دفترك:



1. وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B:
   ① وضِّعْ M' صورة M.
   ② وضِّعْ M'' صورة M'.
   ③ وضِّعْ N' صورة N.
2. وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A، وضِّعْ N'' صورة N'.
3. P' هي صورة P وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B. وضِّعْ النقطة P.
4. Q' هي صورة Q وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A. وضِّعْ النقطة Q.

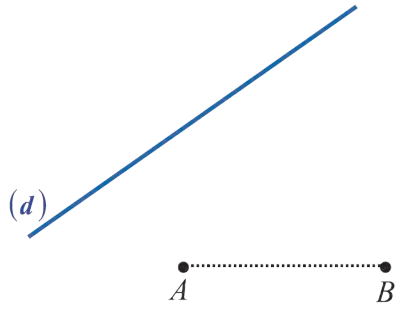
3 صورة شكل وفق انسحاب

نشاط
« رسم صورة مستقيم وفق انسحاب باستعمال أدوات هندسية، وإثبات أنَّ المستقيم وصورته متوازيان»

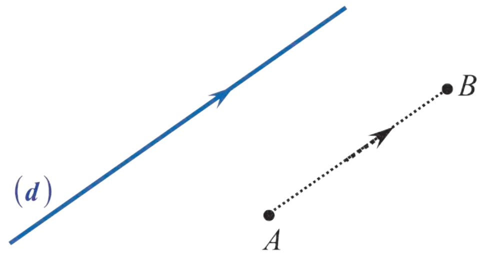
وفق الانسحاب، أي شكل وصورته قابلان للانطباق، فصورة مستقيم هي مستقيم.

.1 تخمين

1. انقل الشكلين التاليين ① و ② إلى صفحة بيضاء. وفي كل حالة، ارسم (d') صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.



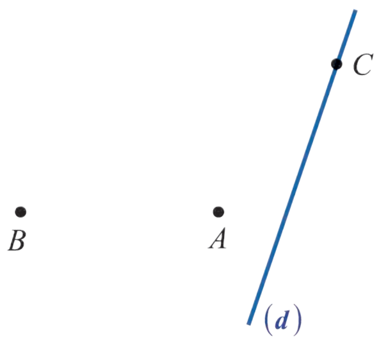
①



②

2. ما وضع المستقيمين (d) و (d') في كل حالة؟

.2 إثبات: حالة (d) و (AB) غير متوازيين



1. انقل الشكل المرافق إلى صفحة بيضاء، ووضِّع E نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (AB).

2. ارسم، وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B:
C' صورة النقطة C من (d) و E' صورة E.

3. لماذا النقطة E' واقعة على المستقيم (AB)؟

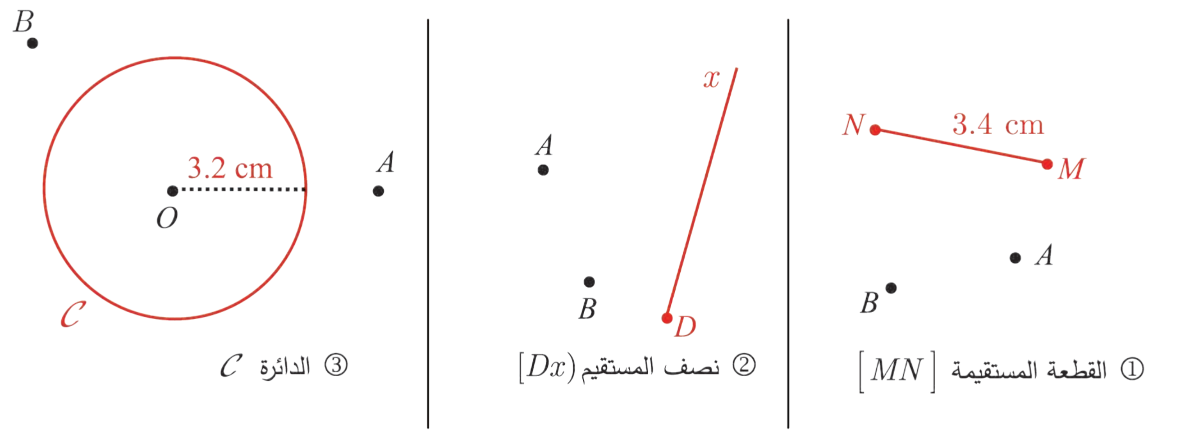
4. لماذا الرباعي $CC'E'E$ هو متوازي أضلاع؟

5. استنتج أنَّ المستقيم (d) وصورته $(C'E')$ متوازيان.

في الرياضيات، وبشكلٍ خاص في الهندسة، لا يجوز استنتاج الإجابة من الشكل، بل يجب أن تتم الإجابة بالبرهان عبر سلسلة من الاستنتاجات.

3. صورة: قطعة مستقيمة، نصف مستقيم، دائرة

انقل الأشكال ① و ② و ③ إلى صفحة بيضاء. وفي كل حالة، ارسم الشكل وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.



تعلم

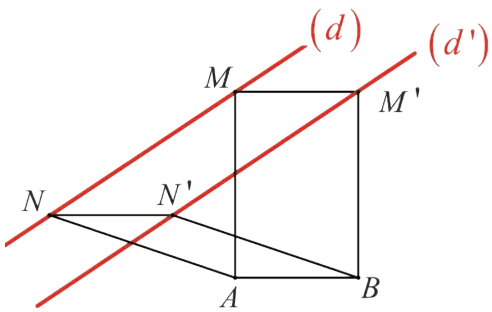
صورة مستقيم

صورة مستقيم (d) وفق أي انسحاب هي مستقيم (d') يوازي (d).

إنشاء صورة مستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B

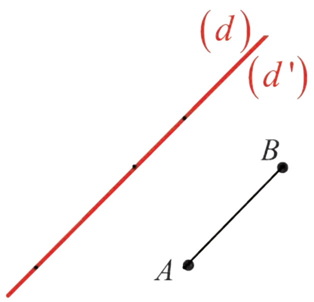
أولاً: حالة (d) لا يوازي (AB):

نختار نقطتين M و N من المستقيم (d) ونرسم صورتيهما M' و N' وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B. فيكون المستقيم (d') المار بالنقطتين M' و N' صورة (d).



ثانياً: حالة (d) يوازي (AB):

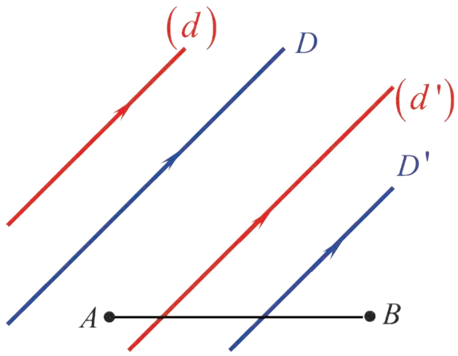
في هذه الحالة، ينطبق المستقيم (d) على المستقيم (d')



- وفق اي انسحاب، صورتا مستقيمين متوازيين هما مستقيمان متوازيان .
- وفق اي انسحاب، صورتا مستقيمين متعامدين هما مستقيمان متعامدان.

في الشكل 1 :

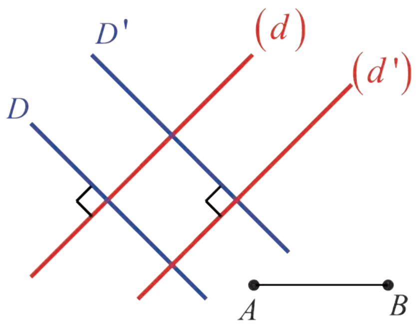
المستقيمان المتوازيان (d') و D' هما على التوالي صورتا المستقيمين المتوازيين (d) و D وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.



1

في الشكل 2 :

المستقيمان المتعامدان (d') و D' هما على التوالي صورتا المستقيمين المتعامدين (d) و D وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

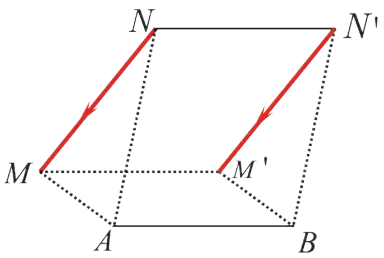


2

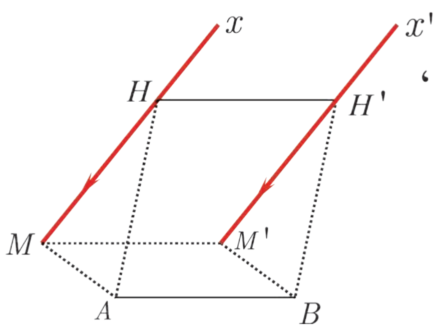
صورة قطعة مستقيمة، نصف مستقيم ، مستقيم ،دائرة

صورة قطعة مستقيمة $[MN]$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، هي قطعة مستقيمة $[M'N']$ توازي $[MN]$.

(M' و N' هما على التوالي صورتا M و N)

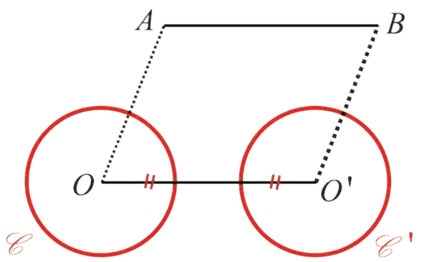


صورة نصف مستقيم $[Mx)$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، هي نصف مستقيم $[M'x')$ يوازي $[Mx)$.



M' هي صورة M و H' هي صورة H، حيث H نقطة غير مميزة من نصف المستقيم $[Mx)$.

صورة دائرة $\mathscr{C}$ مركزها O، وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، هي دائرة $\mathscr{C}'$ مركزها O' هو صورة O وفق هذا الانسحاب، ونصف قطرها يساوي نصف قطر $\mathscr{C}$.



- وفق اي انسحاب، صورة مستطيل F هي مستطيل يطابق F.
- وفق اي انسحاب، صورة مثلث $\mathcal{R}$ هي مثلث يطابق $\mathcal{R}$.

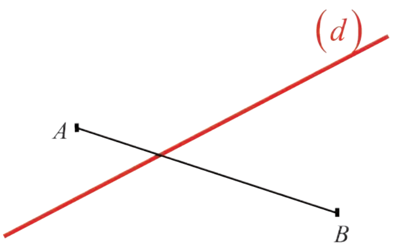
اكتساب معارف

كيف نرسم صورة مستقيم وفق انسحاب؟

لرسم صورة مستقيم وفق انسحاب، نرسم صورتي نقطتين منه (باستعمال الفرجار)، ثم نرسم المستقيم المار بهاتين النقطتين.

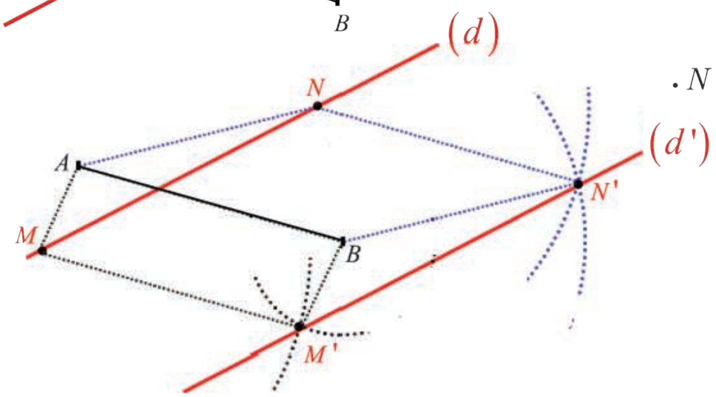
مثال

انقل الشكل المرافق إلى ورقة بيضاء، ثم ارسم المستقيم (d') صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.



الحل

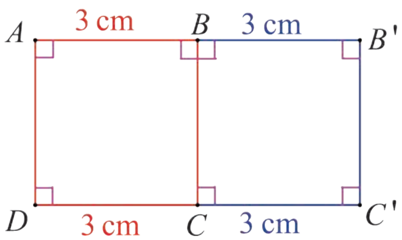
- نضع على المستقيم (d) النقطتين M و N.
- نرسم M' و N' صورتي M و N باستعمال الفرجار.
- نرسم المستقيم $(M'N')$، وهو المستقيم المطلوب (d').



كيف نستعمل خواص الانسحاب في إنشاءٍ هندسي؟

مثال

$ABCD$ مربع طول ضلعه 3 cm. ارسم هذا المربع على صفحة بيضاء، ثم ارسم صورته وفق الانسحاب الذي ينقل D إلى C. تحقق مما أنشأت.



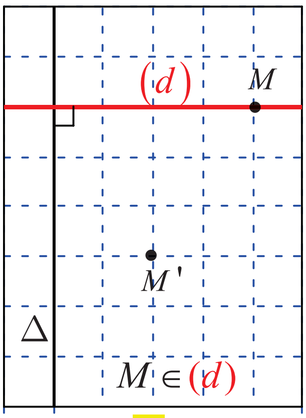
الحل وفق هذا الانسحاب:

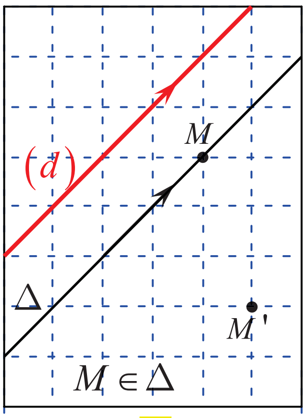
- صورة النقطة A هي النقطة B وصورة النقطة D هي النقطة C. فصورة القطعة $[AD]$ هي $[BC]$.
- نرمز إلى صورة B بالرمز B' وإلى صورة C بالرمز C'.
- الانسحاب يحافظ على الزوايا و $\widehat{BAD} = 90°$، إذن $\widehat{B'BC} = 90°$.
 كما أنَّ $\widehat{ADC} = 90°$ ، إذن $\widehat{BCC'} = 90°$.
- الانسحاب يحافظ على الأطوال و $AB = DC = 3\text{ cm}$، إذن $BB' = CC' = 3\text{ cm}$.

بهذا يكون المربع $BB'C'C$ صورة المربع $ABCD$ وفق هذا الانسحاب.

تحقق من فهمك

انقل الشكلين ① و② إلى دفترك، وعلى كلٍ منهما:





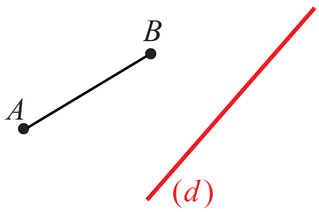
1. ارسم صورتي المستقيمين (d) و Δ. وفق انسحاب من M إلى M' .
2. أكمل كلاً من العبارتين الآتيتين:

 ① صورتا مستقيمين متوازيين وفق أي انسحاب هما ....

 ② صورتا مستقيمين متعامدين وفق أي انسحاب هما ....

تدرب

① تأمل الشكل المرسوم جانباً:



1. انقل الشكل إلى دفترك.
2. استعمل فرجاراً ومسطرةً غير مدرجة لرسم (d') صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.
3. ارسم (d'') صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A.

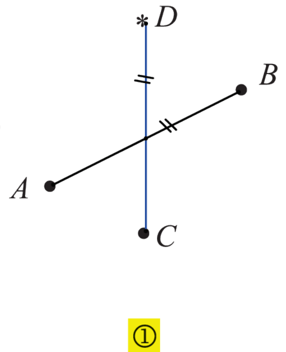
4. ما يمكن قوله بما يتعلق بالمستقيمين (d') و $(d")$.

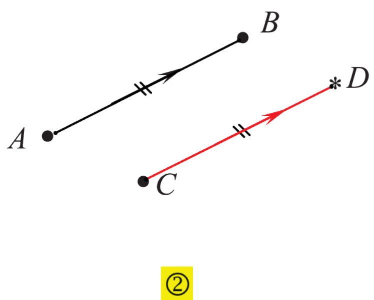
② ABC مثلث قائم الزاوية في B، فيه $BA = 4\text{ cm}$ و $BC = 6\text{ cm}$.

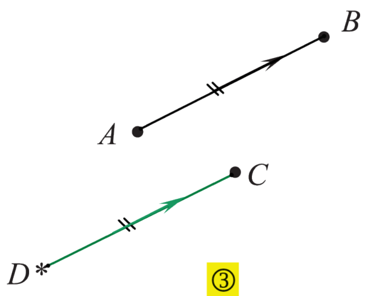
1. ارسم هذا المثلث مستعملاً الفرجار ومسطرة غير مدرجة.
2. وضِّعْ النقطة E على الضلع $[BA]$ بحيث يكون $BE = 2\text{ cm}$.
3. ارسم صورة القطعة $[EB]$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى C وسمِّها $[E'B']$.
4. اشرح ما يمكنك قوله بما يتعلق بالمستقيمين (AB) و $(E'B')$.
5. ما طول القطعة $[E'B']$؟ اشرح إجابتك.

③ ارسم مستطيلاً $ABCD$ بعداه $AB = 3\text{ cm}$ و $AD = 2\text{ cm}$، ثم ارسم صورة هذا المستطيل وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A. اشرح خطوات عملك.

④ رسم كل من عدنان وغسان وكنان النقطة D، صورة النقطة C وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A. مستعملين الطول نفسه للقطعة $[CD]$.





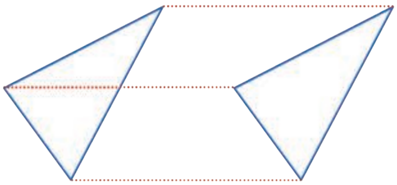


فإذا كان غسان الوحيد الذي رسم D بشكلٍ صحيح:

1. أي الأشكال الثلاثة هو رسمه؟
2. ما الخطأ في كلٍ من الشكلين الآخرين؟

4 تطابق المثلثات

نشاط « اكتشاف حالات تطابق المثلث انطلاقاً من الانسحاب»

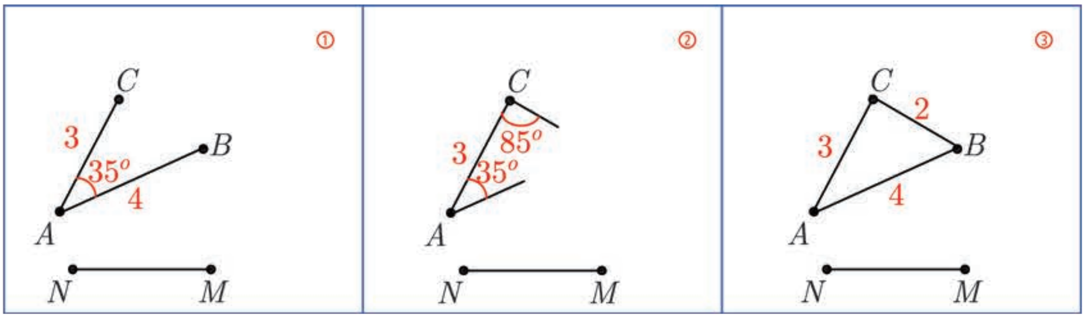


وفق الانسحاب، أي شكل وصورته قابلان للانطباق،

فصورة مثلث هي مثلث طبوق عليه.

1. حالات تطابق مثلثين.

نقل الأشكال ① و ② و ③ إلى صفحة بيضاء. وفي كل حالة، ارسم صورة الشكل وفق الانسحاب لذي ينقل النقطة N إلى النقطة M .



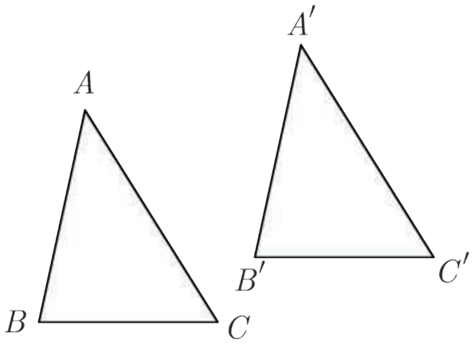
2. في كل من الحالتين ① و ② أكمل الشكل لتحصل على المثلث ABC ثم أكمل صورة هذا لمثلث.

3. في كل من الحالات ① و ② و ③ ما هي صورة المثلث ABC ولماذا؟

4. إذن هل يمكنك ذكر الحالات التي يمكن من خلالها أن تحصل على مثلث طبوق على مثلث معلوم؟

تعلم

تعريف



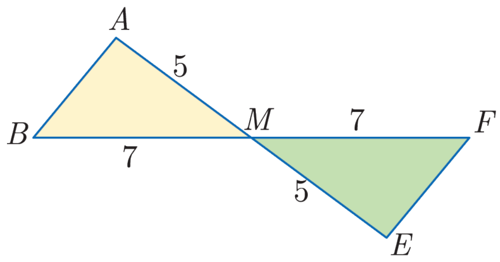
تطابق مثلثان إذا تساوت عناصر أحدهما مع العناصر المقابلة ها في المثلث الآخر

عناصر المثلث هي أطوال الاضلاع وقياسات زواياه.

حالات تطابق مثلثين

① يتطابق مثلثان في حال تساوي طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما من المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.

مثال



في الشكل المجاور:

نلاحظ أن $\widehat{EMF} = \widehat{AMB}$ للتقابل بالرأس

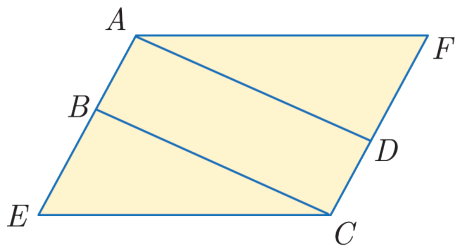
وكذلك $BM = MF = 7$ و $AM = ME = 5$

فالمثلثان AMB , EMF طبوقان لتساوي طولي ضلعين

وقياس الزاوية المحصورة بينهما من المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.

② يتطابق مثلثان في حال تساوي طول ضلع وقياسي الزاويتين المجاورتين لها من المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.

مثال



$AECF$ متوازي أضلاع و $ABCD$ مستطيل.

$AB = DC$ لتساوي كل ضلعين متقابلتين في المستطيل.

$FD = BE$ لأن كل منهما هو طول ضلع متوازي أضلاع

مطروحاً منه طول ضلع مستطيل وهاتين الضلعين متقابلتين.

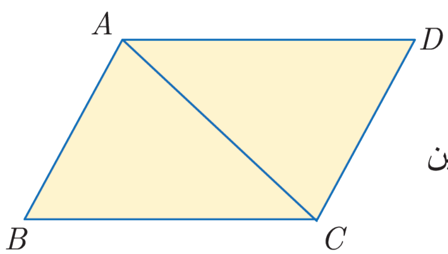
$\widehat{F} = \widehat{E}$ لتساوي كل زاويتين متقابلتين في متوازي أضلاع.

وكذلك $\widehat{CBE} = \widehat{FDA} = 90^o$. فالمثلثان FDA , BEC طبوقان لتساوي طول ضلع وقياسي الزاويتين

المجاورتين لها من المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.

③ يتطابق مثلثان في حال تساوي أطوال أضلاع المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.

مثال



$ABCD$ متوازي أضلاع.

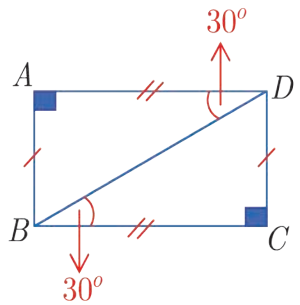
$[AC]$ ضلع مشتركة للمثلثين ACD , ACB.

وكذلك $AB = CD$ و $AD = BC$ لتساوي كل ضلعين متقابلتين

في متوازي الأضلاع.

فالمثلثان ACD , ACB طبوقان لتساوي أطوال أضلاع المثلث الأول مع مقابلاتها في المثلث الآخر.

تحقق من فهمك

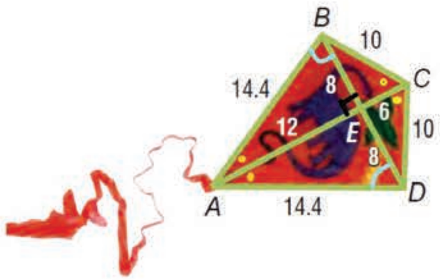


في الشكل المجاور:

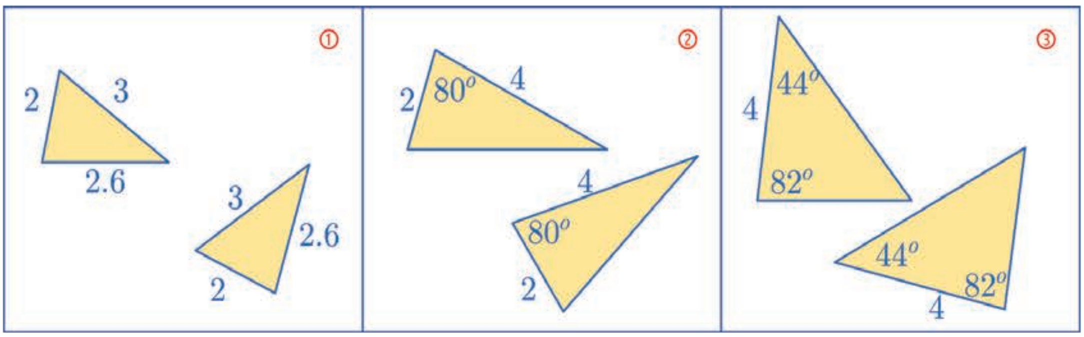
باستعمال كل من حالات التطابق الثلاثة، برهن أن المثلثين طبوقان.

تدرب

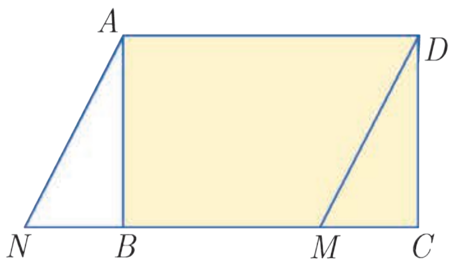
① لاحظ الطائرة الورقية، هل يمكنك تحديد أزواج المثلثات الطبوقة في هذا الشكل.



② في كل حالة، علل تطابق المثلثين



③ $ANMD$ متوازي أضلاع و $ABCD$ مستطيل.

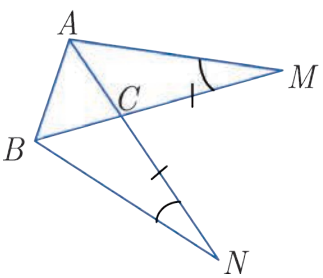


1. أثبت تطابق المثلثين MCD, ANB.

2. حدد صورة المثلث ANB وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة N إلى النقطة M.

3. استنتج تعليلاً آخر لتطابق المثلثين MCD, ANB.

④ في الشكل المجاور:



1. أثبت تطابق المثلثين MCA, NCB.

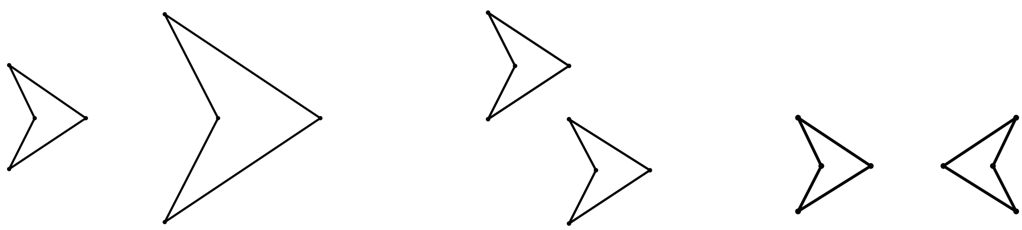
2. أثبت تطابق المثلثين MBA, NAB.

3. استنتج نوع المثلث CBA.

تمرينات ومسائل

1 لكل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات. ضع خطاً تحتها.

❶ نجد الشكل وصورته وفق انسحاب في الحالة:



③ ② ①

❷ P نقطة غير واقعة على المستقيم (RS)، Q هي صورة P وفق الانسحاب الذي ينقل R إلى S.

إذن:

① $RSPQ$ هو متوازي أضلاع. ② $PQRS$ هو متوازي أضلاع. ③ $RSQP$ هو متوازي أضلاع.

❸ $MNPQ$ متوازي أضلاع، فوفق الانسحاب الذي ينقل M إلى Q:

① P هي صورة Q ② صورة P هي N ③ P هي صورة N.

❹ مساحة شكلٍ F تساوي $15\ \text{cm}^2$، فمساحة F' صورة هذا الشكل وفق انسحابٍ:

① غير معلومة ② تساوي $30\ \text{cm}^2$ ③ تساوي $15\ \text{cm}^2$.

❺ ABC مثلث قائم، فصورته، وفق أي انسحاب، هي:

① مثلث كيفي ② مثلث متساوي الأضلاع ③ مثلث قائم.

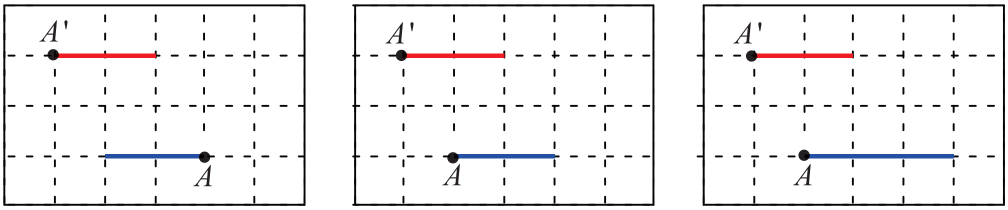
❻ المستقيمان (d) و (AB) غير متوازيين، فصورة (d)، وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، هي مستقيم:

① يوازي (d) ② يوازي (AB) ③ يمر بالنقطة B.

❼ (d) و (d') مستقيمان متقاطعان في A، وصورتاهما، وفق انسحابٍ r، هما مستقيمان متقاطعان في B، إذن r هو:

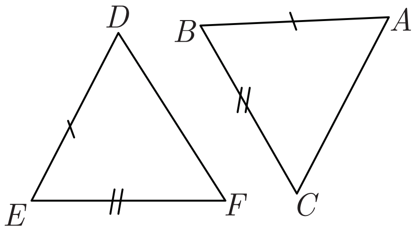
① الانسحاب الذي ينقل A إلى B. ② أي انسحاب ③ الانسحاب الذي ينقل B إلى A.

❽ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى A'، تكون القطعة المستقيمة الملونة باللون الأحمر صورة القطعة الملونة باللون الأزرق في الشكل:



① ② ③

❾ في الشكل المجاور. ABC , DEF مثلثان طبوقان، عندئذ



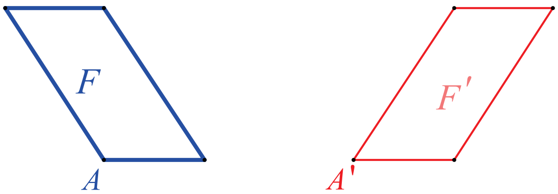
① $\widehat{A}=\widehat{E}$ ② $\widehat{A}=\widehat{F}$ ③ $\widehat{A}=\widehat{D}$.

❿ الدائرة $\mathscr{C}'$ هي صورة الدائرة $\mathscr{C}$ وفق انسحاب، فالدائرتان $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$:

① نصفا قطريهما متساويان ② متحدتان بالمركز ③ غير متقاطعتين.

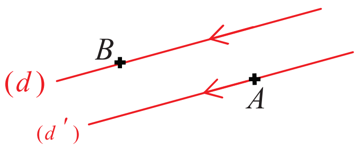
2 هل أنت موافق أم لا على ما يرد في النصوص الآتية؟ اشرح إجابتك.

❶ الشكل F' هو صورة الشكل F وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى A'.



❷ $ABCD$ متوازي أضلاع، إذن: وفق الانسحاب نفسه، تنتقل B إلى A و D إلى C.

❸ في الشكل المرافق، المستقيم (d') هو صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.



❹ (d) و (d') متوازيان. انسحاب واحد فقط ينقل (d) إلى (d').

❺ (d) و (d') مستقيمان متقاطعان. لا يوجد أي انسحاب ينقل (d) إلى (d').

❻ المستقيم (BM') هو صورة المستقيم (AM) وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.
إذن M' هي صورة M وفق هذا الانسحاب.

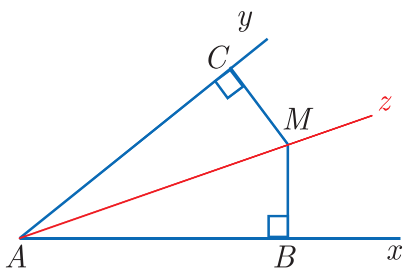
❼ القطعة المستقيمة $[BM']$ هي صورة القطعة $[AM]$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B،
إذن M' هي صورة M وفق هذا الانسحاب.

❽ $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ دائرتان نصفا قطريهما متساويان. انسحاب واحد فقط ينقل $\mathscr{C}$ إلى $\mathscr{C}'$.

❾ B هي صورة A وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى A، إذن B هي نظيرة C بالنسبة إلى A

3

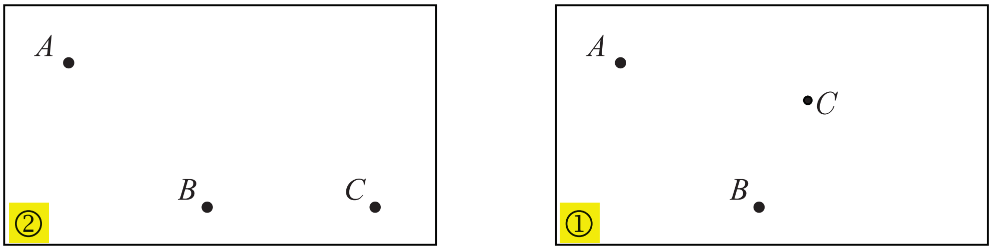
في الشكل المجاور، فيه $\widehat{xAz}=\widehat{yAz}$.



1. أثبت أن المثلثان AMC, ABM طبوقان.
2. استنتج أن $CM = MB$.

4

في كلٍ من الشكلين ① و ① ثلاث نقاط A و B و C.



انقل الشكل إلى صفحة بيضاء وأكمل في كل حالة متوازي الأضلاع $ABCD$.

5

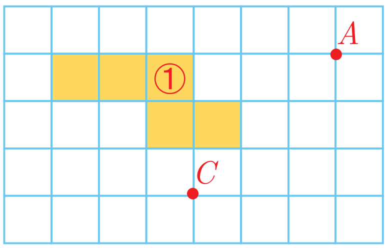
AOB مثلث متساوي الساقين في O. C و D هما نظيرتا A و B على التوالي.

1. ارسم شكلاً يحقق معطيات المسألة.
2. أثبت أنَّ الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع.

نقول إنَّ المثلث AOB متساوي الساقين في O، عندما تكون O نقطة تقاطع ضلعيه المتساويين.

6

تأمل الشكل المرسوم جانباً:



1. انقل هذا الشكل إلى صفحة سنتيمترية.
2. ارسم صورة الشكل ① ولتكن الشكل ② وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى C.
3. استعمل الانسحاب ذاته لرسم صورة الشكل ② وارمز لهذه الصورة بالرمز ③.
4. ممَّ تكون قد تحققت؟

7

في معلمٍ متجانس:

1. وضِّعْ النقاط $A(-2,0)$ و $B(2,3)$ و $M(4,1)$.
2. وضِّعْ صورة النقطة M واكتب إحداثييها:

① وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

② وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A.

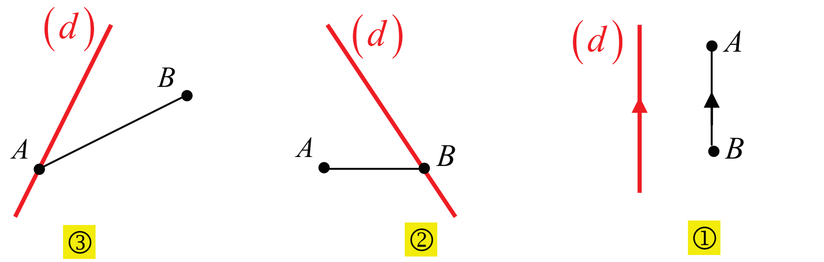
8 REC مثلث قائم الزاوية في R.

النقطة A هي صورة E وفق الانسحاب الذي ينقل R إلى C.

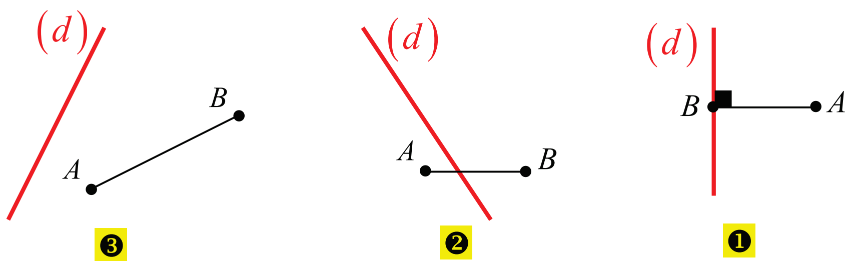
1. ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات المسألة.
2. ما طبيعة الرباعي $REAC$ ؟ اشرح إجابتك.
3. وازن بين طولي $[EC]$ و $[RA]$. اشرح إجابتك.

9 ارسم، في كل حالة، صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى النقطة B.

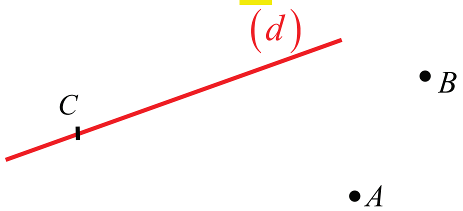
(1



(2

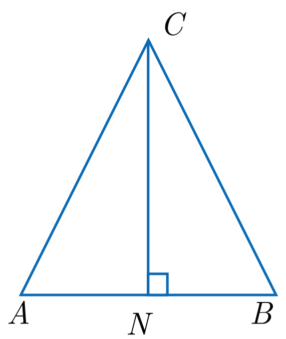


10 في الشكل المرسوم جانباً، C نقطة من المستقيم (d)



1. انقل هذا الشكل إلى دفترك.
2. ارسم C' صورة النقطة C وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى A.
3. باستعمال الفرجار، ارسم (d') صورة المستقيم (d) وفق ذلك الانسحاب. اشرح عملك.

11 مع مثلث متساوي الساقين



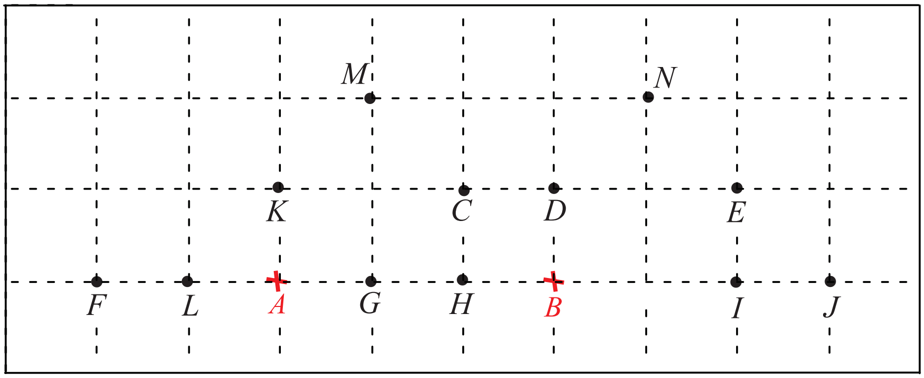
في الشكل المجاور، ABC مثلث متساوي الساقين.

1. أثبت أن المثلثين CBN, CNA طبوقان.
2. استنتج أن $AN = NB$.
3. هل $\widehat{ACN} = \widehat{NCB}$ ولماذا.

12 ارسم مستقيماً ماراً بنقطتين U و V ونقطةً J لا تنتمي إليه.

1. ارسم (Δ) صورة المستقيم (UV) وفق الانسحاب الذي ينقل V إلى J.
2. ارسم (d) صورة المستقيم (UV) وفق التناظر الذي مركزه J.
3. هل المستقيمان (Δ) و (d) متوازيان؟ اشرح إجابتك.

13 تأمل الشكل الآتي:



1. وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، ما صورة:

① النقطة C؟ ② النقطة F؟ ③ النقطة H؟ ④ النقطة M؟

2. وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، ما النقطة التي:

① صورتها D؟ ② صورتها I؟ ③ صورها H؟

حدد وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B، مثلثين طبوقين

14 1. ارسم، باللون الأسود، مستطيلاً $ABCD$ بعداه $AB = 2\text{ cm}$ و $AD = 4\text{ cm}$.

2. ارسم:

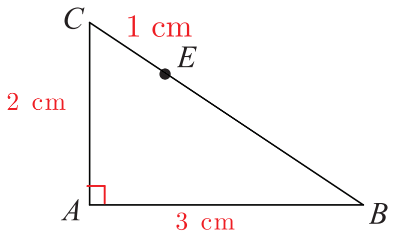
① باللون الأزرق، صورة المستطيل $ABCD$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

② باللون الأحمر، صورة المستطيل $ABCD$ وفق الانسحاب الذي ينقل D إلى A.

③ باللون الأخضر، صورة المستطيل $ABCD$ وفق الانسحاب الذي ينقل B إلى D.

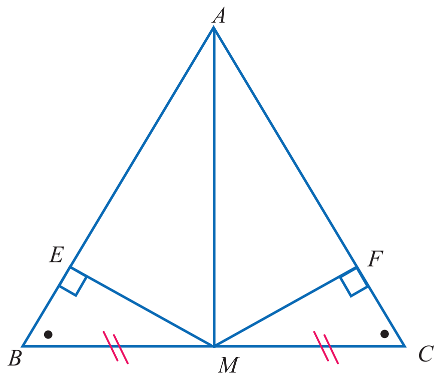
15 المثلث ABC المرسوم جانباً، القائم في A. $AB = 3\text{ cm}$ و $AC = 2\text{ cm}$. E نقطة من وتره $[BC]$، $CE = 1\text{ cm}$.

ارسم هذا المثلث على دفترك، ثم ارسم صورته وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى E.



إحراز تقدم

16 تطابق مثلثان قائمان



تأمَّل الشّكل المرسوم جانباً. فيه $\widehat{B} = \widehat{C}$ و $BM = MC$

1- أثبت أنَّ المُثلّثين MFC ، MEB متطابقان.

2- أثبت أنَّ المُثلّثين MFA ، MEA متطابقان.

3- استنتج صحة الخاصة إذا تساوى قياسا زاويتين في مثلث كان المثلث متساوي الساقين.

4- استنتج أن $[AM]$ ارتفاع في المثلث ABC وكذلك أن $[AM]$ للزاوية A .

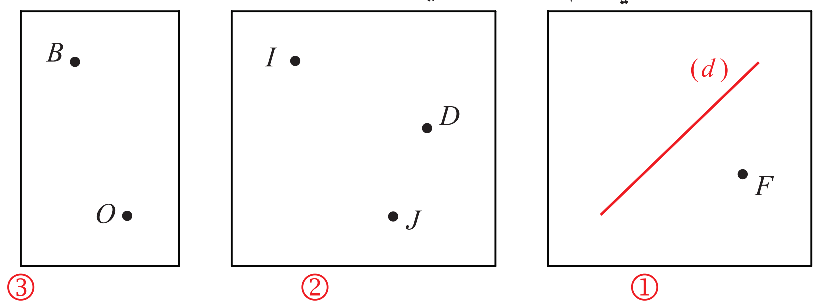
سوف تتعلم الوحدة الثالثة خواص يتمتع بها الارتفاع المتعلق بالقاعدة في المثلث المتساوي الساقين.

يتطابق مثلثان قائمان في الحالتين الآتيتين:

- إذا تطابق وتر وضلع قائمة من أحدهما مع وتر وضلع قائمة من الآخر.
- إذا تطابق وتر وزاوية حادة من أحدهما مع وتر وزاوية حادة من الآخر.

17 تعلَّم تعريفات.

1. تأمل الشكل الآتي، ثم أكمل التعريفات التالية:



① القول إنَّ « النقطة B هي صورة النقطة A وفق التناظر الذي مركزه O » يعنـي:

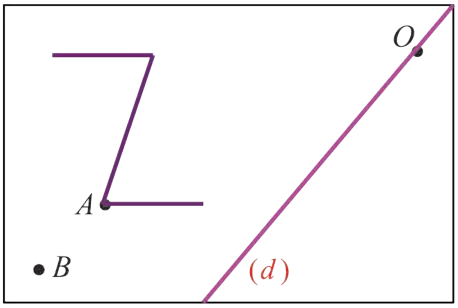
② القول إنَّ « النقطة C هي صورة النقطة D وفق الانسحاب الذي ينقل I إلى J» يعني:

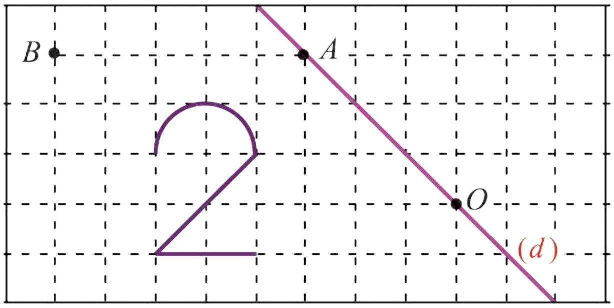
③ القول إنَّ « النقطة E هي صورة النقطة F وفق التناظر الذي محوره (d) » يعني:

2. انسخ الأشكال السابقة ثم أكمل رسم التحويلات الواردة في الطلب الأول.

18 تعرُّف الصور.

في كلٍ من الحالتين الآتيتين:





① ارسم باللون الأخضر صورة الشكل وفق التناظر الذي مركزه O.

② ارسم باللون الأزرق صورة الشكل وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

③ ارسم باللون الأحمر صورة الشكل وفق التناظر الذي محوره المستقيم (d).

استعمل في الحالة ① صفحة سنتيمترية وفي الحالة② صفحة بيضاء.

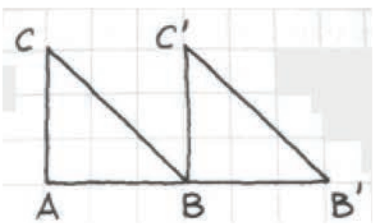
19 تعلُّم التحرير الكتابي.

اقرأ النص والحل المنجز من قبل أحد الطلاب. ثم حرِّرْ الحل مع الأخذ بمجمل ملاحظات المصحح

النص

1. ارسم مثلثاً ABC قائم الزاوية في A.
2. ثم ارسم C' و B' صورتي C و B على التوالي وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.
3. ما طبيعة المثلث $BB'C'$؟
4. ما طبيعة الرباعي $ABC'C$؟

حل الطالب، مع ملاحظات المصحح



1. رسم المثلث ABC

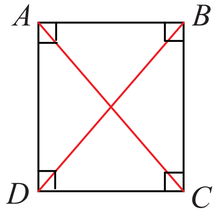
لا يجب رسم حالة خاصة فمعطيات المسألة لاتوحي أن المثلث متساوي الساقين.

2. الانسحاب يحافظ على قياسات الزوايا، إذن: $\widehat{B'BC'} = 90^{\circ}$

أوضح: ما الزاوية التي صورتها $\widehat{B'BC'}$

3. $ABC'D$ هو مربع نقص في الرسم، والإجابة بحاجة إلى تحقق

20 كيف نستخدم خاصة؟



وجدنا في الصف السابع الخاصة الآتية: « قطرا المستطيل متساويا الطول»

يمكن تنظيم مخطط استعمال هذه الخاصة على النحو الآتي:

الفرض	الخاصة	النتيجة
$ABCD$ مستطيل	قطرا المستطيل متساويا الطول	$AC = BD$

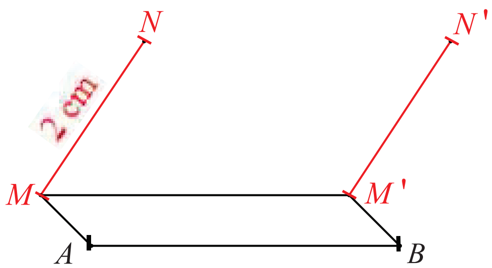
1) $MNPQ$ مستطيل.

الخاصة السابقة تفسح في المجال أن نستوحي نتيجةً من هذا المعطى.

أكمل: $MNPQ$ مستطيل، إذن $\cdots\cdots = \cdots\cdots$

2) $ABCD$ شكل رباعي فيه $AC = BD$. هل الخاصة السابقة تفسح في المجال أن نستوحي أنَّ الرباعي $ABCD$ هو مستطيل؟ اشرح إجابتك.

21 خطوة نحو الإثبات



في الشكل المرافق: $MN = 2\text{ cm}$

$[M'N']$ هي صورة $[MN]$ وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

أثبت أنَّ $M'N' = 2\text{ cm}$.

انسخ الجدول الآتي، ثم املأ الفراغ بنص ملائم.

الفرض	الخاصة	النتيجة
$MN = 2\text{ cm}$، و $[M'N']$ صورة $[MN]$ وفق انسحابٍ	....	$M'N' = 2\text{ cm}$

22 خطوتان نحو الإثبات

ABC مثلث كيفي. A' هي صورة A وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى B.

1. ارسم شكلاً موافقاً للمعطيات.

2. أثبت أنَّ القطعتين $[AB]$ و $[A'C]$ متناصفتان.

لإنجاز الإثبات، انسخ المخطط الوارد في كلٍ من الخطوتين الآتيتين واملأ الفراغات بما يلائم.

الخطوة الأولى:

الفرض	التعريف	النتيجة
A' هي صورة A وفق الانسحاب الذي ينقل C إلى B	تعريف صورة نقطة وفق انسحاب	....

الخطوة الثانية:

الفرض	الخاصة	النتيجة
$ACBA'$ هو متوازي أضلاع	....	القطعتان $[AB]$ و $[A'C]$ متناصفتان.

23 تحرير إثبات

$ABCD$ شكل رباعي، I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[AB]$.

K هي صورة النقطة B وفق الانسحاب الذي ينقل I إلى A.

1. ارسم شكلاً محققاً معطيات النص.
2. أثبت أنَّ J هي منتصف $[IK]$.

إنجاز الإثبات، انسخ المخطط الآتي واملأ الفراغات بما يلائم. ثم صِغْ الإثبات بلغة سليمة.

لدينا من النص

K هي صورة النقطة B وفق الانسحاب الذي ينقل I إلى A

J منتصف $[AB]$

إذن، وحسب

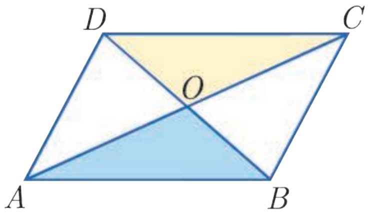
صورة نقطة وفق انسحاب

.... هو متوازي أضلاع

خاصة ....

J هي منتصف $[IK]$

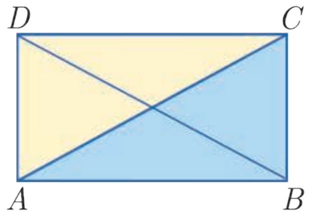
24 إثبات قطرا متوازي الأضلاع متناصفان.



في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي الأضلاع.

1. أثبت أن المثلثان ABO, ODC طبوقان.
2. استنتج أن قطرا متوازي الأضلاع متناصفان.

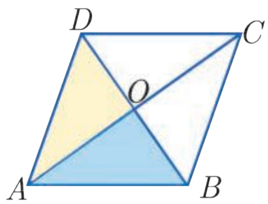
25 إثبات قطرا المستطيل متساويان



في الشكل المجاور، $ABCD$ مستطيل.

1. أثبت أن المثلثان ABC, ADB طبوقان.
2. استنتج أن قطرا هذا المستطيل متساويان.

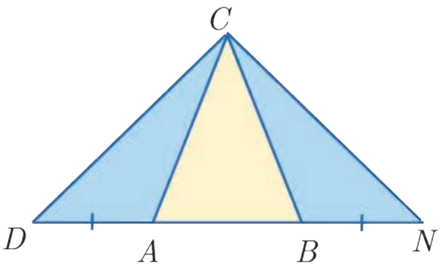
26 إثبات قطرا المعين متعامدان.



في الشكل المجاور، $ABCD$ معين.

1. أثبت أن المثلثان ABO, ODA طبوقان.
2. استنتج أن قطرا المعين متعامدان.

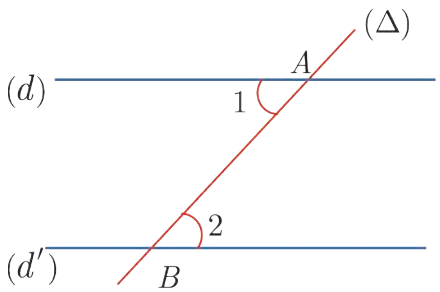
27 مع مثلث متساوي الساقين



في الشكل المجاور، ABC مثلث متساوي الساقين.

1. أثبت أن المثلثان CBN, CDA طبوقان.
2. استنتج نوع المثلث DCN.

28 الزاويتان المتبادلتان داخلاً



في الشكل المجاور، فيه $d \parallel d'$. تعلمت في العام الماضي أن $\hat{1} = \hat{2}$. لنثبت ذلك.ارسم من النقطة O منتصف $[AB]$ مستقيم يعامد (d) ، في النقطة M ويقطع (d') في N. استفد من الخاصة:"العمود على أحد مستقيمين متوازيين عمود على الآخر" لتثبت أن المثلثين OMA, ONB طبوقان. ثم استنتج أن $\hat{1} = \hat{2}$.

الوحدة السادسة

مثلثات ومنتصفات أضلاع ومستقيمات متوازية

1. منتصفا ضلعين في المثلث

2. موازٍ لضلع من منتصف ضلع آخر

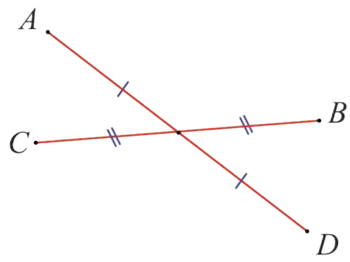
3. مستقيمات متوازية وقاطعان

4. تساوي ثلاث نسب

انطلاقة نشطة

في كلٍ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، ضع خطاً تحتها:

① انطلاقاً من الشكل المرافق، يمكن القول إن:



① الرباعي $ABDC$ هو معين

② الرباعي $ABDC$ هو متوازي أضلاع

③ الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع

② $EFGH$ متوازي أضلاع وليس مستطيلاً، إذن:

① $(EF) \parallel (GH)$ ② $EG = FH$ ③ $(EG) \parallel (FH)$

③ النقاط A و B و C و D و E على استقامة واحدة بهذا الترتيب وتقسم $[AE]$ الى قطع متساوية. إذن:

① $\frac{AB}{AE} = \frac{1}{5}$ ② $\frac{AB}{AE} = \frac{2}{5}$ ③ $\frac{AB}{AE} = \frac{1}{4}$

④ النقاط الثلاث A و B و C تحقق $(AB) \parallel (AC)$، فيمكن تأكيد أن:

① $C \in (AB)$ ② A هي منتصف $[BC]$ ③ $AB = AC$

⑤ إذا كان الجدول المرافق جدول تناسب، كان:

4	16	y
5	x	30

① $\frac{4}{5} = \frac{x}{16} = \frac{y}{30}$ ② $\frac{5}{4} = \frac{x}{16} = \frac{y}{30}$ ③ $\frac{4}{5} = \frac{16}{x} = \frac{y}{30}$

⑥ إذا كان $\frac{3}{2} = \frac{x}{5}$، كان:

① $x = \frac{3 \times 5}{2}$ ② $x = \frac{2 \times 5}{3}$ ③ $x = \frac{2}{3 \times 5}$

⑦ إذا كان $\frac{7}{x} = \frac{5}{24}$، كان:

① $x = \frac{7 \times 24}{5}$ ② $x = \frac{7 \times 5}{24}$ ③ $x = \frac{5 \times 24}{7}$

1 منتصفا ضلعين في المثلث

نشاط « اكتشاف وإثبات خاصة المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في المثلث »

1. دراسة تجريبية

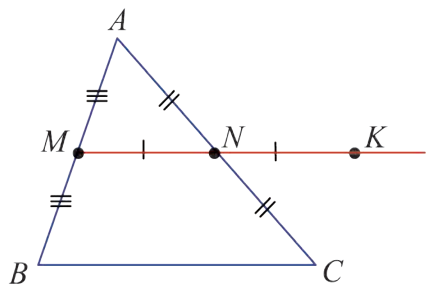
1. ارسم ثلاثة مثلثات ABC ، في أحدها $\widehat{A}$ حادة وفي آخر $\widehat{A}$ منفرجة وفي ثالثها $\widehat{A}$ قائمة.

2. في كل من تلك المثلثات، وضِعْ النقطة M في منتصف $[AB]$ والنقطة N في منتصف $[AC]$، ثم ارسم المستقيم (MN).

كيف يبدو لك المستقيمين (MN) و (BC) ؟ والطولين MN و BC ؟

2. إثبات

1. في كلٍ من الأشكال الثلاثة السابقة، وضِعْ النقطة K نظيرة M بالنسبة إلى N.



2. **دليل للإثبات**

- اكتب في الفراغ المنقط الخاصة التي تستنتج منها أنَّ « $AMCK$ هو متوازي أضلاع » $[AC]$ و $[MK]$ هما قطرا الرباعي $AMCK$ ، N منتصف كلٍ من $[AC]$ و $[MK]$.
  .... إذن $AMCK$ هو متوازي أضلاع.
- اكتب في الفراغ المنقط الخاصة التي تستنتج منها أنَّ « $(AM) \parallel (CK)$ و $AM = CK$ »
  $AMCK$ متوازي أضلاع، .... إذن $(AM) \parallel (CK)$ و $AM = CK$.
- لماذا إذن نستطيع القول إنَّ « $(MB) \parallel (CK)$ و $MB = CK$ »؟
- اكتب في الفراغ المنقط الخاصة التي تستنتج منها أنَّ « $MBCK$ متوازي أضلاع»
  $(MB) \parallel (CK)$ و $MB = CK$ ، .... إذن $MBCK$ هو متوازي أضلاع.

3. أيكفي الوصول إلى « $MBCK$ هو متوازي أضلاع » لتأكيد ما بدا لك في الدراسة التجريبية؟

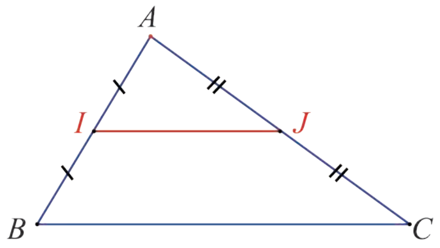
4. صغ إثباتاً، بلغة سليمة وأسلوب شيق لإثبات أنَّ:

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه طولاً

تعلم المبرهنة الأولى في المنتصفات:

- المستقيم المار بمنتصفي ضلعين من أضلاع مثلث، يوازي ضلعه الثالثة.
- طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين من أضلاع مثلث، يساوي نصف طول الضلع الثالث.

مثال في الشكل المرافق:



المعطيات: في المثلث ABC ، I منتصف $[AB]$

و J منتصف $[AC]$

حسب المبرهنة الأولى في المنتصفات

النتيجة: $(BC) \parallel (IJ)$ و $IJ = \frac{1}{2}BC$.

معنى الكلمات:

في حالة مبرهنة شهيرة وكثيرة الاستعمال، كما في هذه الحالة، عند استعمالها لا ضرورة لسرد نصها.

نكتفي بالقول: **حسب المبرهنة في ...**

لاستعمال المبرهنة الأولى في المنتصفات، يجب:

- ذكر المثلث الذي نطبق عليه المبرهنة.
- ذكر الضلعين المعنيين ومنتصفيهما.
- الاستنتاج « فالمستقيمان ..... و ..... متوازيان »

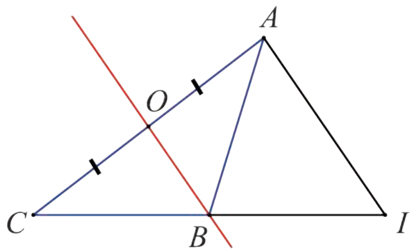
اكتساب معارف

كيف نثبت توازي مستقيمين؟

مثال ABC مثلث، النقطة O هي منتصف $[AC]$.

النقطة I هي نظيرة C بالنسبة إلى B .

أثبت أنَّ المستقيمين (OB) و (AI) متوازيان.



فكِّر في وضع الشكل بحيث يمكن الاستفادة من مبرهنات المنتصفات.

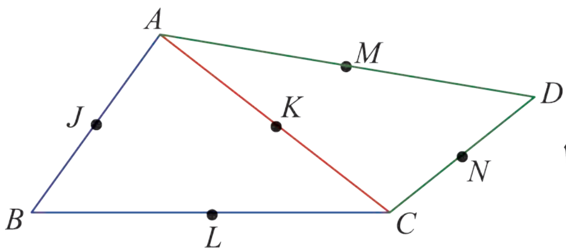
الحل

I هي نظيرة C بالنسبة إلى B، إذن B هي منتصف $[CI]$.

ولدينا من النص O منتصف $[AC]$، فبتطبيق المبرهنة الأولى في المنتصفات على المثلث ACI، يكون المستقيم المار بالنقطتين O و B، منتصفي $[AC]$ و $[CI]$، موازياً $[AI]$ الضلع الثالثة.

أي إنَّ المستقيمين (OB) و (AI) متوازيان.

تحقق من فهمك



في الشكل المرافق، ABC و ADC مثلثان.

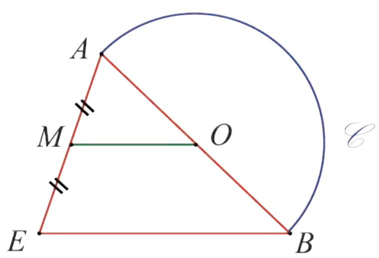
J و K و L و M و N منتصفات أضلاعهما حسب ما ترى على الشكل.

1. في كل حالة، اذكر المستقيم الذي يوازيه المستقيم المعطى؟ اشرح إجابتك كتابةً.

① (JK) ② (KN) ③ (LN) ④ (JM)

2. ما الوضع النسبي للمستقيمين (LN) و (JM)؟ علِّل إجابتك.

تدرب



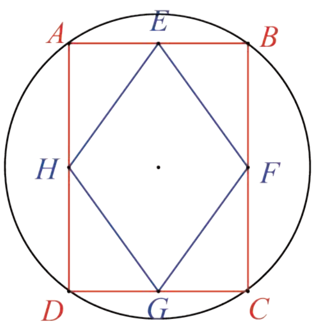
① C نصف دائرة مركزها O وقطرها $[AB]$.

M هي منتصف القطعة المستقيمة $[AE]$.

أثبت أنَّ المستقيمين (OM) و (BE) متوازيان.

② ABC مثلث. B' نظيرة A بالنسبة إلى B، و C' نظيرة A بالنسبة إلى C.

أثبت أنَّ المستقيمين (CB) و $(C'B')$ متوازيان.



③ $ABCD$ مستطيل مرسوم في دائرة نصف قطرها 3cm.

E و F و G و H منتصفات أضلاعه.

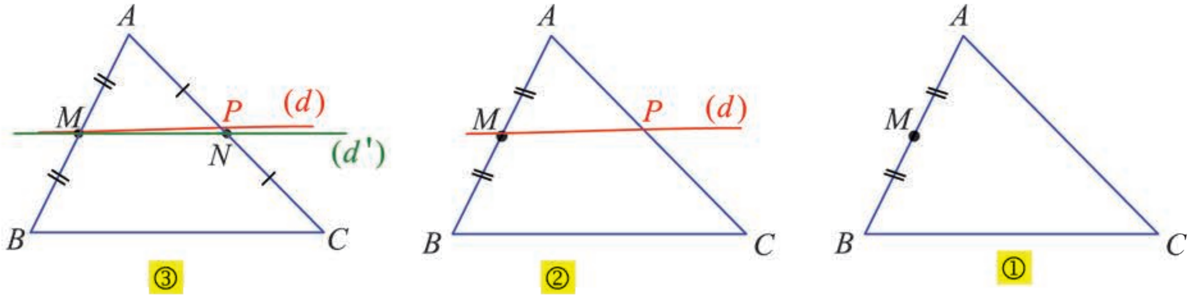
ما نوع الرباعي $EFGH$؟ احسب محيطه.

2 موازٍ لضلع من منتصف ضلع آخر

نشاط « تمهيد خاصة المستقيم المار بمنتصف ضلع في المثلث موازياً ضلعاً آخر منه »

في الشكل ① ، ABC مثلث، M منتصف الضلع $[AB]$.

رسم سليم **يدوياً** المستقيم (d) ماراً بالنقطة M وموازياً ضلعه $[BC]$، فقطع $[AC]$ في P. وحصل على الشكل ② .



- وضَعَ النقطة N في منتصف $[AC]$ ورسم المستقيم (d') ماراً بالنقطتين M و N، فحصل على الشكل ③ ، واتضح أنَّ المستقيمين (d') و (d) غير منطبقين.

1. اشرح لماذا أخطأ سليم في رسم المستقيم (d).

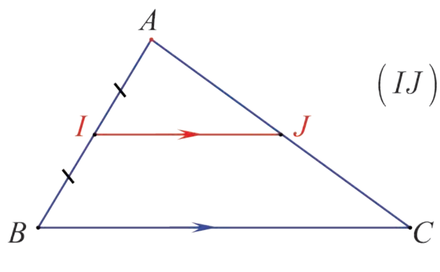
2. صغ إثباتاً، بلغة سليمة وأسلوب شيق لإثبات أنَّ:

المستقيم المار بمنتصف ضلع في المثلث موازياً ضلعاً آخر، يقطع الضلع الثالثة في منتصفه.

تعلم المبرهنة الثانية في المنتصفات:

المستقيم المار بمنتصف أحد أضلاع مثلث موازياً ضلعاً آخر، يقطع الضلع الثالث في منتصفه.

مثال في الشكل المرافق:



المعطيات: في المثلث ABC، I منتصف $[AB]$ و $(IJ) \parallel (BC)$

حسب المبرهنة الثانية في المنتصفات

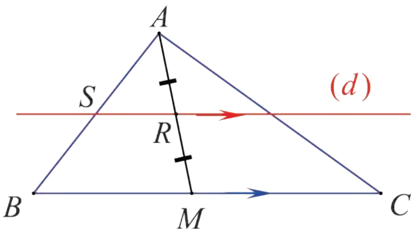
النتيجة: J منتصف $[AC]$.

لاستعمال المبرهنة الثانية في المنتصفات، يجب:

- تحديد المثلث الذي نطبق عليه المبرهنة.
- تحديد منتصف أحد أضلاعه والمستقيم المار بهذا المنتصف موازياً ضلعاً آخر.
- استنتاج « إذن النقطة .... هي منتصف الضلع الثالث .... »

اكتســاب معــارف

كيف نثبت وقوع نقطة في منتصف قطعة مستقيمة ؟



مثال ABC مثلث، M نقطة من $[BC]$ و R منتصف $[AM]$ و (d) هو المستقيم المار بالنقطة R موازياً (BC) وقاطعاً $[AB]$ في S. أثبت أنَّ S هي منتصف $[AB]$.

لإثبات أنَّ نقطةً هي منتصف قطعة مستقيمة، فكِّرْ باستعمال قطري متوازي الأضلاع.

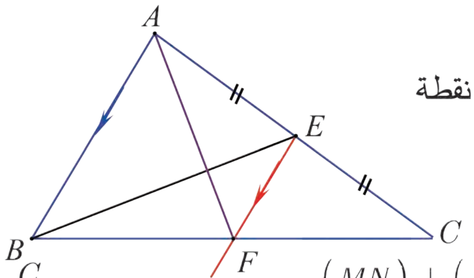
في حالة المثال الذي نحن بصدده، معطيات النص توجهنا إلى التفكير بمبرهنة المنتصفات الثانية.

الحل

في المثلث AMB، المستقيم (SR) يمر بالنقطة R منتصف ضلعه $[AM]$ ويوازي ضلعاً آخر $[BM]$ فهو، حسب المبرهنة الثانية للمنتصفات، يقطع ضلعه الثالث $[AB]$ في منتصفه.

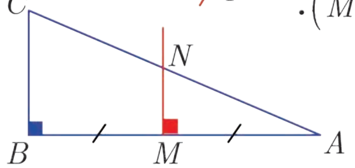
أي إنَّ النقطة S هي منتصف $[AB]$. أي إنَّ المستقيمين (OB) و (AI) متوازيان.

تحقق من فهمك



① ABC مثلث. E منتصف $[AC]$ في هذا المثلث، F نقطة من $[BC]$ تحقق $(AB) \parallel (EF)$.

أثبت أنَّ F منتصف $[BC]$.



② ABC مثلث قائم في B ، M منتصف $[AB]$ و $(AB) \perp (MN)$.

أثبت أنَّ N منتصف $[AC]$

تذكر : العمودان على مستقيم واحد متوازيان.

تدرب

① IJK مثلث. S هي صورة النقطة I وفق التناظر الذي مركزه J.

المستقيم المار بالنقطة S موازياً (JK) يلاقي المستقيم (IK) في T.

1. ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص.
2. أثبت أنَّ K هي منتصف القطعة $[IT]$.

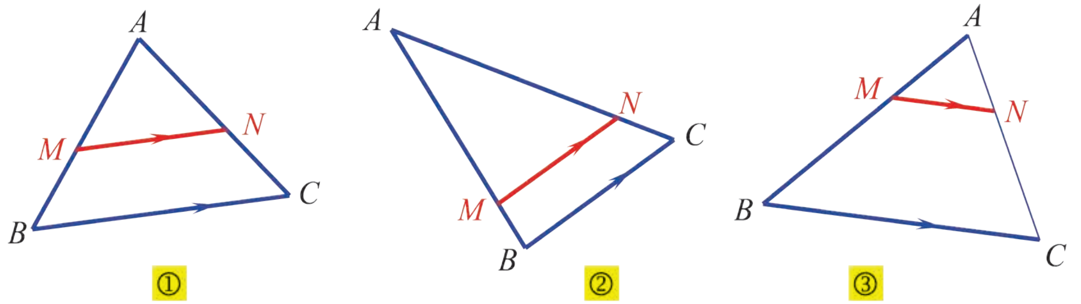
② AJP مثلث و C منتصف $[AJ]$. نرسم من النقطة A المستقيم الموازي للمستقيم (CP) فيقطع المستقيم (JP) في M.

ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص، ثم أثبت أنَّ P هي منتصف $[MJ]$.

3 مستقيمات متوازية وقاطعان

نشاط « اكتشاف التناسب بين أطوال أضلاع مثلثين »

ABC و AMN مثلثان، $M \in [AB]$ و $N \in [AC]$ و $(MN) \parallel (BC)$.



1. في كلٍ من الأشكال السابقة، قس أطوال أضلاع كلٍ من المثلثين ABC و AMN، ثم نظِّمْ جدولاً بالنتائج لكل حالة كالجدول الآتي:

أطوال أضلاع المثلث AMN	$AM = \cdots\cdots$	$AN = \cdots\cdots$	$MN = \cdots\cdots$
أطوال أضلاع المثلث ABC	$AB = \cdots\cdots$	$AC = \cdots\cdots$	$BC = \cdots\cdots$

2. هل كل جدول من الجداول الثلاثة هو جدول تناسب؟

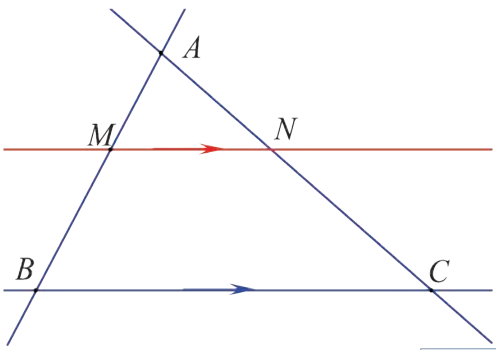
من المعلوم أنَّ النتيجة التي توصلنا إليها في العمل السابق لا يعد إثباتاً للحقيقة التالية:

«المثلثان المحققان لمعطيات النشاط السابق، أطوال أضلاع أحدهما متناسبة مع أطوال أضلاع الآخر »

وسوف نقبل هذه الخاصة في دراستنا اللاحقة دون إثبات، كما أننا سنعرض إثباتاً في حالة خاصة في نشاط الدرس الرابع (تساوي ثلاث نسب).

تعلم

مستقيمان متوازيان وقاطعان



مثال ABC و AMN مثلثان مكونان من مستقيمين متوازيين (MN) و (BC) يقطعهما قاطعان (MB) و (AC). في هذه الحالة، الجدول الآتي **هو جدول تناسب**.

أطوال أضلاع المثلث AMN	AM	AN	MN
أطوال أضلاع المثلث ABC	AB	AC	BC

خاصة

إذا قطع مستقيمٌ ضلعي المثلث ABC، $[AB]$ في M و (AC) في N وكان $(MN) \parallel (AB)$،
كانت أطوال أضلاع المثلث AMN متناسبة مع أطوال أضلاع المثلث ABC.

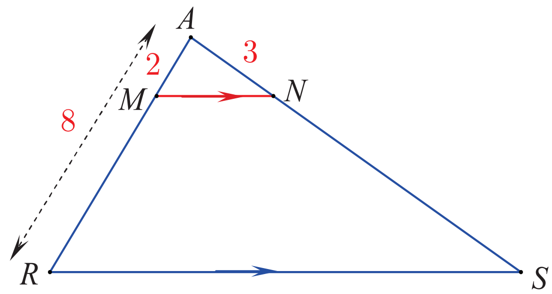
اكتساب معارف

كيف نحسب طول قطعة مستقيمة باستعمال مبرهنة النسب المتساوية ؟

مثال في كلٍ من الحالتين الآتيتين ① و ② احسب AS.

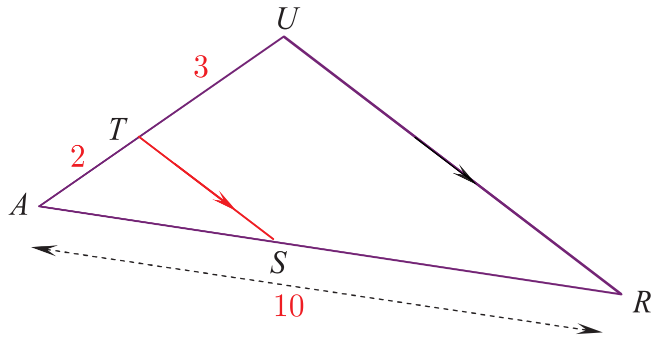
①

$M \in [AR]$ و $N \in [AS]$ و $(MN) \parallel (RS)$



②

$S \in [AR]$ و $T \in [AU]$ و $(ST) \parallel (RU)$



الحل

لحساب الأطوال نستعمل مبرهنة النسب المتساوية.

① المستقيم (MN) يقطع $[AR]$ و $[AS]$ ضلعي المثلث ARS ويوازي ضلعه الثالث $[RS]$،

فيكون، حسب مبرهنة النسب المتساوية: $\dfrac{AN}{AS} = \dfrac{AM}{AR}$.

وحسب الأطوال المعطاة في الشكل $\dfrac{3}{AS} = \dfrac{2}{8}$ وبالتالي $AS = \dfrac{3 \times 8}{2} = 12$

② المستقيم (TS) يقطع $[AR]$ و $[AU]$ ضلعي المثلث ARU على التوالي في T و S ويوازي

ضلعه الثالث $[RU]$، فيكون، حسب مبرهنة النسب المتساوية: $\dfrac{AS}{AR} = \dfrac{AT}{AU}$.

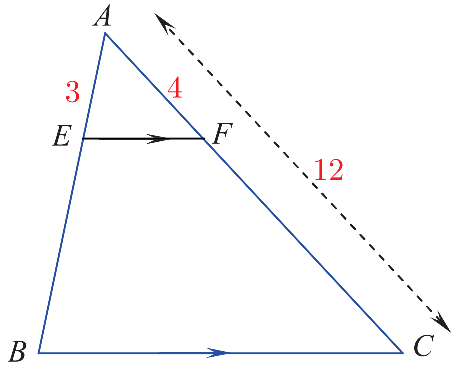
وحسب الأطوال المعطاة في الشكل: $\dfrac{AS}{10} = \dfrac{2}{5}$، ومنها $AS = \dfrac{10 \times 2}{5} = 4$.

تحقق من فهمك

في الشكل المرافق، ABC و AEF مثلثان.

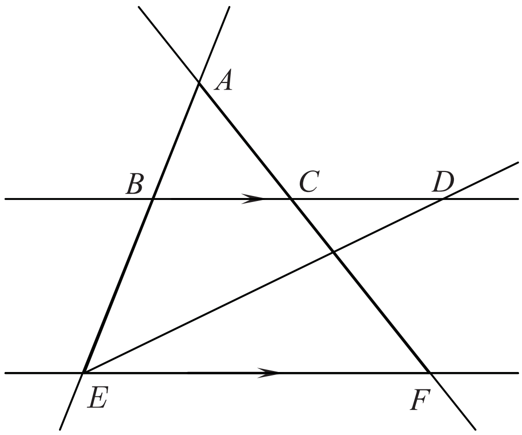
$(EF) \parallel (BC)$ و $AC = 12$ و $AE = 3$ و $AF = 4$.

احسب الطول AB واستنتج الطول EB.

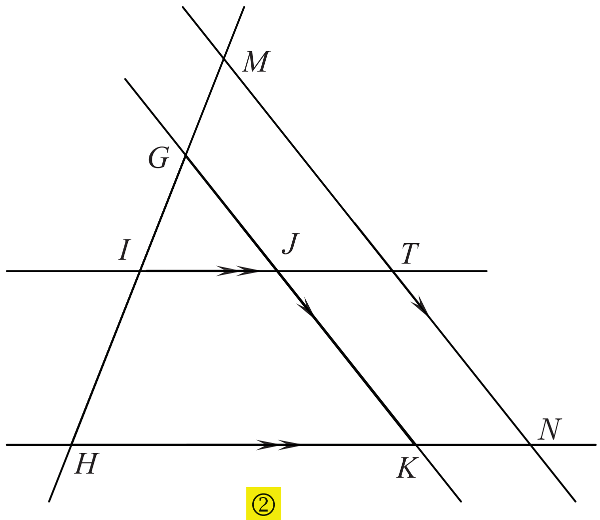


تدرب

① في كلٍ من الشكلين ① و ② خمسة مستقيمات.



①



②

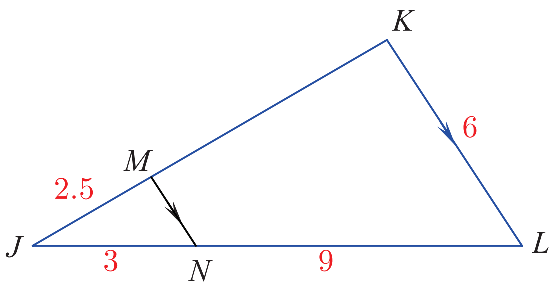
اذكر كل مثلثين محددين بمستقيمين متوازيين ومستقيمين قاطعين لهما.

② في الشكل المرافق، JKL و JMN مثلثان.

$(MN) \parallel (KL)$ و $KL = 6$ و $JN = 3$

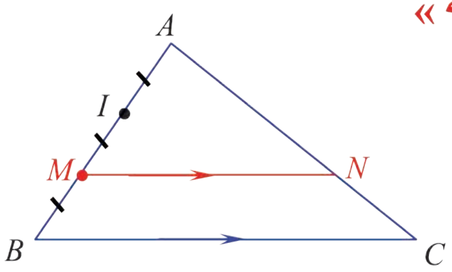
و $JM = 2.5$ و $NL = 9$.

احسب كل من الطولين JK ، MN.



4 تساوي ثلاث نسب

نشاط « إثبات الخاصة السابقة في حالة خاصة »

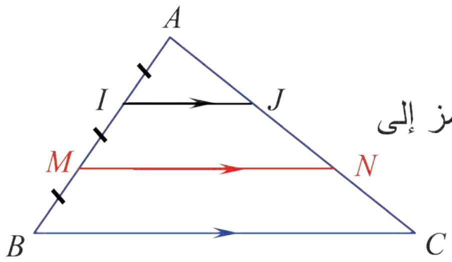


ABC مثلث. I و M نقطتان من ضلعه $[AB]$ تحققان.

N نقطة من الضلع $[AC]$ تحقق $(MN) \parallel (BC)$.

نسعى إلى إثبات أنَّ $\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$

1. النسبة $\frac{AM}{AB}$، حسب معطيات النص $\frac{2}{3} = \frac{AM}{AB}$

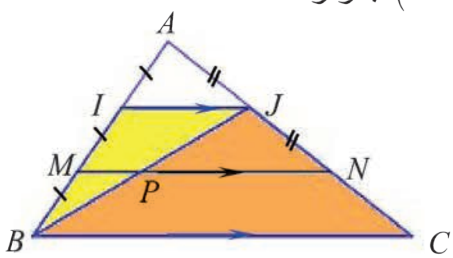


2. النسبة $\frac{AN}{AC}$

① نرسم من النقطة I المستقيم الموازي للمستقيم (MN)ونرمز إلى نقطة تقاطعه مع (AC) بالرمز J.

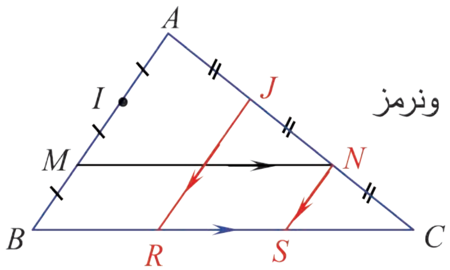
أثبت أنَّ J هي منتصف $[AN]$.

② نرسم المستقيم (BJ) ونرمز إلى نقطة تقاطعه مع (MN) بالرمز P.



- أثبت أنَّ P هي منتصف $[BJ]$.
- استنتج أنَّ N هي منتصف $[CJ]$.
- اشرح لماذا $\frac{2}{3} = \frac{AN}{AC}$؟

3. النسبة $\frac{MN}{BC}$



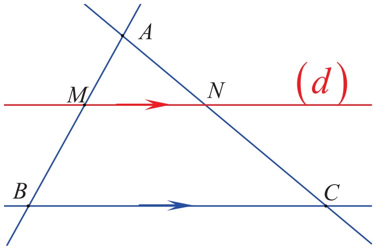
- نرسم من النقطة J المستقيم الموازي للمستقيم (AB) ونرمز إلى نقطة تقاطعه مع (BC) بالرمز R.
- نرسم من النقطة N المستقيم الموازي للمستقيم (AB)ونرمز إلى نقطة تقاطعه مع (BC) بالرمز S.

① اشرح لماذا $CS = SR = RB$. استنتج قيمة النسبة $\frac{BS}{BC}$.

② ما طبيعة الرباعي $BSNM$؟ علِّل إجابتك. استنتج أنَّ $\frac{2}{3} = \frac{MN}{BC}$.

تعلم

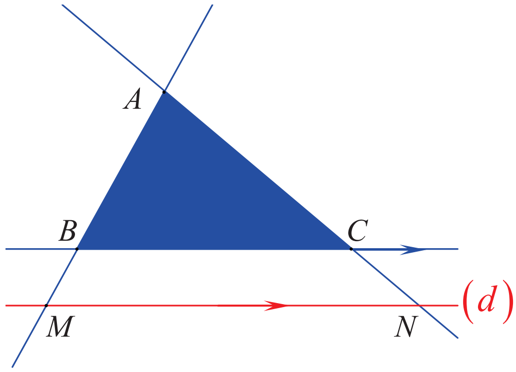
مبرهنة النسب الثلاث المتساوية:

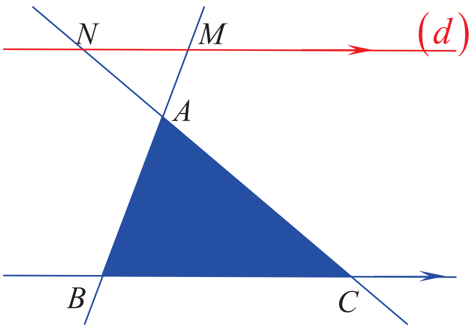


إذا قطع مستقيمٌ (d) ضلعي المثلث ABC، $[AB]$ في M و (AC) في N وكان $(MN) \parallel (AB)$،

كان $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

تصح هذه المبرهنة أيضاً في حالة كون المستقيم (d) قاطعاً امتدادي $[AB]$ و $[AC]$.





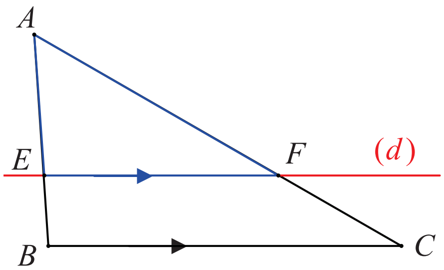
مثال

ABC مثلث أطوال أضلاعه $AB = 3$ و $AC = 6$ و $BC = 5$.

المستقيم (d) يوازي (BC) ويقطع $[AB]$ في E و $[AC]$ في F. فإذا علمت أن $AE = 2$.

احسب أطوال أضلاع المثلث AEF.

الحل



نرسم شكلاً يتفق مع معطيات النص. ولحساب أطوال أضلاع المثلث AEF، نستعمل مبرهنة النسب المتساوية.

المستقيم (d) يقطع $[AB]$ و $[AC]$ ضلعي المثلث ABC على التوالي في E و F ويوازي ضلعه الثالث $[BC]$،

فيكون، حسب مبرهنة النسب المتساوية: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.

وحسب الأطوال المعطاة في الشكل: $\frac{EF}{5} = \frac{AF}{6} = \frac{2}{3}$ ($AE = 2$ حسب النص)

من التناسب $\frac{AF}{6} = \frac{2}{3}$، نجد $AF = \frac{6 \times 2}{3} = 4$.

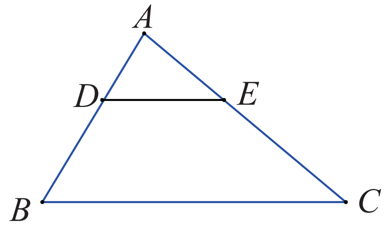
ومن التناسب $\frac{EF}{5} = \frac{2}{3}$ ، نجد $EF = \frac{5 \times 2}{3} = \frac{10}{3}$.

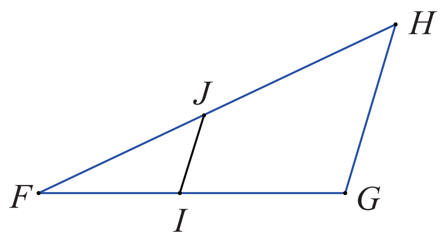
تحقق من فهمك

في كلٍ من الحالتين ① و ② اكتب ثلاث نسب متساوية.

① $D \in [AB]$ ؛ $E \in [AC]$ ؛ $(DE) \parallel (BC)$

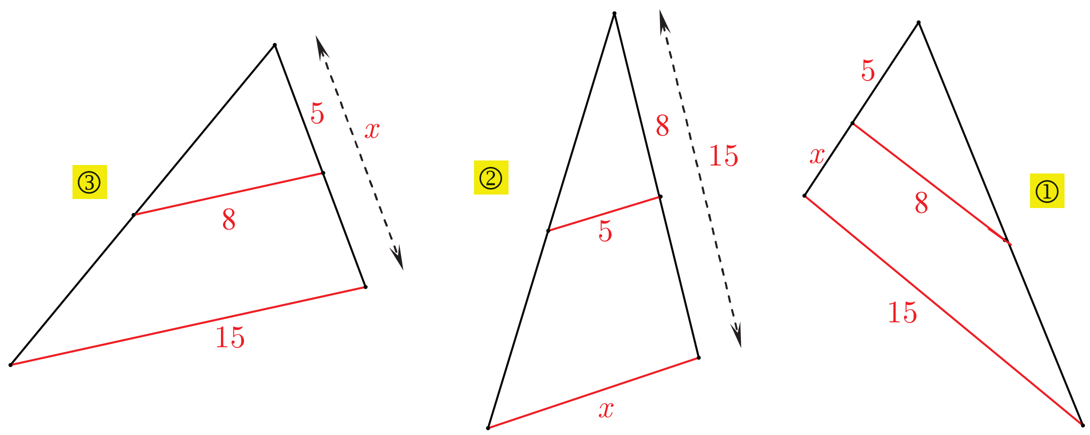
② $I \in [FG]$ ؛ $J \in [FH]$ ؛ $(IJ) \parallel (GH)$





تدرب

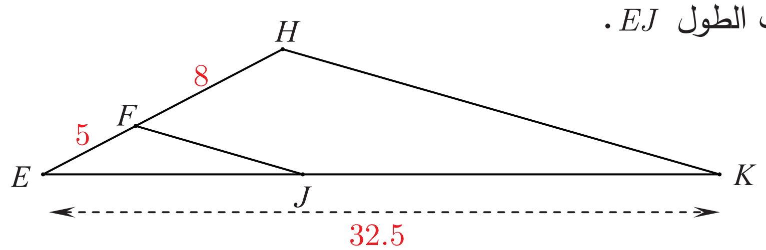
① في كلٍ من الحالات الآتية، المستقيمان الملونان بالأحمر متوازيان.



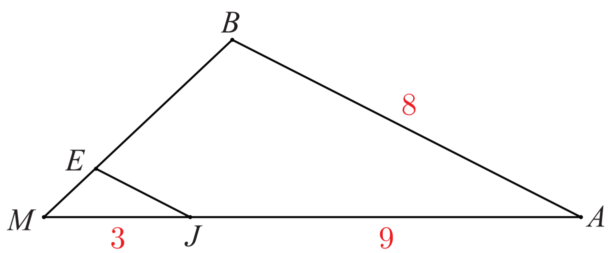
بين إن كانت المساواة $\frac{8}{15} = \frac{5}{x}$ صحيحة أم لا.

② في كلٍ من الحالتين ① و ② احسب الطول EJ .

① $F \in [EH]$ و $J \in [EK]$ و $(FJ) \parallel (HK)$



② $E \in [MB]$ و $J \in [MA]$ و $(EJ) \parallel (BA)$



تمرينات ومسائل

1 في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات. ضع خطاً تحتها.

❶ ABC مثلث. M منتصف $[AB]$ و N منتصف $[BC]$، إذن

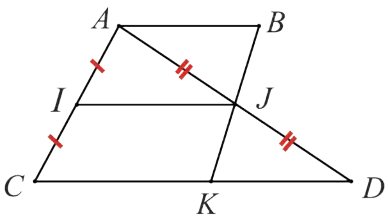
① $(MN) \parallel (BC)$ و $BC = 2MN$.

② $(MN) \parallel (AC)$ و $AC = 2MN$.

③ $(MN) \parallel (AC)$ و $MN = 2AC$.

❷ $I \in [AC]$ و$J \in [AD]$ و $K \in [CD]$.

مع المعطيات المتوفرة على الشكل، يمكن تأكيد أنَّ:



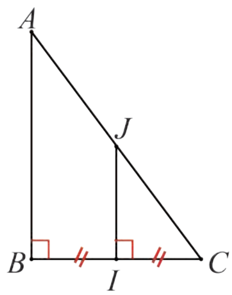
① K هي منتصف $[CD]$.

② $(CD) \parallel (AB)$.

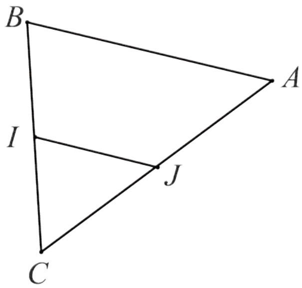
③ $(IJ) \parallel (CD)$.

❸ Bو I و C ثلاث نقاط على استقامة واحدة، كذلك النقاط A و J و C.

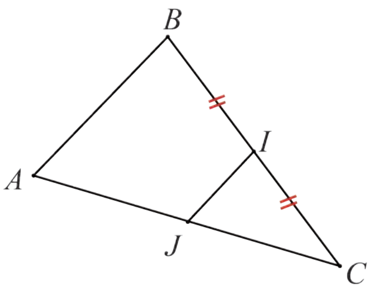
يمكن تأكيد أنَّ J هي منتصف $[AC]$، فالشكل المعبر عن هذه المعطيات هو:



①

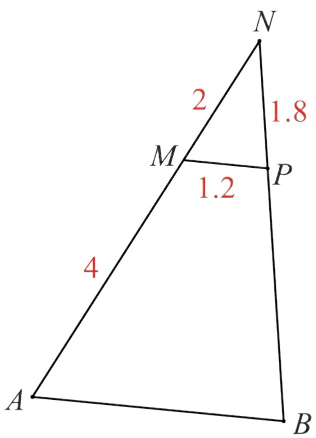


②



③

❹ في الشكل المرافق:



$M \in [AN]$ و $P \in [BN]$ و $(MP) \parallel (AB)$، إذن:

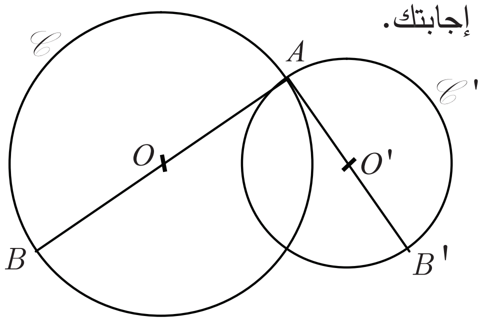
① $NB = 5.8$ ② $NB = 5.4$ ③ $NB = 3.6$

❺ في الشكل السابق:

$M \in [AN]$ و $P \in [BN]$ و $(MP) \parallel (AB)$، إذن:

① $AB = 2.4$ ② $AB = 3.6$ ③ $AB = 5.2$

2 تمعَّنْ العبارات الآتية. أيها صحيحة وأيها خطأ ؟ علِّلْ إجابتك.

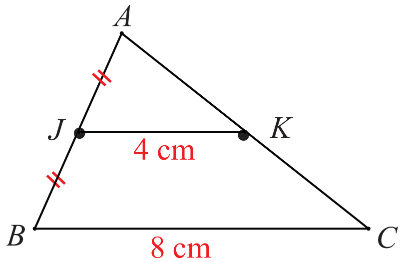


❶ $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ دائرتان مركزاهما على التوالي O و O'.

A هي إحدى نقطتي تقاطعهما.

(AO) يقطع $\mathscr{C}$ في B و (AO') يقطع $\mathscr{C}'$ في B'.

فالمستقيمان (OO') و (BB') متقاطعان.



❷ في المثلث ABC :

J منتصف $[AB]$ و $K \in [AC]$.

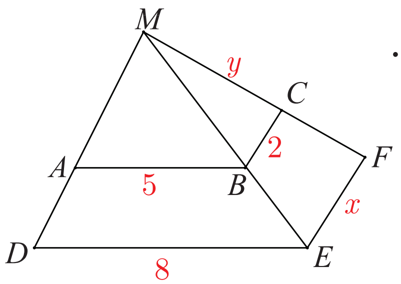
$JK = 4\text{ cm}$ و $BC = 8\text{ cm}$.

إذن K هي منتصف $[AC]$.

❸ AEF مثلث. I نقطة من $[AE]$ تحقق $AI = \frac{1}{3}AE$. المستقيم المرسوم من I موازياً (EF)

يقطع $[AF]$ في J، كما إنَّ $JI = 4\text{ cm}$ و $EF = 8\text{ cm}$.

محيط المثلث AEF يساوي ثلاثة أمثال محيط المثلث AIJ.



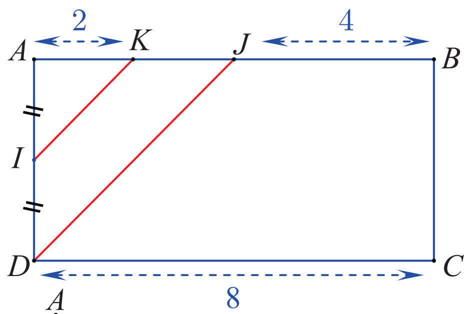
❹ في الشكل المرافق: $A \in [MD]$ و $B \in [ME]$ و $C \in [MF]$.

أطوال بعض القطع في الشكل مشار إليها عددياً أو

بالرموز x و y.

يمكن حساب $x = 3.2$ ولا يمكن حساب قيمة y.

3 $ABCD$ مستطيل. $CD = 8$، والنقطة I هي

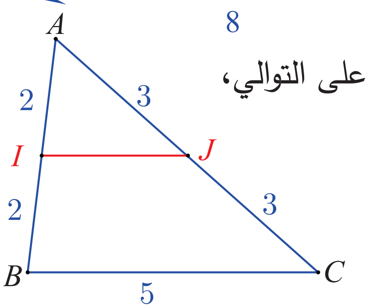


منتصف $[AD]$. K و J نقطتان من $[AB]$

تحققان $AK = 2$ و $BJ = 4$

1. أثبت أنَّ النقطة K هي منتصف $[AJ]$.
2. استنتج أنَّ المستقيم (IK) يوازي المستقيم (DJ).

4 ABC مثلث. I و J نقطتان من ضلعيه $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي،

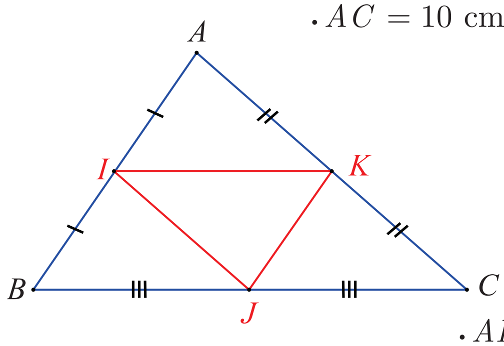


وتحققان الأطوال المشار إليها على الشكل.

1. أثبت أنَّ المستقيمين (IJ) و (BC) متوازيان.

2. احسب طول القطعة $[IJ]$.

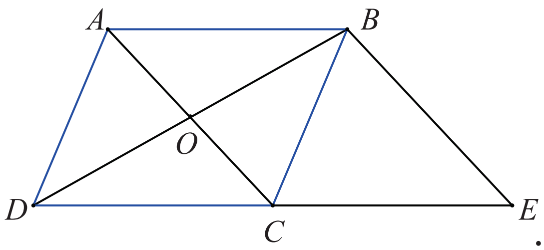
5 ABC مثلث. $BC = 12\text{ cm}$ و $AB = 8\text{ cm}$ و $AC = 10\text{ cm}$.



I و J و K هي منتصفات أضلاعه حسب توضعها على الشكل المرافق.

1. حدد معللاً كل مستقيمين متوازيين في في الشكل.
2. ما عدد متوازيات الأضلاع في الشكل؟
3. احسب محيط المثلث IJK، ووازنه بمحيط المثلث ABC.

6 $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O.



$OB = 3\text{ cm}$ و $OC = 2\text{ cm}$.

E هي نظيرة النقطة D بالنسبة إلى C.

1. أثبت أنَّ المستقيمين (OC) و (BE) متوازيان.
2. احسب الطول BE.
3. ارسم شكلاً في حالة $\widehat{COB} = 60^\circ$.

7 C و C' دائرتان متمركزتان في O، ونصفا قطريهما على التوالي 2.5 cm و 5 cm.

A و B نقطتان من الدائرة C تحققان $AB = 4\text{ cm}$. المستقيمتان (OA) و (OB) تقطعان الدائرة C' على التوالي في A' و B'.

1. ارسم شكلاً يحقق معطيات النص.
2. ما الوضع النسبي للمستقيمين (AB) و $(A'B')$؟
3. احسب طول القطعة $[A'B']$.

8 $ABCD$ مربع طول ضلعه 3 cm.

E هي صورة النقطة B وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B.

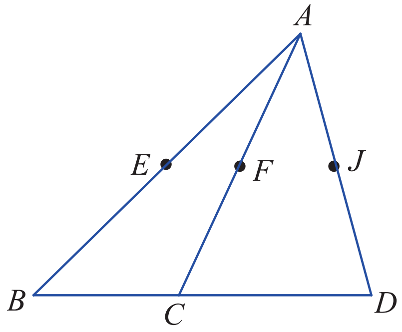
F هي صورة النقطة A وفق التناظر الذي مركزه C.

1. ارسم شكلاً يتفق مع معطيات النص.
2. أثبت أنَّ (BC) و (EF) متوازيان.
3. ما نوع المثلث AEF؟ اشرح إجابتك.

9 B و C و D ثلاث نقاط على استقامة واحدة،

A نقطة خارج المستقيم المار بها. E و F و J هي على التوالي منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$.

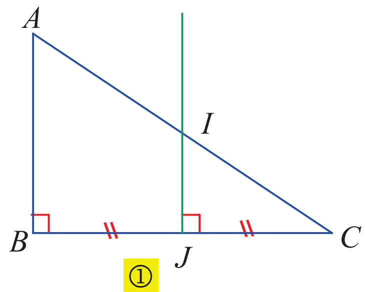
أثبت أنَّ النقاط E و F و J هي على استقامة واحدة.

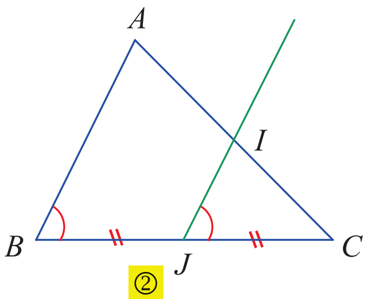


تذكَّر:

- المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان.
- المستقيمان المتوازيان ينطبقان إذا اشتركا بنقطة.

10 ABC مثلث. تنتمي I إلى $[AC]$ وتنتمي J إلى $[BC]$. في كلٍ من الشكلين ① و ② الآتيين، تقرأ معطيات عبر إشارات ملونة بالأحمر. استعمل هذه المعطيات في إثبات أنَّ I هي منتصف $[AC]$.





11 C و C' دائرتان متمركزتان في O، نصفا قطريهما على التوالي 2 cm و 4 cm.

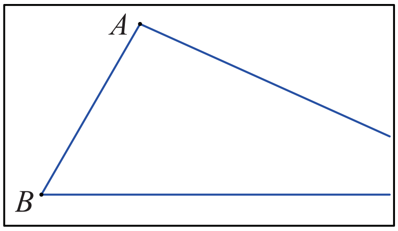
I و J نقطتان من C' تحققان $IJ = 5\text{ cm}$ والقطعة $[OI]$ تقطع C في S، كما إنَّ المستقيم المار بالنقطة S موازياً (IJ) يقطع القطعة المستقيمة $[OJ]$ في T.

1. ارسم شكلاً حسب معطيات النص.
2. أثبت أنَّ T هي منتصف $[OJ]$.
3. استنتج أنَّ T تنتمي إلى الدائرة C.

12 MNP مثلث. B و C نقطتان من نصف المستقيم $[MN)$ تحققان $MB = \frac{3}{2}MN$ و $MC = \frac{1}{2}MB$. النقطة A هي منتصف $[MP]$.

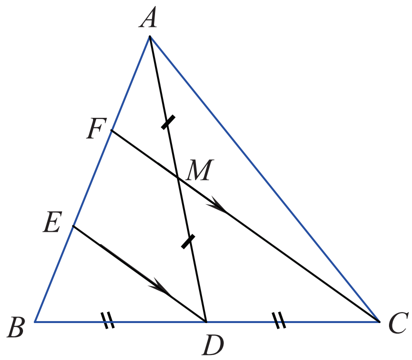
1. ارسم شكلاً متفقاً ومعطيات النص.

2. أثبت أنَّ المستقيمين (AC) و (BP) متوازيان.



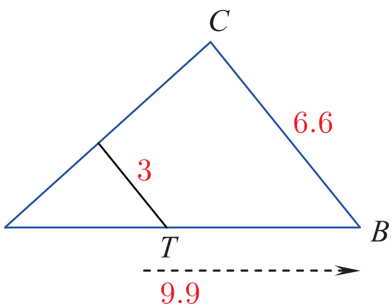
13 في الشكل المرافق، ABC مثلث، والنقطة C مخفية!

دون أن ترسم خارج الإطار، استخدم المسطرة والفرجار لرسم النقطة M منتصف $[AC]$ والنقطة N منتصف $[BC]$.



14 ABC مثلث. D منتصف $[BC]$ و M منتصف $[AD]$. المستقيم (CM) يقطع $[AB]$ في F. نرسم من D المستقيم الموازي للمستقيم (CF)، فيقطع (AB) في E.

1. أثبت أنَّ F هي منتصف $[AE]$.
2. أثبت أنَّ E هي منتصف $[BF]$.

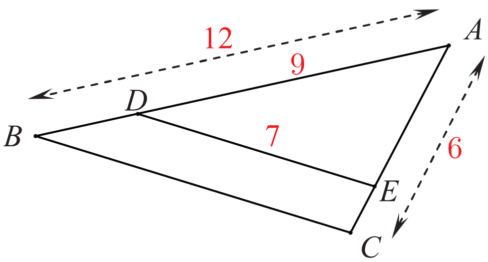


15 في الشكل المرافق، ABC و ATV مثلثان.

(TV) و (BC) متوازيان.

انسخ الجدول الآتي وأكمله.

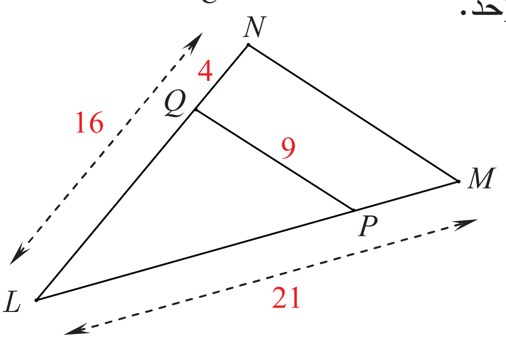
أطوال أضلاع المثلث ATV	$AV = 3.5$	$AT = \cdots\cdots$	$TV = 3$
أطوال أضلاع المثلث ABC	$AC = \cdots\cdots$	$AB = 9.9$	$BC = 6.6$



16 في الشكل المرافق:

$D \in [AB]$ و $E \in [AC]$ و $(DE) \parallel (BC)$.

1. احسب القيمة الحقيقية لطول القطعة $[AE]$.
2. احسب BC مقرباً الجواب لرقم عشري واحد.



17 في الشكل المرافق:

$P \in [LM]$ و $Q \in [LN]$

و $(PQ) \parallel (MN)$.

احسب كلاً من الطولين LP و MN.

لإحراز تقدم

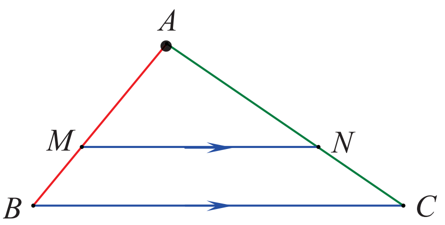
18 تطبيق مبرهنة النسب المتساوية.

لكتابة المساواة المبنية على مبرهنة النسب المتساوية الثلاث والمتعلقة بمثلثين متشابهين:

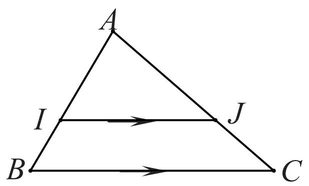
- نكتب في البسوط أضلاع أحد المثلثين.
- نكتب في المقامات أضلاع المثلث الآخر الموافقة بالترتيب مع أضلاع المثلث الأول.

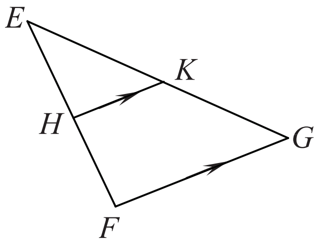
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

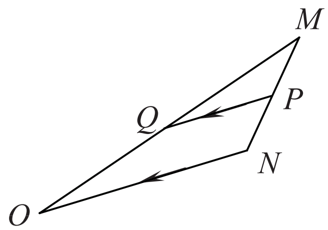
ضلعان متوازيان — ضلعان على (AC) — ضلعان على (AB)



في كلٍ من الأشكال الثلاث الآتية، اكتب النسب المتساوية الثلاث.





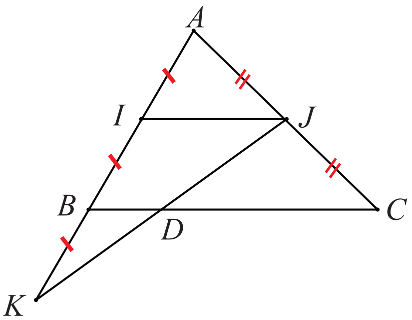


19 تعلَّم تحرير إثبات

اقرأ النص والحل المنجز من قبل أحد الطلاب. ثم حرِّرْ الحل مع الأخذ بمجمل ملاحظات المصحح.

خذْ بالاعتبار المعلومات المعبر عنها بالرموز على الشكل المرافق،

ثم أثبت أنَّ النقطة D هي منتصف القطعة $[JK]$.



حل الطالب، مع ملاحظات المصحح

- $(IJ) \parallel (BC)$، إذن $(IJ) \parallel (BD)$

هذا ليس من معطيات النص

- B هي منتصف $[IK]$ و $(IJ) \parallel (BD)$، إذن D هي منتصف $[JK]$

جيد، ولكن عليك أن تذكر في أي مثلث تعمل.

20 تحليل مخطط الإثبات

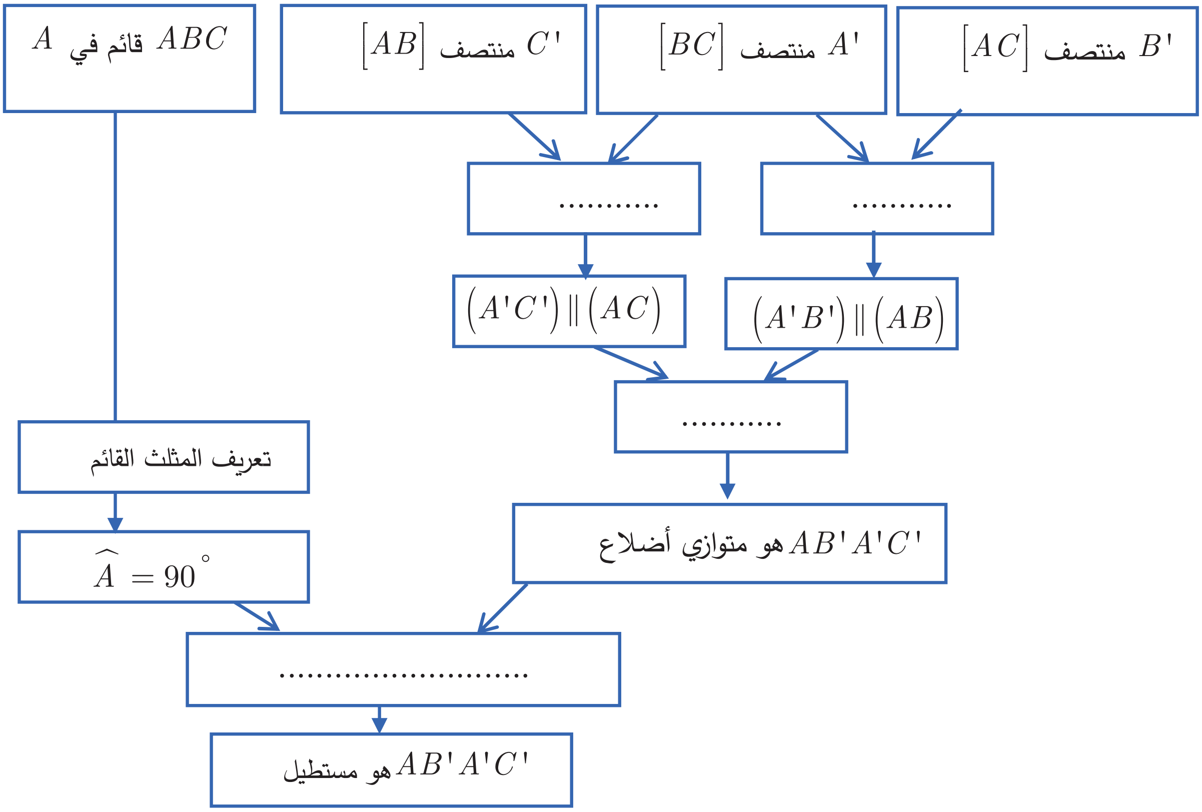
ABC مثلث قائم في A. النقطة A' هي منتصف $[BC]$ والنقطة B' هي منتصف $[AC]$ و C' هي منتصف $[AB]$. ما نوع الرباعي $AB'A'C'$؟ حقِّقْ إجابتك.

1. ما هي معطيات هذا النص؟

2. ارسم شكلاً يتفق وثبت عليه رموزاً دالة على معطيات النص.

3. إجابة من النمط « $AB'A'C'$ هو مستطيل » هل هي مرضية بالنسبة لما هو مطلوب؟

4. إليك طريقة للتحقق من إجابتك:



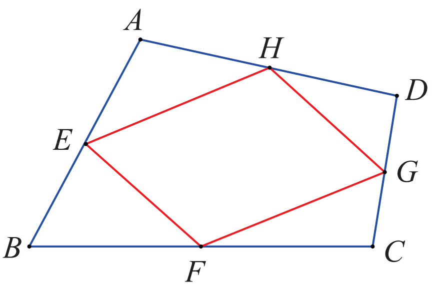
① أعد كتابة المخطط السابق وأكمله بملء الأطر المنقطة بما يناسب.

② أين تتوضع معطيات النص؟ وأين تتوضع النتيجة النهائية؟

③ صغْ إثباتاً بلغة سليمة.

21 في شكلٍ رباعي

E و F و G و H هي منتصفات أضلاع $ABCD$. أثبت أنَّ $EFGH$ هو متوازي أضلاع.



22 استعمال للمنتصف

ABC مثلث. M نقطة من الضلع $[AB]$، والمستقيم المرسوم من M موازياً (BC) يقطع الضلع AC في N. النقطة K هي صورة النقطة M وفق التناظر الذي مركزه B. L هي نقطة تقاطع القطعتين $[BC]$ و $[KN]$. أثبت أنَّ النقطة L هي منتصف القطعة $[KN]$.

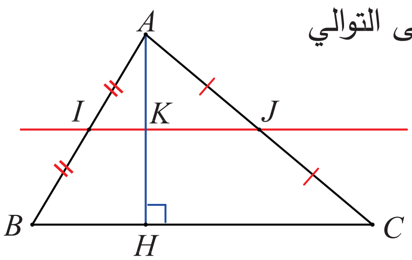
توجيه:

- ارسم شكلاً يتفق ومعطيات النص.
- رمِّزْ القطع المستقيمة المتساوية، ولوِّنْ مستقيمين متوازيين.
- لماذا يمكن استعمال مبرهنة المنتصفات الثانية؟ وفي أي مثلث؟
- أنجز الحل بلغة سليمة.

23 محور قطعة مستقيمة

1. ارسم قطعة مستقيمة $[AB]$ طولها $6\ \text{cm}$، ثم ارسم محورها (d).
2. ارسم المستقيم (d') ماراً بالنقطة B وموازياً المستقيم (d).
3. وضِّعْ النقطة E على المستقيم (d') بحيث يكون $BE = 7\ \text{cm}$.
4. ارمز إلى نقطة تقاطع المستقيمين (d) و (AE) بالرمز M.
5. أثبت أنَّ M هي منتصف القطعة المستقيمة $[AE]$.
6. لتكن N منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$. احسب مساحة المثلث AMN.

24 ارتفاع ومحور



في الشكل المرافق: $[AH]$ ارتفاع للمثلث ABC، I و J هما على التوالي منتصفا $[AB]$ و $[AC]$، والمستقيم (IJ) يقطع $[AH]$ في K.

1. أثبت أنَّ K هي منتصف $[AH]$.

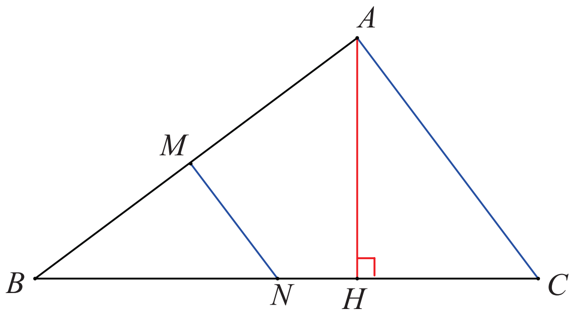
2. أثبت أنَّ المستقيم (IJ) هو محور القطعة المستقيمة $[AH]$.

25 انطلاقاً من معين

$ABCD$ معين مركزه O، والنقطة E هي نظيرة النقطة A بالنسبة إلى B.

1. ارسم شكلاً يتفق ومعطيات النص.
2. أثبت أنَّ المستقيمين (EC) و (OB) متوازيان.
3. ما نوع المثلث ACE؟ علِّلْ إجابتك.

26 محيط ومساحة مثلث



في الشكل المرافق:

(MN) و (AC) متوازيان و $[AH] \perp [BC]$.

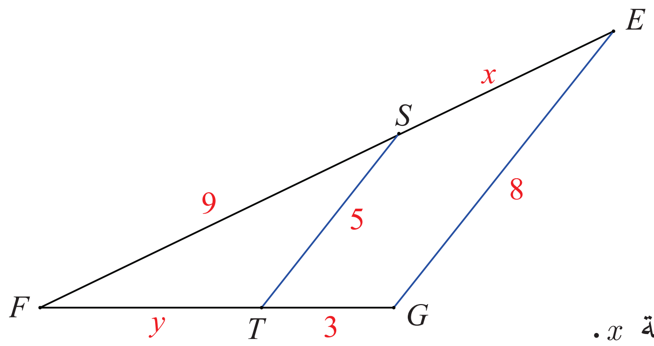
$BM = 2.4 \text{ cm}$ و $BN = 3 \text{ cm}$

و $AB = 5 \text{ cm}$ و $MN = 1.8 \text{ cm}$.

1. احسب محيط المثلث ABC.

2. $AH = 3 \text{ cm}$، احسب مساحة المثلث ABC، ثم مساحة المثلث BMN.

27 استعمال مجاهيل



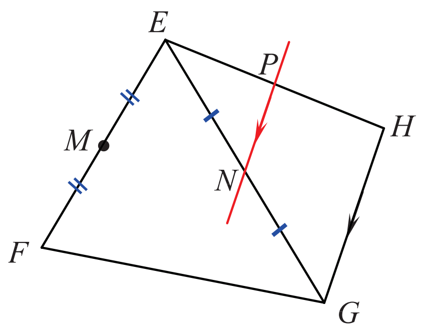
1. احسب FE بدلالة x و FG بدلالة y.

2. طبق مبرهنة « النسب المتساوية الثلاث » على المثلثين FTS و FGE.

3. استنتج أنَّ $5(9+x) = 72$، ثم احسب قيمة x.

4. احسب قيمة y، ثم استنتج أنَّ المثلث FGE هو متساوي الساقين.

28 من توازٍ إلى توازٍ



في الشكل المرافق:

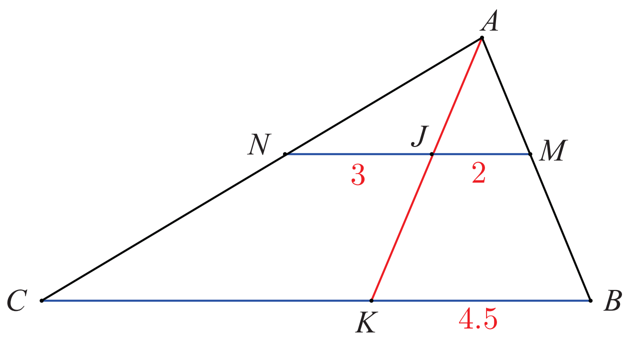
M منتصف القطعة $[EF]$ و N منتصف $[EG]$.

المستقيم (NP) يوازي (GH).

1. ما الموقع الخاص بالنقطة P. اشرح إجابتك.

2. أثبت أنَّ المستقيم (MP) يوازي المستقيم (FH).

29 نسب متساوية

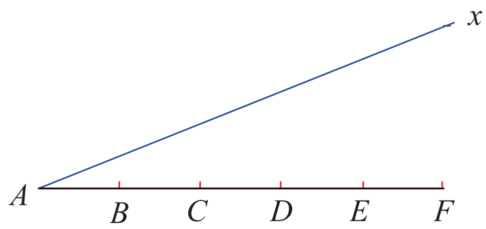


في الشكل المرافق، تجد أطوال بعض القطع.

وعُلم أنَّ $(MN) \parallel (BC)$.

احسب BC.

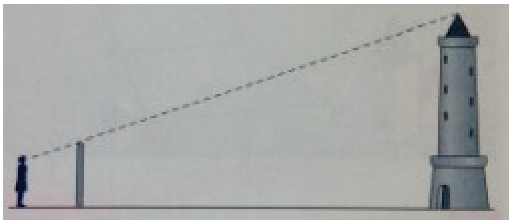
30 تقسيم قطعة مستقيمة



• تأمل الشكل المرافق، ووضّعْ نقطة M على نصف المستقيم $[Ax)$.

• دون استعمال مسطرة مدرجة، قسّمْ القطعة المستقيمة $[AM]$ إلى خمس قطع متساوية.

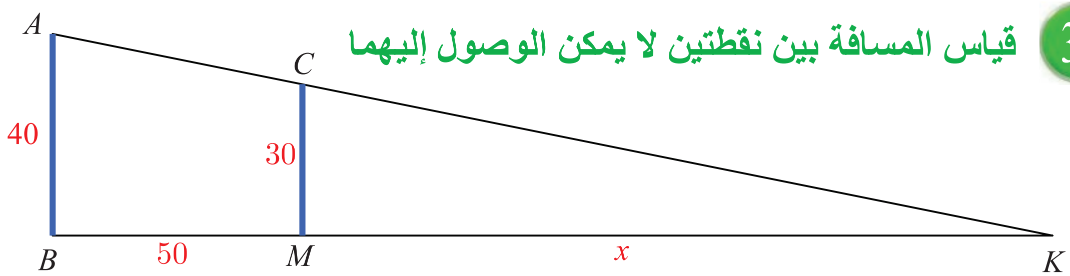
31 قياس ارتفاع برج



لقياس ارتفاع البرج الذي تشاهد تصويراً له، وقفت جوري، التي طولها $1.70\ \text{m}$، على بعد $1\ \text{m}$ من جدار ارتفاعه $2\ \text{m}$ ويبعد عن البرج مسافة $57\ \text{m}$، فرأت من البرج قمته.

1. ارسم شكلاً معبراً وارمز إلى النقاط المميزة ووضّعْ الأطوال على القطع المعلومة.
2. احسب ارتفاع البرج.

32 قياس المسافة بين نقطتين لا يمكن الوصول إليهما



$[MC]$ و $[BA]$ برجا مراقبة، ارتفاعاهما $MC = 30\ \text{m}$ و $BA = 40\ \text{m}$، $[MC]$ على شاطئ البحر و $[BA]$ على بعد $50\ \text{m}$ عن الشاطئ. K قارب في البحر على مسافة x عن البرج $[MC]$، بحيث يشاهد من A و C كما في المخطط المرسوم أعلاه.

1. اشرح لماذا $\dfrac{AB}{CM} = \dfrac{KB}{KM}$.

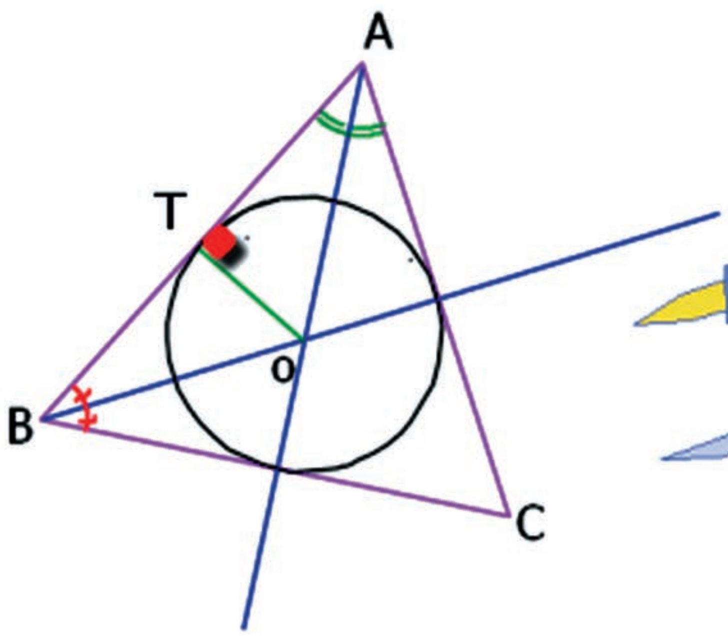
2. لاحظ أنَّ $KB = x + 50$. استفد من هذه الملاحظة لبيان أنَّ $x + 50 = \dfrac{4}{3}x$.

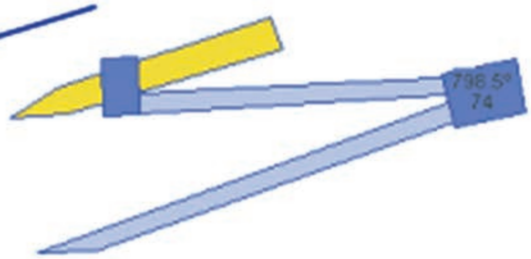
3. احسب بعد القارب عن الشاطئ.

الوحدة السابعة

متوازيات الأضلاع

1. محور ضلع في المثلث
2. ارتفاع مثلث
3. المتوسط في المثلث
4. منصف زاوية مثلث

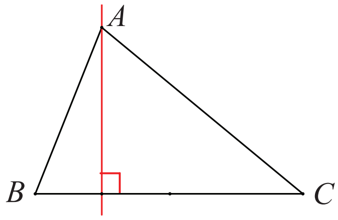




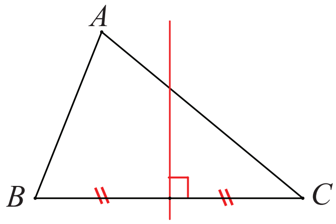
انطلاقة نشطة

في كلٍ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث ① و ② و ③ المقترحة صحيحة، ضع خطأً تحتها:

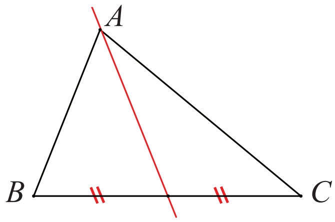
① محور الضلع $[BC]$ في المثلث ABC هو في الشكل .....



①

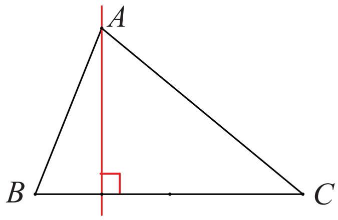


②

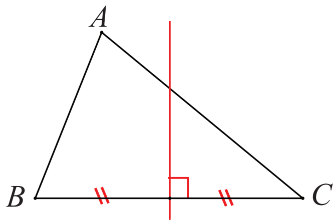


③

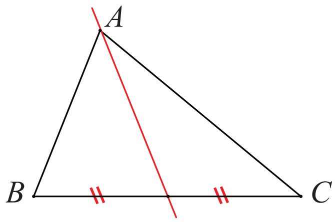
② الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC هو في الشكل .....



①



②

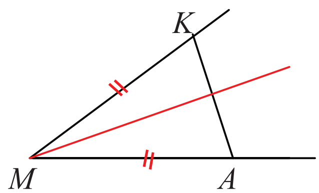


③

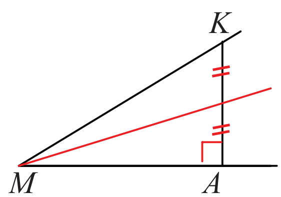
③ (d) هو محور القطعة $[JK]$ و M تنتمي إلى (d).

① $MJ > MK$ ② $MJ < MK$ ③ $MJ = MK$

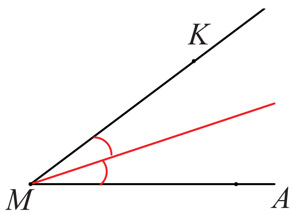
④ منصف الزاوية $\widehat{AMK}$ مرسوم في الشكل .....



①



②



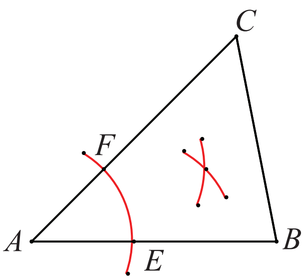
③

⑤ الأقواس الدائرية التي مراكزها E و F و A وأنصاف أقطارها متساوية تفيد في رسم:

① الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

② محور الضلع $[BC]$.

③ منصف الزاوية $\widehat{BAC}$.



1 محور ضلع في المثلث

نشاط « محاور أضلاع المثلث متلاقية »

.1 ① ارسم مثلثاً ABC ثم ارسم (d) محور ضلعه $[AB]$ و (d') محور ضلعه $[BC]$.

② ارمز إلى نقطة تقاطع (d) و (d') بالرمز O.

يجب ألا يُرسم شكل في حالة خاصة. في مثالنا لا يجب رسم مثلث قائم أو متساوي الساقين

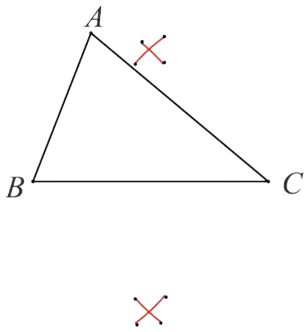
.2 ① ما خاصة المحور التي تسمح بتأكيد كلٍ من المساواتين $OA = OB$ و $OB = OC$؟

② بالاستفادة من الفقرة ①، اشرح لماذا تنتمي O إلى محور $[AC]$.

.3 ① ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها O والمارة بالنقطة A.

② تأمل ثم اشرح ما سبق.

③ أعط نقاط تمر منها الدائرة $\mathscr{C}$؟



.4 الأقواس الدائرية التي مراكزها B و C وأنصاف أقطارها متساوية

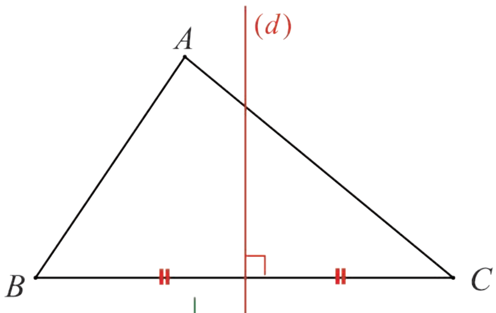
حدد مما يأتي بماذا تفيد هذه الأقواس:

① في رسم الارتفاع المتعلق بالضلع $[BC]$.

② في رسم محور الضلع $[BC]$.

③ في رسم منصف الزاوية $\widehat{BAC}$.

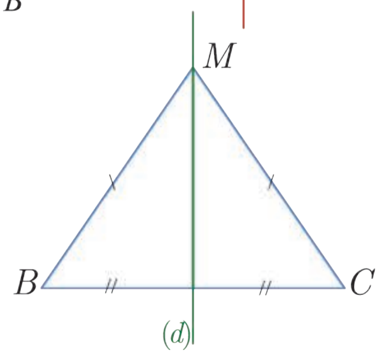
تعلم



تعريف

محور ضلع في المثلث هو المستقيم العمودي على هذا الضلع في منتصفه.

خواص

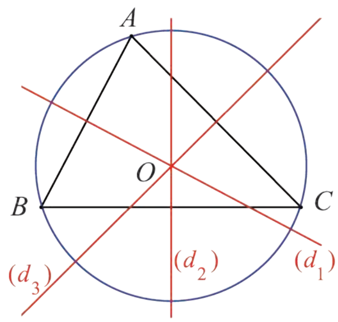


إذا كان (d) محور القطعة المستقيمة $[BC]$، عندئذ:

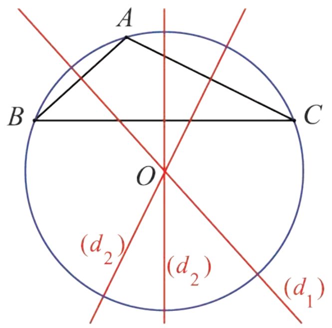
- أياً كانت M من (d)، كان $MB = MC$.
- إذا كانت النقطة M تحقق $MB = MC$، كانت M نقطةً من (d).

خاصة وتعريف

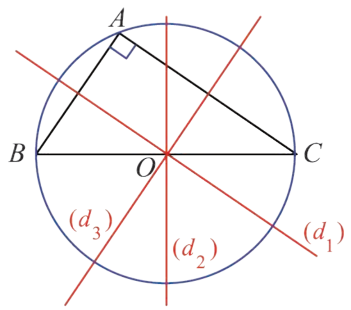
- المحاور الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة O.
- النقطة O هي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث.
- $OA = OB = OC$.



المثلث ABC حاد الزوايا



في المثلث ABC، $\widehat{A}$ منفرجة



المثلث ABC قائم في $\widehat{A}$

تحقق من فهمك

① ارسم دائرة مركزها O ووضِّعْ عليها ثلاث نقاط A و B و C.

② ارسم مستعيناً بالفرجار المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث ABC.

③ ما الملفت في الشكل الذي رسمته؟

تدرب

① ارسم مثلثاً ABC وارسم محوري ضلعيه $[AB]$ و $[BC]$. ارمز إلى نقطة تقاطعهما بالرمز M.
أثبت أنَّ المثلث MAC متساوي الساقين.

② المثلثان ABC و ABD متساويا الساقين في A.

① ارسم شكلاً.

② ما مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث BCD ؟

③ ① ارسم مثلثاً ABC أطوال أضلاعه $AB = 5$ cm و $BC = 7.5$ cm و $CA = 8$ cm.

② ارسم ثلاث دوائر مراكزها رؤوس المثلث ABC ونصف قطر كلٍ منها أكبر من 5 cm.

③ ارسم المحاور الثلاثة لأضلاع المثلث ABC.

④ ما الملفت فيما يتعلق بالدوائر الثلاث والمحاور الثلاثة؟

2 ارتفاع مثلث

نشاط

« ملاحظة ثم تأكيد أنَّ ارتفاعات المثلث متلاقية »

1. تعبير

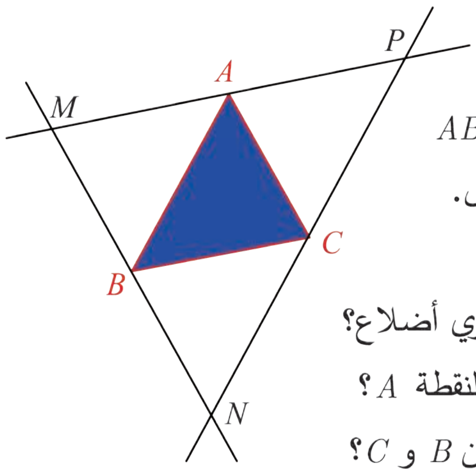
في كل من الحالات الآتية، ارسم مثلثاً ABC وارسم ارتفاعاته المتعلقة بأضلاعه الثلاثة. ماذا تلاحظ؟

1. المثلث ABC حاد الزوايا.

2. في المثلث ABC زاوية منفرجة.

3. في المثلث ABC زاوية قائمة.

2. إثبات



في الشكل المرافق ثلاثة مستقيمات مارة برؤوس المثلث ABC متلاقية في M و N و P وكل منها يوازي الضلع المقابل.

1. ارسم الشكل لديك.

2. لماذا كلّ من الرباعيين $MACB$ و $BACN$ هو متوازي أضلاع؟

اشرح، إذن، لماذا $AP = MA$؟ ماذا تستنتج فيما يتعلق بالنقطة A؟

3. بطريقة مماثلة، ماذا تستنتج فيما يتعلق بكل من النقطتين B و C؟

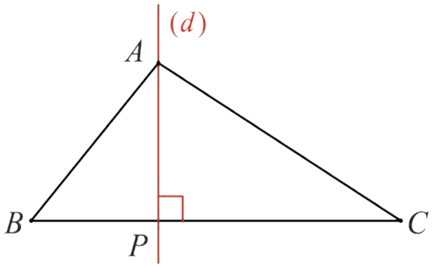
4. ارسم محاور أضلاع المثلث MNP. ارمز إلى نقطة تلاقيها بالرمز H.

5. ماذا تعني تلك المحاور بالنسبة إلى المثلث ABC؟

اشرح إجابتك، ثم اكتب نصاً، يشرح، لخاصة متعلقة بارتفاعات مثلث.

تعلم

تعريف ارتفاع المثلث



هو المستقيم المار بأحد رؤوسه والعمودي على الضلع المقابل لهذا الرأس.

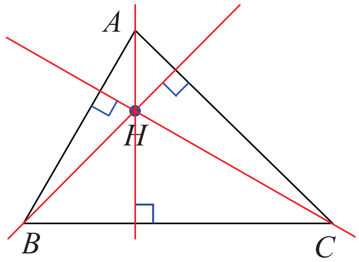
في الشكل المرسوم جانباً:

نقول إنَّ النقطة P هي موقع الارتفاع (d) المرسوم من A، وهي مسقط A على (BC).

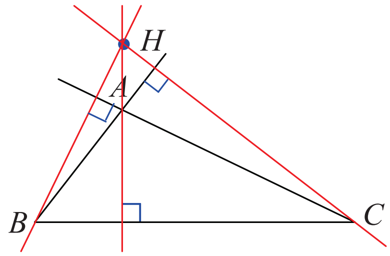
ونقول أحياناً إنَّ القطعة المستقيمة $[AP]$ هي الارتفاع المرسوم من A للمثلث ABC.

خاصة وتعريف

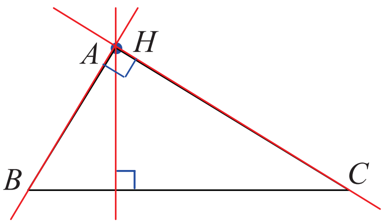
الارتفاعات الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة H.



المثلث ABC حاد الزوايا



في المثلث ABC، $\widehat{A}$ منفرجة



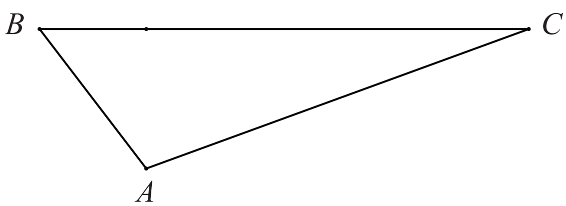
المثلث ABC قائم في $\widehat{A}$

اكتساب معارف

كيف نحدد نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث؟

- لتحديد نقطة تلاقي ارتفاعات مثلث، يكفي رسم ارتفاعين له. فتكون نقطة تقاطعهما هي نقطة تلاقي ارتفاعات هذا المثلث.

مثال ارسم مثلثاً ABC زاويته $\widehat{A}$ منفرجة، مثل المثلث المرسوم جانباً. ارسم نقطة تلاقي الارتفاعات H.

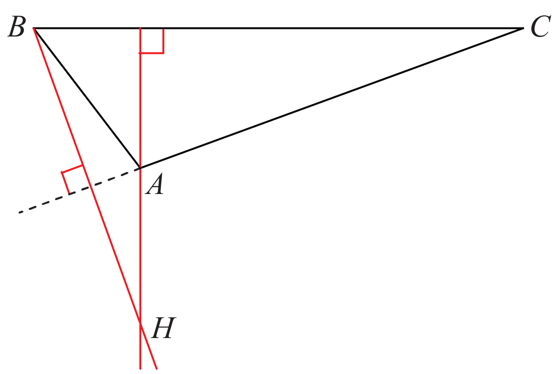


لرسم الارتفاع من الرأس B، نمدِّدْ نصف المستقيم $[CA)$.

الحل

نرسم ارتفاعي المثلث من A و B فيتقاطعان في نقطةٍ H، هي نقطة تلاقي الارتفاعات.

(لاحظ أنَّ H تقع خارج المثلث ABC)



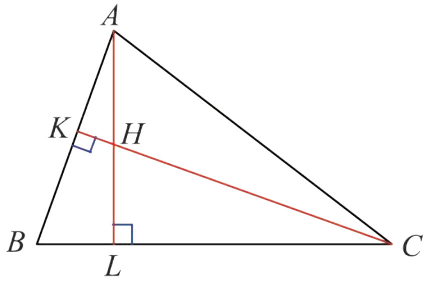
مثال $[AL]$ و $[CK]$ ارتفاعان في المثلث ABC.

H هي نقطة تلاقي الارتفاعات هذا المثلث.

أين تقع نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث AHC. اشرح إجابتك.

لتحديد نقطة تلاقي ارتفاعين نبحث عن ارتفاعين للمثلث AHC

الحل



في المثلث AHC :

(CH) و (AB) متعامدان، إذن $[AB]$ هو الارتفاع المرسوم من A.

(AH) و (CB) متعامدان، إذن $[CB]$ هو الارتفاع المرسوم من C.

هذان الارتفاعان متقاطعان في B ، فنقطة تلاقي ارتفاعات المثلث AHC هو النقطة B.

تحقق من فهمك

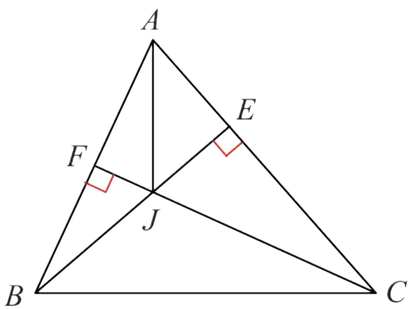
ارسم مثلثاً ABC بحيث يكون $\widehat{B} = 120^\circ$ و $BA = 5 \text{ cm}$ و $BC = 4 \text{ cm}$.

ثم عين على الرسم نقطة تلاقي ارتفاعات هذا المثلث.

تدرب

① ارسم مثلثاً ABC وارسم نقطة تلاقي ارتفاعاته H.

ما نقطة تلاقي ارتفاعات كلٍ من المثلثات AHB و AHC و BHC.



②في الشكل المجاور، $[BE]$ و $[CF]$ ارتفاعان في المثلث ABC.

النقطة J هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

ما نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث AJB. اشرح إجابتك.

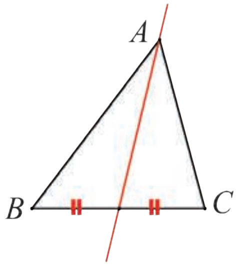
③ $ABCD$ مستطيل مركزه O. العمود المرسوم من O على (AC) يلاقي (DC) في N و (AD) في M.

1. ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات النص.
2. ما نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث AMC؟
3. ارسم الارتفاع الثالث لهذا المثلث.

3 المتوسط في المثلث

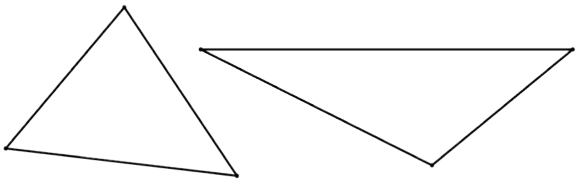
نشاط « ملاحظة ثم تأكيد أنَّ متوسطات المثلث متلاقية »

معنى الكلمات



المتوسط المرسوم من A في المثلث ABC، هو المستقيم المار بالنقطة A ومنتصف الضلع المقابل $[BC]$

1. اختبار

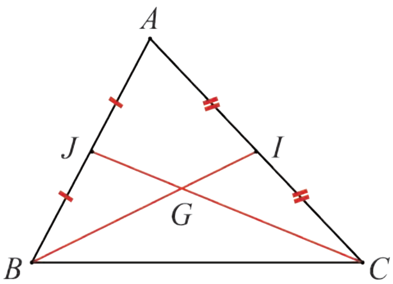


1. ارسم المثلثين ABC و EFJ.

2. ارسم المتوسطات الثلاثة لكلٍ منهما.

3. ماذا تلاحظ؟

2. إثبات



ABC مثلث، I و J منتصفا ضلعيه $[AC]$ و $[AB]$.

نرمز إلى نقطة تقاطع متوسطيه (BI) و (CJ) بالرمز G.

سنستعرض إثباتاً لكون (AG) هو المتوسط الثالث لهذا المثلث.

1. ارسم الشكل المرافق.

2. ارسم النقطة D صورة A وفق التناظر الذي مركزه G.

ارمز إلى نقطة تقاطع (AD) و (BC) بالرمز K.

3. في المثلث ABD، لماذا يمكن تأكيد أنَّ $(BD) \parallel (JG)$؟ وتأكيد أنَّ $BD = 2JG$؟

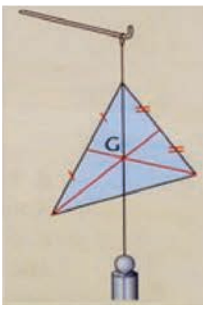
4. ما القضايا التي يمكن تأكيدها في المثلث (ACD) بمثل ما أكدت في المثلث ABD؟

5. ما طبيعة الرباعي $BGCD$؟

اشرح إجابتك، ثم استنتج أنَّ (AK) هو المتوسط الثالث في المثلث ABC.

6. اشرح لماذا: $BG = 2GI$ و $CG = 2GJ$ و $AG = 2GK$.

7. اكتب الخواص التي اكتشفتها والمتعلقة بمتوسطات المثلث ونقطة تلاقيها.



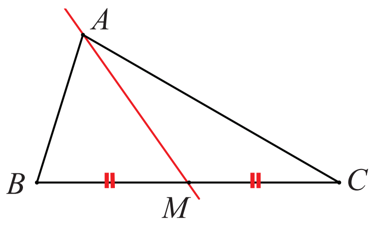
معنى الكلمات

في الفيزياء تسمى G نقطة تلاقي متوسطات المثلث « مركز ثقل المثلث ».

إذا علقت صفيحة مثلثية متجانسة، من نقطة منها فإنَّ الشاقول المار بنقطة التعليق يمر بالنقطة G.

تعلم

تعريف المتوسط



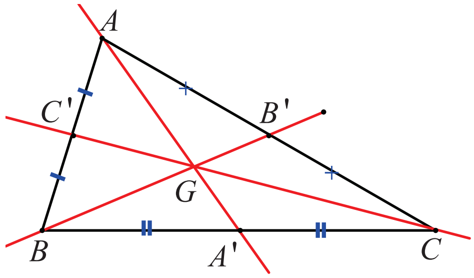
هو المستقيم المار بأحد رؤوس المثلث ومنتصف الضلع المقابلة لهذا الرأس.

في الشكل المرسوم جانباً، نقول إنَّ القطعة المستقيمة $[AM]$ هي المتوسط المرسوم من A في المثلث ABC.

خاصة وتعريف

المتوسطات الثلاثة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة G. تسمى هذه النقطة **مركز ثقل المثلث**.

خواص



نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC، ولتكن G، تقع النقطة G في نهاية الثلث الثاني لكل من المتوسطات $[AA']$ و $[BB']$ و $[CC']$، أي إنَّ:

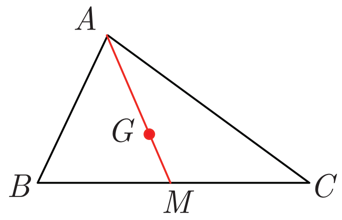
$AG = \frac{2}{3}AA'$ و $BG = \frac{2}{3}BB'$ و $CG = \frac{2}{3}CC'$.

اكتساب معارف

كيف نرسم مركز ثقل مثلث؟

لرسم مركز ثقل مثلث، يكفي رسم متوسطين فيه. نقطة تقاطعهما هي مركز الثقل.

مثال



في المثلث ABC المرسوم جانباً:

النقطة M هي منتصف $[BC]$، $G \in [AM]$

$AG = 2.4 \text{ cm}$ و $GM = 1.2 \text{ cm}$.

اشرح لماذا G هي مركز ثقل المثلث ABC.

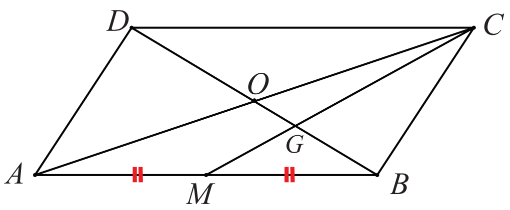
مركز ثقل المثلث هو النقطة الواقعة في نهاية الثلث الثاني من أحد المتوسطات بدءاً من رأس المثلث.

الحل

M هي منتصف $[BC]$، إذن $[AM]$ هو متوسط في المثلث ABC.

$AG = 2.4 = 2 \times 1.2 = 2GM$، أي إنَّ $AG = \frac{2}{3}AM$. وبهذا تكون G مركز ثقل المثلث.

مثال



$ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O. النقطة M هي منتصف $[AB]$، و G هي نقطة تقاطع (CM) و (BD). اشرح لماذا G هي مركز ثقل المثلث ABC.

مركز ثقل المثلث هو نقطة تقاطع إثنين من متوسطاته.

الحل

في المثلث ABC: M هي منتصف $[AB]$، إذن $[CM]$ متوسط في هذا المثلث.

O هي منتصف $[AC]$، لأنَّ قطري متوازي الأضلاع $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان في O، إذن $[BO]$ متوسط آخر في هذا المثلث.

G هي نقطة تقاطع المتوسطين $[CM]$ و $[BO]$ في المثلث ABC، فهو مركز ثقله.

تحقق من فهمك

ارسم مثلثاً ABC فيه $AB = 7 \text{ cm}$ و $\widehat{A} = 70^\circ$ و $AC = 8 \text{ cm}$.

ثم ارسم مركز ثقل هذا المثلث.

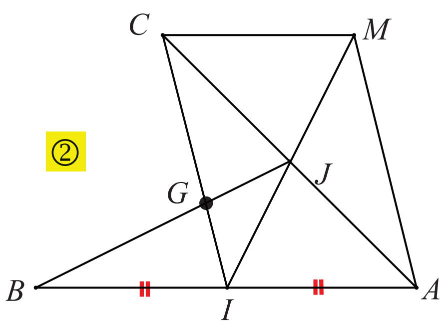
تدرب

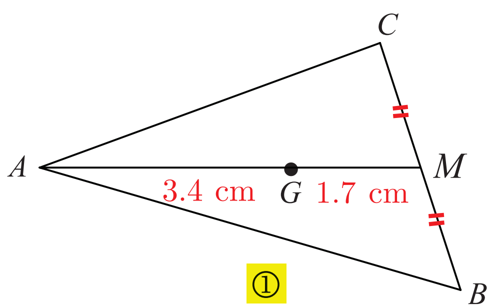
① في كلٍ من الحالتين ① و ② الآتيتين اشرح لماذا G هي مركز ثقل المثلث ABC.

① النقطة M هي منتصف الضلع $[BC]$ في المثلث ABC. $G \in [AM]$ وتحقق $AG = 3.4 \text{ cm}$ و $GM = 1.7 \text{ cm}$.

② $AMCI$ متوازي أضلاع مركزه J.

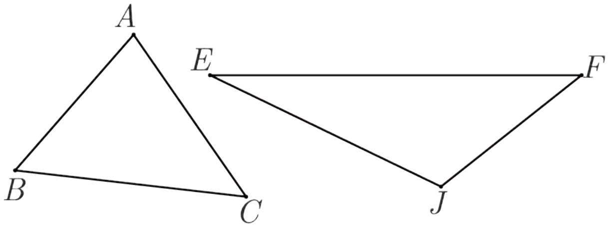
النقطة I هي منتصف القطعة $[AB]$، و G هي نقطة تقاطع المستقيمين (CI) و (BJ).





4 منصف زاوية مثلث

نشاط « ملاحظة ثم تأكيد أنَّ منصفات زوايا المثلث متلاقية »

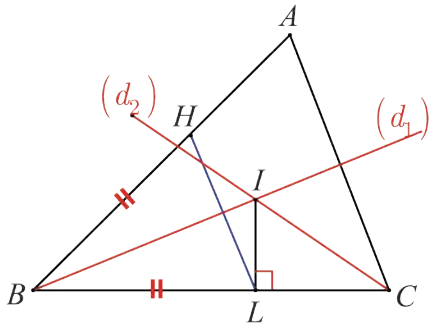


1. اختبار

1. ارسم المثلثين ABC و EFJ.

2. ارسم منصفات الزوايا الثلاث في كلّ منهما. ماذا تلاحظ؟

2. إثبات:



ABC مثلث، (d_1) و (d_2) منصفا زاويتيه $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$.

نرمز إلى نقطة تقاطع (d_1) و (d_2) بالرمز I.

سنستعرض إثباتاً لكون (AI) هو منصف الزاوية $\widehat{A}$.

1. ارسم الشكل المرافق.

2. ارسم النقطة L مسقط I على (BC). وضَعْ على $[BA]$ نقطة H تحقق $BH = BL$.

3. لماذا (BI) هو محور تناظر للمثلث BHL؟ ولماذا هو محور ضلعه $[HL]$؟

استنتج أنَّ $IH = IL$ وأنَّ $\widehat{IHB} = 90^\circ$.

4. وضَعْ على $[AC]$ نقطة K تحقق $CK = CL$. أثبت أنَّ $IK = IL$ وأنَّ $\widehat{IKC} = 90^\circ$.

5. ما صفة النقطة I في المثلث HKL؟

(سنقبل أنَّ $AH = AK$، وإثبات ذلك هو حسب مبرهنة سترد في الفصل التالي)

بعد هذا، بما يمكن أن تصف المستقيم (AI) بالنسبة إلى القطعة المستقيمة $[HK]$؟

6. اشرح إذن، لماذا (AI) هو منصف الزاوية $\widehat{A}$؟

7. ارسم الدائرة $\mathscr{C}$ التي مركزها I، والمارة بالنقطة L.

سنجد في وحدة قادمة، أنَّ الدائرة $\mathscr{C}$ تمس داخلاً أضلاع المثلث ABC في النقاط L و H و K وتسمى الدائرة الماسة لأضلاع المثلث داخلاً.

تعلم

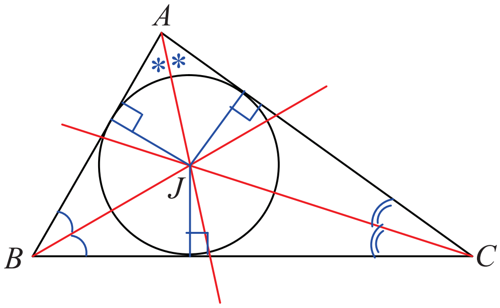
تعريف

منصف الزاوية $\widehat{A}$ هو المستقيم المار بالنقطة A ويقسم هذه الزاوية إلى زاويتين قياساهما متساويان.

خاصة وتعريف

المنصفات الثلاثة لزوايا المثلث تلتقي في نقطة واحدة J.

النقطة J هي **مركز الدائرة** الماسة لأضلاع المثلث داخلاً.



لرسم الدائرة المارة برؤوس مثلث، يكفي رسم محوري إثنين من أضلاعه. نقطة تقاطعهما هي مركز تلك الدائرة.

لرسم الدائرة الماسة لأضلاع المثلث داخلاً ، يكفي رسم منصفي إثنتين من زواياه. نقطة تقاطعهما هي مركز تلك الدائرة.

تحقق من فهمك

ABC مثلث فيه $BC = 7 \text{ cm}$ و $\widehat{CBA} = 36^\circ$ و $\widehat{BCA} = 64^\circ$.

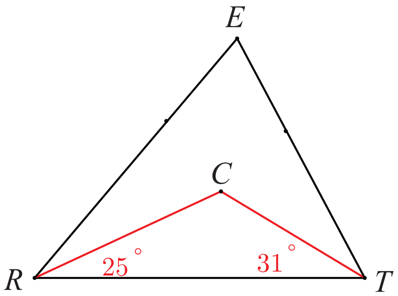
ارسم هذا المثلث وارسم منصفات زواياه الثلاث.

تدرب

① في الشكل المرسوم جانباً:

النقطة C هي مركز الدائرة المرسومة في المثلث ERT.

احسب قياس الزاوية $\widehat{RET}$. علِّل إجابتك.



② ABC مثلث فيه $\widehat{ABC} = 84^\circ$ و $\widehat{ACB} = 62^\circ$. J هي نقطة تقاطع منصفي هاتين الزاويتين.

1. ارسم شكلاً متفقاً مع معطيات النص.
2. احسب قياس الزاوية $\widehat{BAC}$.
3. احسب قياسات زوايا كلٍ من المثلثات JAB و JBC و JCA.

تمرينات ومسائل

1 **في كل حالة من الحالات الآتية، إجابة صحيحة واحدة من بين ثلاث إجابات. ضع خطاً تحتها.**

❶ في مثلث ABC، Δ محور $[BC]$ و الارتفاع المرسوم من A

① يتقاطعان في منتصف $[AB]$. ② يتقاطعان في A. ③ متوازيان.

❷ مركز ثقل المثلث هو نقطة تلاقي

① محاور أضلاعه. ② متوسطاته. ③ منصفات زواياه.

❸ مركز الدائرة الماسة لأضلاع المثلث داخلاً هو نقطة تلاقي …

① محاور أضلاعه. ② متوسطاته. ③ منصفات زواياه.

❹ مركز الدائرة المارة برؤوس مثلث هو نقطة تلاقي

① محاور أضلاعه. ② متوسطاته. ③ منصفات زواياه.

❺ إذا كان المثلثُ منفرج الزاوية، كانت نقطة تلاقي ارتفاعاته

① داخل المثلث. ② خارج المثلث. ③ لا يمكن التكهن بموقعه.

❻ G هي مركز ثقل المثلث ABC، J هي منتصف $[BC]$، إذن

① $AG = \frac{1}{3}AJ$. ② $GJ = \frac{1}{2}AG$. ③ $AJ = 3AG$.

❼ إذا كان المثلثُ حاد الزاويا، كان مركز ثقل المثلث

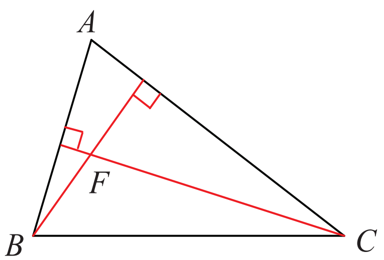
① داخل المثلث. ② خارج المثلث. ③ لا يمكن التكهن بموقعه.

❽ في الشكل المجاور، المستقيم (AF) هو

① متوسط في المثلث.

② ارتفاع في المثلث.

③ محور أحد أضلاعه.

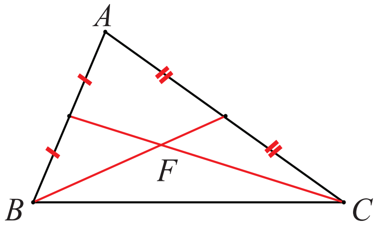


❾ في هذا الشكل المجاور، المستقيم (AF) هو

① متوسط في المثلث.

② ارتفاع في المثلث.

③ محور أحد أضلاعه.



2 قلْ إن كنت موافقاً أم لا على التأكيدات الآتية:

❶ مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث يقع دوماً داخل المثلث.

❷ نقطة تلاقي الارتفاعات للمثلث يمكن أن تقع على أحد أضلاعه دون أن تقع على أحد رؤوسه.

❸ في المثلث القائم، تقع نقطة تلاقي الارتفاعات في رأس الزاوية القائمة لهذا المثلث.

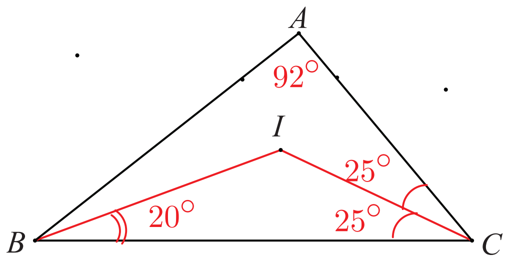
❹ في المثلث المتساوي الأضلاع، نقطة تلاقي الارتفاعات ومركزا الدائرتين المارة برؤوس والماسة لأضلاعه داخلاً ومركز الثقل، جميع هذه النقاط منطبقة.

❺ في مثلث متساوي الساقين المتوسطات هي أيضاً ارتفاعات ومحاور ومنصفات زوايا المثلث.

❻ $[AI]$ متوسط في مثلثٍ ABC. النقطة J هي منتصف $[AB]$ والنقطة K هي منتصف $[AC]$.
إذن، المستقيمان (JK) و (AI) متقاطعان في مركز ثقل المثلث ABC.

❼ في الشكل المرافق:

I هي نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث.



3 SRT مثلث متساوي الساقين في S، والنقطة M منتصف ضلعه $[RT]$.

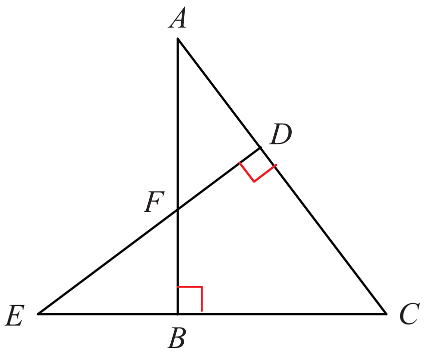
① ارسم شكلاً يناسب النص.

② لماذا تنتمي النقطة O، مركز الدائرة $\mathscr{C}$ المرسومة على المثلث SRT، إلى المستقيم (SM)؟

③ ارسم النقطة O والدائرة $\mathscr{C}$.

4 تشارك ثلاثة مزارعين في حفر بئر تملأ خزاناتهم، على أن تقع البئر على مسافات متساوية عن تلك الخزانات التي تبعد عن بعضها المسافات الآتية $30\ m$ و $19.5\ m$ و $21\ m$. ارسم مثلثاً ABC يمثل الخزانات الثلاث وأشر بنقطةٍ P إلى موقع البئر.

5 المثلثان ABC و ADE قائمان على التوالي في B و D.
النقاط A و D و C على استقامة واحدة، كذلك النقاط C و B و E. ولتكن F هي نقطة تقاطع (BA) و (ED).
أثبت أنَّ المستقيمين (AE) و (CF) متعامدان.

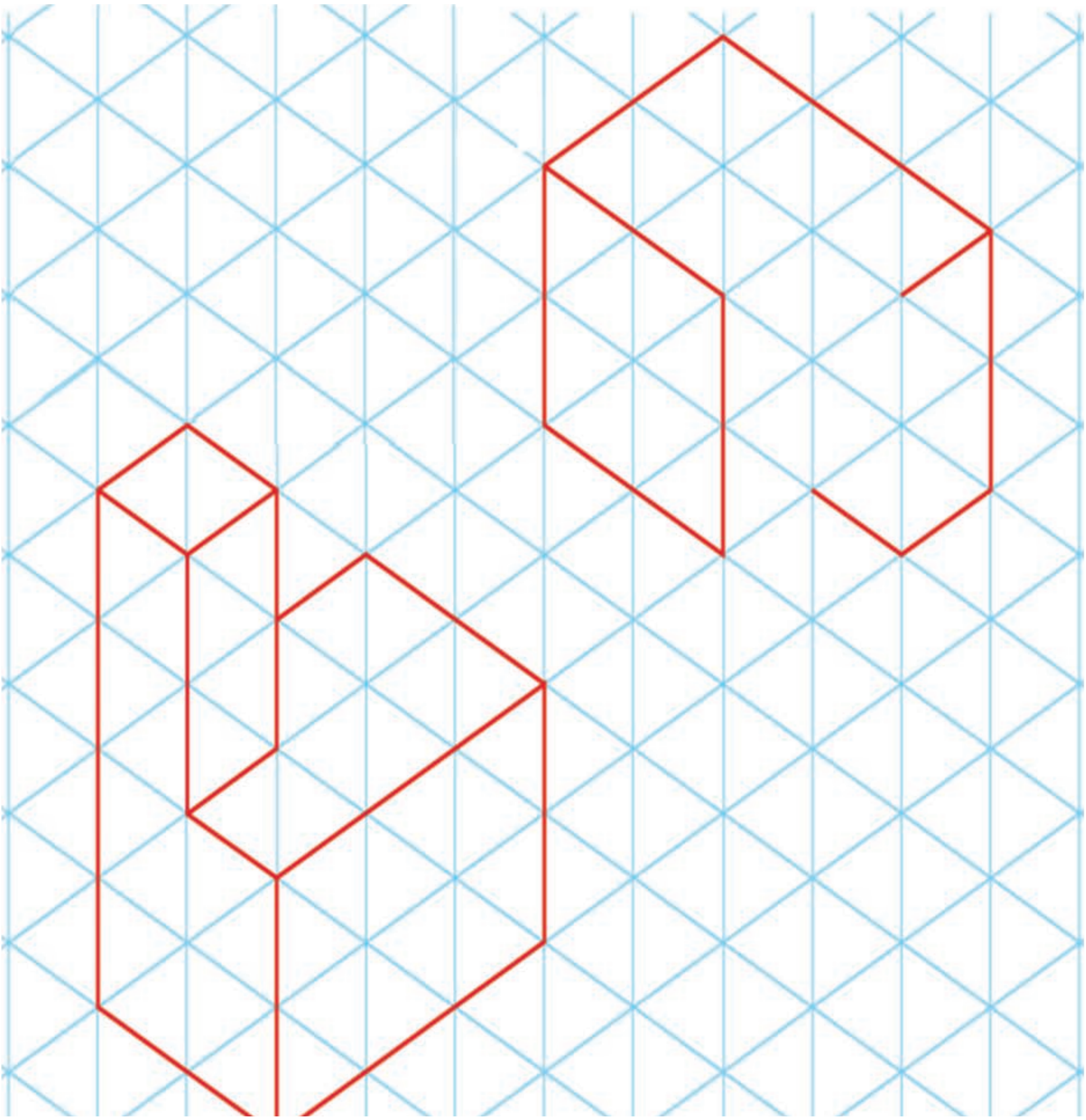


الوحدة الثامنة

المجسّمات

1. الموشور القائم

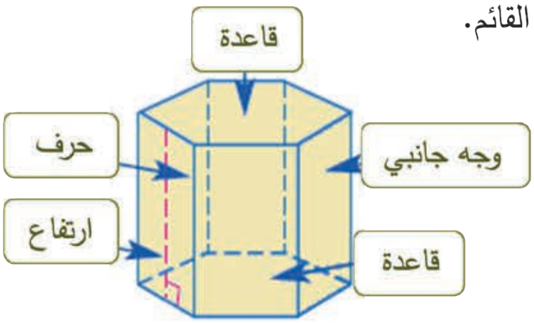
2. الاسطوانة الدورانية



1 الموشور القائم

صلة الدرس:

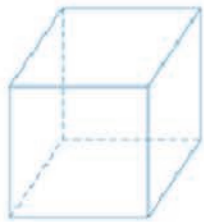
تعرفت سابقاً على الموشور القائم والآن ستحسب المساحة الجانبية والكلية وحجم الموشور القائم.



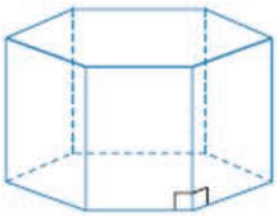
انطلاقة نشطة

أولاً:

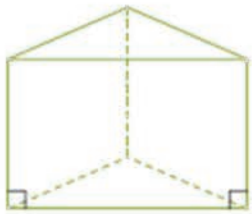
سمّي كلاً من المجسّمات:



....



....



....

....

سوف تتعلم:

- حساب المساحة الجانبية والكلية للموشور القائم.
- حساب حجم الموشور القائم

تذكر:

يسمى الموشور بحسب أضلاع قاعدته. موشور ثلاثي أو رباعي أو خماسي أو....

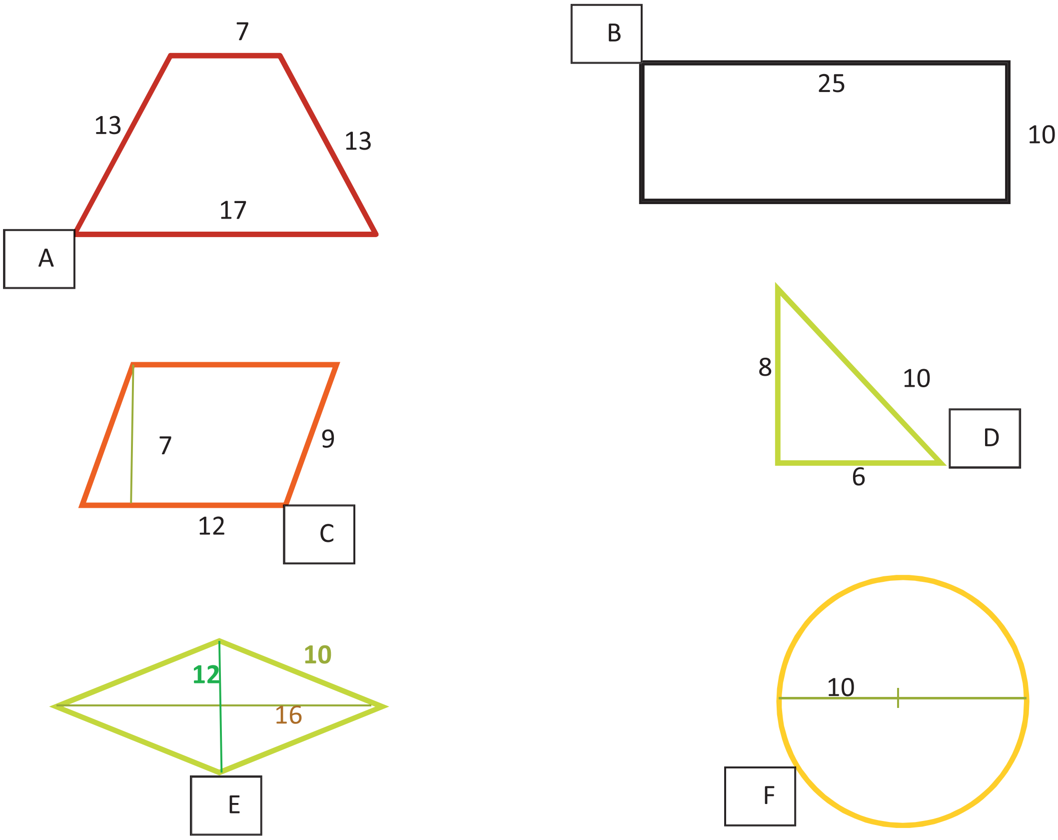
ماذا يسمى مجسم مدرستك ؟

في البناء

يتم حساب المساحة الجانبية للمدارس لمعرفة كمية المواد المطلوبة عند البناء.

ثانياً:

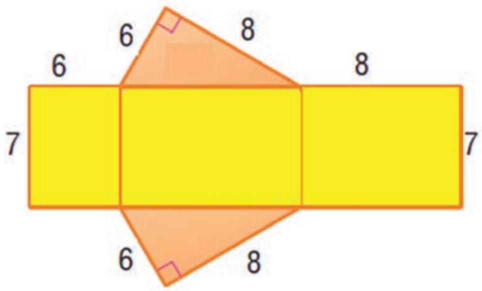
تأمل الأشكال الآتية ثم املأ الجدول الآتي:



الشكل	نوع الشكل	محيط الشكل	مساحة الشكل

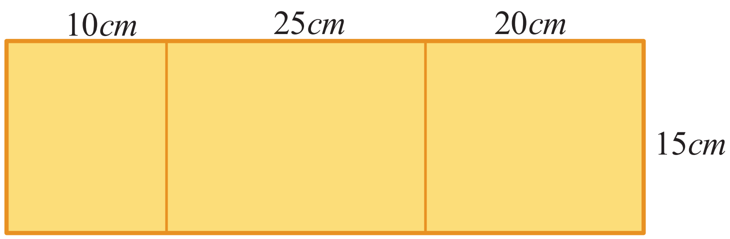
ثالثاً:

تأمل الشكل الآتي ثم احسب مساحة الجزء المظلل
باللون الأصفر



رابعاً:

قرر سامي أن يغلف علب هدايا العيد بالورق اللامع ، تناول أولاً هدية علبتها على شكل موشور قائم، أحاط السطح الجانبي للعلبة وقصّ الورقة، ثم وضعها على الطاولة، وجد أنَّ لها شكلاً مستطيلاً ، كما يظهر في الصورة المقابلة:



نلاحظ أن: مساحة هذا المستطيل هي المساحة الجانبية للموشور ،

و منه المساحة الجانبية للموشور = (مجموع أطوال أضلاع القاعدة)×الارتفاع

$$=(10+25+20)\times 15$$
$$=55\times 15=825cm^2$$

تعلم **(المساحة الجانبية والكلية للموشور):**

المساحة الجانبية للموشور القائم = محيط القاعدة × الارتفاع

$S_L=P\times h$ حيث S_L المساحة الجانبية و p محيط قاعدته $S_L=P\times h$

أما إذا أردنا حساب المساحة الكلية للموشور ، أضفنا مساحتي القاعدتين للمساحة الجانبية وكان

المساحة الكلية للموشور القائم = المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

$S_t=S_L+2\times S$

تدرب

ضع خطاً تحت الاجابة الصحيحة:

1) علبة على شكل موشور قاعدته مثلث متساوي الأضلاع ، طول ضلعه $8\ cm$ وارتفاعه $11\ cm$ ، مساحته الجانبية تساوي:

$264\ cm^2$ $176\sqrt{3}\ cm^2$ $176\ cm^2$ $35\ cm^2$

2) المساحة الجانبية لموشور قاعدته معين، طول ضلعه $5\ cm$ وارتفاعه $12\ cm$ تساوي:

$240\ cm^2$ $170\ cm^2$ $60\ cm^2$ $30 cm^2$

3) المساحة الكلية (المساحة الجانبية مع مساحتي القاعدتين) موشور قائم، قاعدته مربع طول ضلعه $6\ cm$ وارتفاعه $9\ cm$ تساوي:

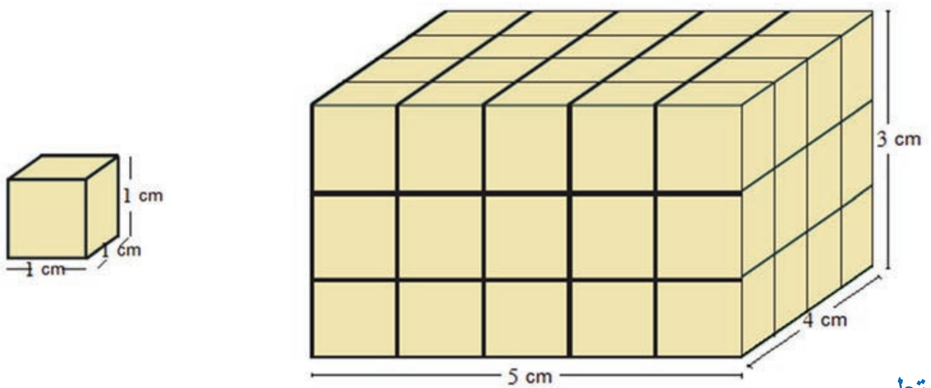
$288\ cm^2$ $324\ cm^2$ $162\ cm^2$ $54\ cm^2$

4) موشور قاعدته مثلث متساوي الأضلاع ،طول ضلعه $5\ cm$ و مساحته الجانبية $150\ cm^2$ ، ارتفاعه يساوي:

$10\ cm$ $18\ cm$ $30\ cm$ $3cm$

نشاط:

تم تشكيل متوازي مستطيلات من مكعبات طول حرف كل منها $1\ cm$ احسب حجم متوازي المستطيلات إذا علمت أن حجم المكعب $1\ cm^3$

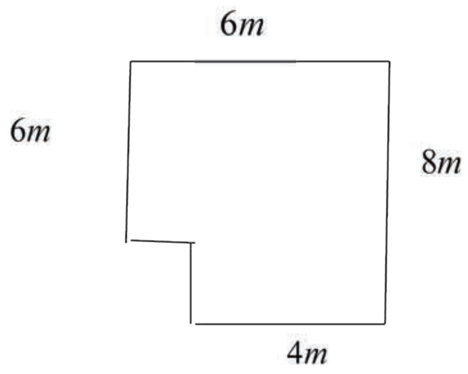


تعلم

حجم الموشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع

حجم متوازي المستطيلات = جداء أبعاده الثلاث

مثال



أراد رائد أن يزين جدران غرفته باستعمال ورق الجدران ، فإذا كان ارتفاع الغرفة $3.5\ m$، و إذا كان سقف الغرفة كما في الرسم، والمطلوب:

① كم متراً يلزمه لتزيين جدران الغرفة.

② كم متراً يلزمه إذا أراد تزيين سقف الغرفة أيضاً

الحل:

① واضح ، أن مساحة ورق الجدران هي المساحة الجانبية للموشور القائم الّذي قاعدته سقف الغرفة وارتفاعه ارتفاع الغرفة. لحساب هذه المساحة نحسب أولاً:

محيط قاعدة الموشور : محيط القاعدة = مجموع أطوال أضلاعها

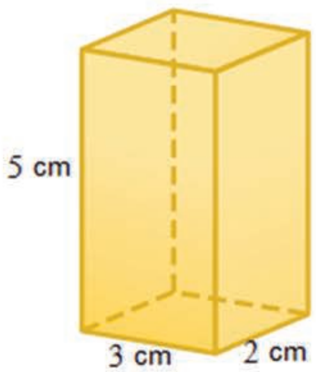
$$8+6+4+2+2+6=28m$$

مساحة الجدران = المساحة الجانبية للموشور = محيط القاعدة ×الإرتفاع

$$3.5\times 28=98m^2$$

② مساحة السقف $8\times 6-3\times 2=42\ m^2$ فتكون المساحة المطلوبة $98+42=140\ m^2$

مثال



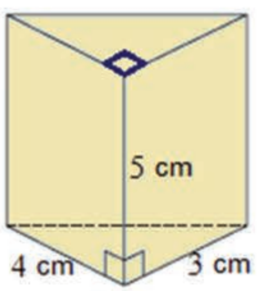
أوجد حجم متوازي مستطيلات أبعاده $2\ cm$, $3\ cm$, $5\ cm$

الحل:

إن حجم متوازي المستطيلات = جداء أبعاده الثلاث ومنه

حجم متوازي المستطيلات المعطى = $2\times 3\times 5=30\ cm^3$

مثال



احسب حجم موشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث قائم طول ضلعيه القائمين 3 cm , 4 cm وارتفاع الموشور 5 cm

الحل:

حجم للموشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع

والقاعدة مثلث قائم فمساحته تساوي نصف جداء طولي الضلعين القائمين

أي $S=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6\ \text{cm}^2$ وحجم للموشور القائم = $6\times 5=30\ \text{cm}^3$

تحقق من فهمك

الجدول الآتي يشير إلى محيط القاعدة و الارتفاع و المساحة الجانبية لعدد من المواشير القائمة أتمم الجدول

محيط القاعدة بـ cm	20	24		21	
الارتفاع بـ cm	3		8	6.5	9.2
السطح الجانبي بـ cm^2		288	152		234.6

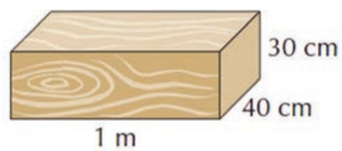
تدرب

1 مكعب مساحته الكلية تساوي $864\ cm^2$ احسب طول حرفه الجانبي

2 موشور قائم قاعدته مثلث أطوال أضلاعه $4cm, 5cm, 6\ cm$ ارتفاعه $7\ cm$.احسب المساحة الجانبية

3 احسب حجم الصندوق الخشبي الموضح جانباً

على أن يكون الجواب بالسنتيمتر.

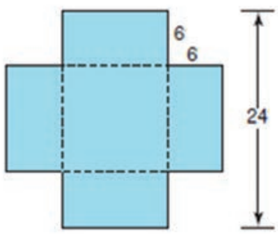


4 قطعة من الورق المقوى على شكل مربع طول ضلعه $24cm$

نريد تصميم صندوق بدون غطاء وذلك بقص القطعة السابقة من

الزوايا الأربعة على شكل مربعات طول ضلعها $6cm$ كما في

الشكل. احسب حجم الصندوق.



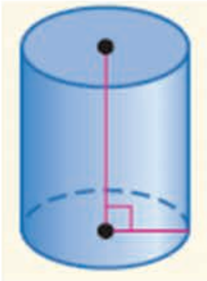
2 الاسطوانة الدورانية

سوف تتعلم:

- حساب المساحة الجانبية والكلية للأسطوانة الدورانية
- حساب حجم الأسطوانة الدورانية.

من الاستخدامات :

يتم حساب حجم صوامع الحبوب في سورية لمعرفة احتياطات سورية من القمح والحبوب الأخرى.

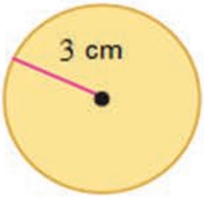


صلة الدرس:

تعرفت سابقاً على الأسطوانة والآن ستحسب المساحة الجانبية والكلية وحجم الأسطوانة

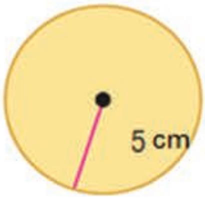
انطلاقة نشطة

أولاً:



مساحة الدائرة تساوي:

$9\pi\ cm^2$	$6\pi\ cm^2$	$3\pi\ cm^2$	$12\pi\ cm^2$

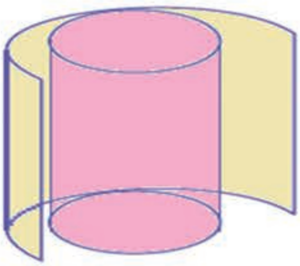


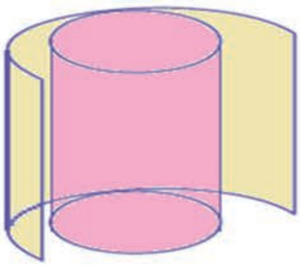
محيط الدائرة يساوي:

$10\pi\ cm^2$	$25\pi\ cm^2$	$5\pi\ cm^2$	$2\pi\ cm^2$

ثانياً:

تأمل الشكل المجاور علبة مربى أسطوانية الشكل (قطر قاعدتها = 10 cm) نزعنا عنها الورقة التي كتبت عليها المعلومات المتعلقة بمحتوى العلبة.





- ما الشكل الهندسي لقاعدة الأسطوانة.
- ما الشكل الهندسي للورقة.

- ماذا يمثل طول الورقة بالنسبة للأسطوانة.
- ماذا يمثل عرض الورقة بالنسبة لقاعدة الأسطوانة.
- مساحة القاعدة= ....
- المساحة الجانبية للأسطوانة= ....
- المساحة الكلية (المساحة الجانبية مع مساحتي القاعدتين) للأسطوانة الدورانية= ....

ثالثا :

مجموعة من النقود المعدنية وضعت فوق بعضها لتشكل اسطوانة دورانية ارتفاعها $4\ cm$ ونصف قطرها $1\ cm$ احسب حجم الأسطوانة

تعلم

المساحة الجانبية للأسطوانة الدورانية = محيط القاعدة × الارتفاع

$S_L = P \times h$ حيث S_L المساحة الجانبية و P محيط قاعدتها $S_L = P \times h$

المساحة الكلية للأسطوانة الدورانية =المساحة الجانبية + ضعف مساحة القاعدة

$S_t = S_L + 2 \times S$

حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

مثال

أسطوانة دورانية ارتفاعها $40\ \text{cm}$ ، قطر قاعدتها $9\pi\ \text{cm}^2$ ، أوجد مساحتها الجانبية ثم مساحتها الكلية ثم حجمها . (باعتبار $\pi = 3.14$)

الحل:

حساب المساحة الجانبية :

$$S_L = P \times h$$
$$= 3.14 \times 15 \times 40 = 1884\ \text{cm}^2$$

حساب المساحة الكلية :

$$\begin{aligned} S_t &= S_L + 2\times S \\ &= 1884 + 2\times 3.14\times 7.5^2 \\ &= 1884 + 2\times 3.14\times 56.25 \\ &= 1884 + 353.25 \\ &= 2237.25\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

حساب الحجم :

$$\begin{aligned} V &= S\times h \\ &= \pi\times r^2\times h \\ &= 3.14\times 15^2\times 40 \\ &= 3.14\times 225\times 40 = 28260\ \text{cm}^3 \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

1. احسب مساحة السطح الجانبي S_L و السطح الكلي S_T لأسطوانة دورانية مقرباً الجواب لأقرب رقم عشري (خذ $\pi = 3.14$) في كلاً من الحالات الآتية

نصف قطر القاعدة بـ cm	6	5	8.3
الارتفاع بـ cm	11	9	6.6

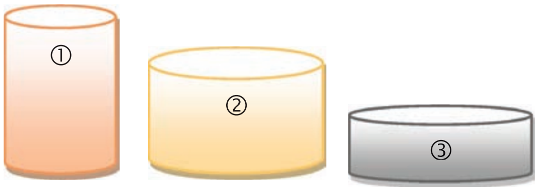
2. احسب حجم أسطوانة دورانية مقرباً الجواب لأقرب رقم عشري (خذ $\pi = 3.14$) في كلاً من الحالات الآتية

نصف قطر القاعدة بـ cm	13.25	6	6.3
الارتفاع بـ cm	7.8	36	12.1

تدرب

❶ احسب مساحة السطح الجانبي S_L محيط قاعدتها $12\ cm$ و ارتفاعها $22\ cm$

❷ في الأشكال الآتية ثلاث أسطوانات أنصاف أقطارها على التوالي $7cm, 8cm$, $6\ cm$ و ارتفاعاتها على التوالي $10.5\ cm$, $12\ cm$, $14\ cm$.

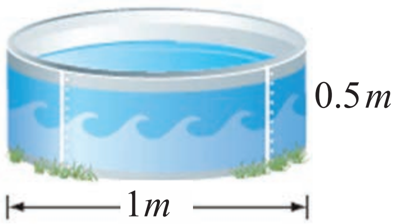


① تحقق من أن المساحة الجانبية لكل من هذه الأسطوانات متساوية .

② هل الحجم لكل من هذه الأسطوانات متساوية ، اشرح إجابتك .

❸ اسطوانة دورانية ارتفاعها $11\ cm$ وقاعدتها قرص دائري نصف قطره $4\ cm$ ، احسب مساحة سطحها الجانبي S_L وسطحها الكلي S_T مقرباً الجواب لأقرب رقمين عشريين (خذ $\pi = 3.14$)

❹ احسب حجم حوض الماء الموضح جانباً.



تمرينات

1- موشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث قائم طولا ضلعيه القائمين $5\ cm$, $12\ cm$ والمساحة الكلية للموشور تساوي $540\ cm^2$ احسب ارتفاع الموشور.

2- موشور قائم ثلاثي قاعدته مثلث وارتفاعه يساوي $7\ cm$ ومحيط كل وجه من أوجهه الجانبية $24\ cm$

① احسب المساحة الجانبية للموشور.

② احسب أبعاد أوجهه الجانبية.

③ احسب المساحة الكلية للموشور إذا علمت أن مساحة قاعدته تساوي $9.5\ cm^2$.

3- موشور قائم قاعدته شبه منحرف $ABCD$ قائم في B و C فإذا علمت أنّ:

$DC = 2\ cm$, $BC = 3\ cm$, $AD = 5\ cm$, $AB = 6\ cm$ وأنّ ارتفاع الموشور $AB = 2.7\ cm$

① احسب المساحة الجانبية للموشور.

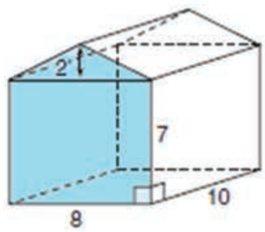
② احسب المساحة الكلية للموشور.

③ احسب حجم الموشور.

4- موشور قائم قاعدته معين ارتفاعه يساوي $13cm$ ومساحته الجانبية تساوي $221\ cm^2$ احسب محيط قاعدته واستنتج طول ضلعها.

5- موشور قائم قاعدته مثلث قائم أطوال أضلاعه $8cm$ ، $6cm$ وارتفاعه $13cm$ احسب المساحة الجانبية والكلية وحجم الموشور.

6- مستودع على شكل موشور خماسي قائم قاعدته ابعاده كما في الشكل أحسب إمكانية سعة المستودع (حجمه).



7- موشور قائم ثلاثي ارتفاعه يساوي $7m$ ومحيط كل وجه من أوجهه الجانبية $24m$

① ما هي ابعاد أوجهه الجانبية.

② احسب المساحة الجانبية والمساحة الكلية إذا علمت أن

8- حوض سمك على شكل مكعب طول حرفة $50\ cm$

① هل يمكن لهذا الحوض أن يحوي 150 لتر من الماء؟

② ملأنا الحوض بـ 100 لتر من الماء ما ارتفاع الماء في الحوض؟

9- متوازي مستطيلات مساحته الجانبية تساوي $144\ cm^2$ فإذا كان طول القاعدة تساوي ثلاثة أضعاف العرض وارتفاع متوازي المستطيلات يساوي ضعفي عرض القاعدة احسب المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات.

10- موشور قائم قاعدته مثلث، أطولا أضلاعها $4.2\ cm$, $5\ cm$, $7\ cm$ و ارتفاعه يساوي $h\ cm$ مساحته الجانبية تساوي $178.2\ cm^2$

① تحقق أن $16.2 \times h = 178.2$

② احسب ارتفاع الغرفة h

11- اسطوانة دورانية ارتفاعها يساوي h ، وقاعدتها قرص دائري قطره $9\ cm$، ومساحة سطحها الجانبي تساوي $354\ cm^2$

① تحقق أن $18\pi \times h = 354$

② احسب القيمة الحقيقية لـ h ثم قيمته التقريبية لأقرب رقم عشري واحد (خذ $\pi = 3.14$).

12- أمامك اسطوانتان دورانيتان:

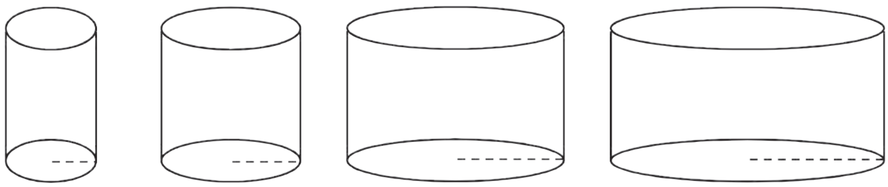
①ارتفاعها $18\ cm$ ونصف قطر قاعدتها $7\ cm$.

② ارتفاعها h ونصف قطر قاعدتها $14\ cm$.

احسب القيمة الحقيقية لحجم الأسطوانة ①

إذا كان حجم الأسطوانة ② يساوي حجم الأسطوانة ① احسب ارتفاع الأسطوانة ②

13- الأسطوانات الأربع الآتية لها الارتفاع h نفسه $h = 4\ m$ لكن لها أنصاف أقطار مختلفة



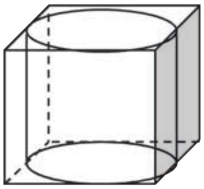
$r = 1$ $r = 2.5$ $r = 3.5$ $r = 5$

① احسب القيمة الحقيقية لحجم كل أسطوانة

② هل حجوم هذه الاسطوانات متناسبة مع أنصاف اقطارها؟

14- اسطوانة دورانية ارتفاعها $6.7\ dm$ وقاعدتها قرص دائري قطره $39\ mm$، مساحة سطحها الجانبي S_L مقدرة بـ cm^2 احسب لأقرب رقمين عشريين S_L (خذ $\pi = 3.14$)

15- تتوضع أسطوانية دورانية داخل مكعب بحيث تلامس قاعدتاها وجهين متقابلين للمكعب ويلامس سطحها الجانبي الأوجه الباقية للمكعب فإذا كان طول حرف المكعب $4\ cm$ ، أي من الأعداد التالية يدل على مساحة قاعدة الأسطوانة
16π , 8π , 4π , 16 , 2 ؟



16- علبة مجوهرات لها الشكل الآتي
(تركيب موشور قائم ونصف اسطوانة دورانية)
احسب المساحة الجانبية و حجم هذه العلبة.