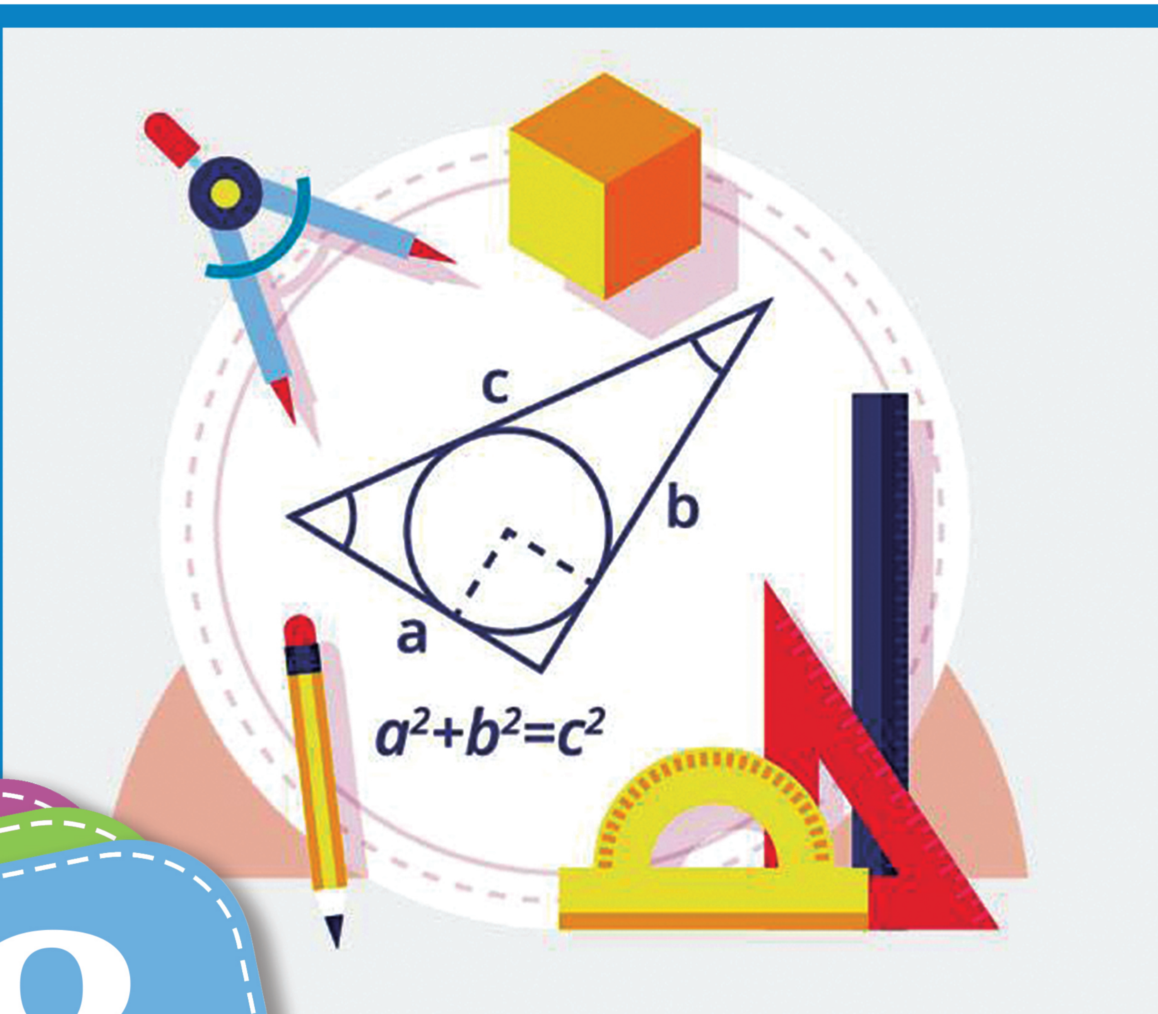
كتاب الرّياضيّات الهندسة

الصفّ الثّامن

منهاجُ التّعلّم التّمكينيّ



8

2025 م - 1446 هـ

كتاب
الرّياضيّات
الهندسة

الصّف الثّامن

منهاج التّعلّم التّمكينيّ

العام: 2025م - 1446هـ

المقدمة

تُعدُّ مادَّة الرِّياضيَّات مادَّة أساسيَّة من موادّ التّعلُّم التَّمكينيّ، وهي موجودة في جميع مراحل التعلُّم الّتي تتطوَّر لدى المتعلِّم تطوّراً تدريجيّاً.

أُعدَّ هذا الكتاب ليوجِّه المتعلِّمين الذين لا يستطيعون الوصول إلى المدرسة لتلقّي التَّعليم، ومساعدتهم في التَّعلُّم وتلقّي العلم وامتلاك المهارات والمفاهيم المطلوبة وفق خطَّة وزارة التَّربية.

صُمِّم هذا الكتاب وفق مَدخل المعايير، وبُنِي وفق أنشطة تعليميَّة تحفيزيَّة متدرِّجة ومتضمّنة معلومات إثرائيَّة تُسهم في امتلاك المتعلِّمين المعارف والمهارات والقيم، ويليها اختبار يقيس مدى امتلاك المتعلِّمين لهذه المعلومات والمهارات ومن ثَمَّ تأتي ورقة عمل الوحدة، ومهمّتها تثبيت المعلومة وامتلاك المهارة وكذلك ربط دروس الوحدة.

تعزِّز هذه الأنشطة المهارات الأساسيَّة، مثل استعمال أساليب التَّفكير المنطقي السَّليم، والتَّعلم بالاكتشاف وحلّ المشكلات واتّخاذ القرار، بهدف اتّباع الأسلوب العلميّ المناسب في حلّ التَّمارين والمسائل. كما وُضِعت أنشطة تناسب القيم الحياتيَّة مما يجعل تمثُّل القيم أمراً حياتيّاً مُستداماً، وخاصّة القيم المتعلِّقة بالعدالة والمساواة.

نأمل من متعلّمينا مراعاة تسلسل الوحدات والدُّروس، وطريقة بنائها الواردة في هذا الكتاب عند دراستها، ومن ثَمَّ دراسة الوحدة وفهمها فهماً تامّاً، كذلك الالتزام بحلّ أنشطة الكتاب واختباراته جميعِها، ومن ثَمَّ تعزيز الحلّ من خلال فقرة أتحقّق من إجابتي في آخر كل نشاط.

المؤلِّفون

جدول الأيقونات

 أديرُ تعلّمي	تعليمات حول تنظيم التعلّم أجدها في دليل (كيف أتعلّم؟).
 الكلمات المفتاحيّة	الكلمات الجديدة في كلّ درس.
 المدّة	الوقت الذي أحتاجه لدراسة دروس الوحدة أو أنشطة الدرس.
 هدف النّشاط	الهدف المطلوب تحقيقه في نهاية النّشاط.
 أدواتي	الأدوات التي أحتاجها في أثناء تنفيذ النّشاط.
 المعايير	المعايير التي بنيت عليها أنشطة كلّ درس.
 تعليمة النشاط	تعليمات النّشاط.

محتويات الكتاب

استكشاف محطات الكتاب

1 الأيقونات

صفحة للتعرّف على أنواع الأيقونات ودلالاتها.

2 افتتاحيّة الوحدة

عنوان الوحدة وزمنها وأهمّيّة العودة إلى دليل (كيف أتعلّم؟)

3 دروس الوحدة

عناوين دروس الوحدة وأرقامها وصور معبّرة عنها.

12 كيف أحبّ أن أتعلّم؟

تحديد الطرائق التي تساعد على التعلّم

11 ورقة عمل

تمارين إضافيّة لزيادة المهارة ولربط دروس الوحدة.

لا تنسَ حلول أوراق العمل في نهاية الكتاب

10 ألخّص درسي

المهارات والمعارف المكتسبة من الدّرس ومثال يوضّح كلّاً منها.

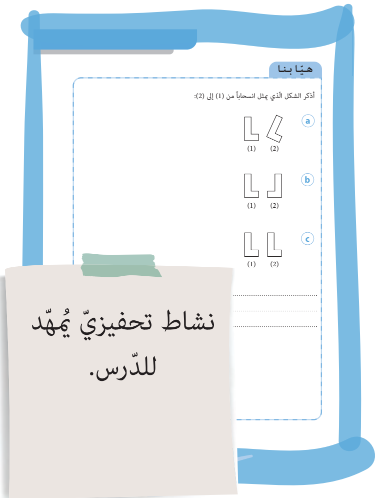
4 هيّا نبدأ

نشاط تحفيزيّ يُمهّد للوحدة.

5 افتتاحيّة الدّرس

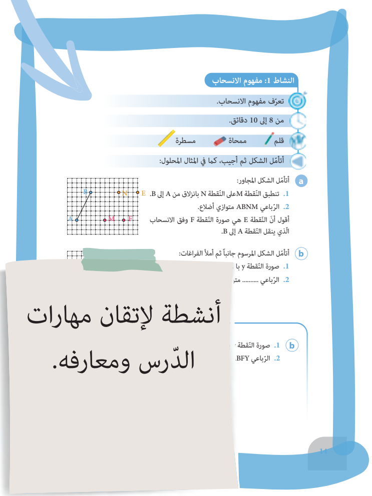
عنوان الدّرس وكلماته المفتاحية وزمنه ومعاييره وأدواته.

6 هيّا بنا



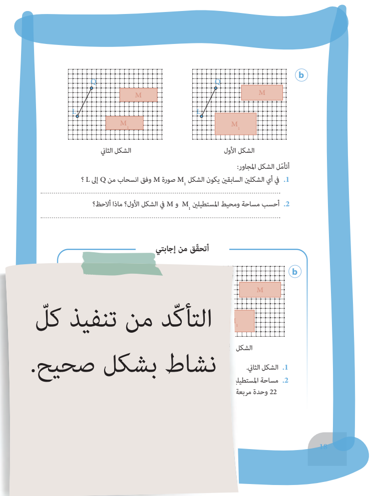
نشاط تحفيزيّ يُمهّد للدّرس.

7 نشاط الدّرس



أنشطة لإتقان مهارات الدّرس ومعارفه.

8 أتحقّق من إجابتي



التأكّد من تنفيذ كلّ نشاط بشكل صحيح.

9 أختبر نفسي

اختبار متنوّع يغطي مهارات ومعارف الدّرس.

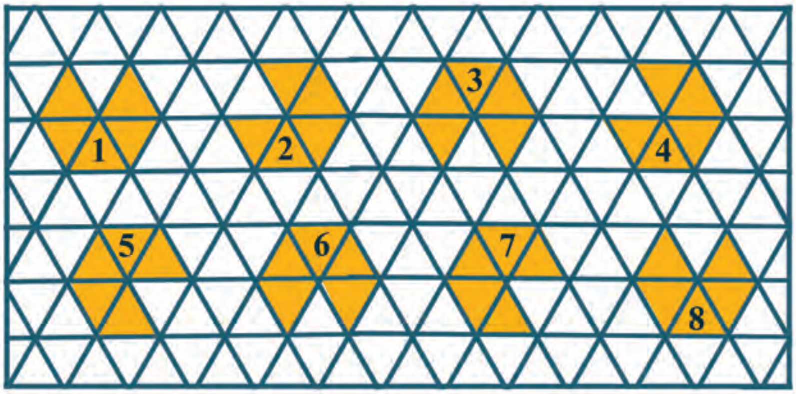
الوحدة الأولى: الانسحاب وخواصه

من 3:30 الى 4:30 ساعات.

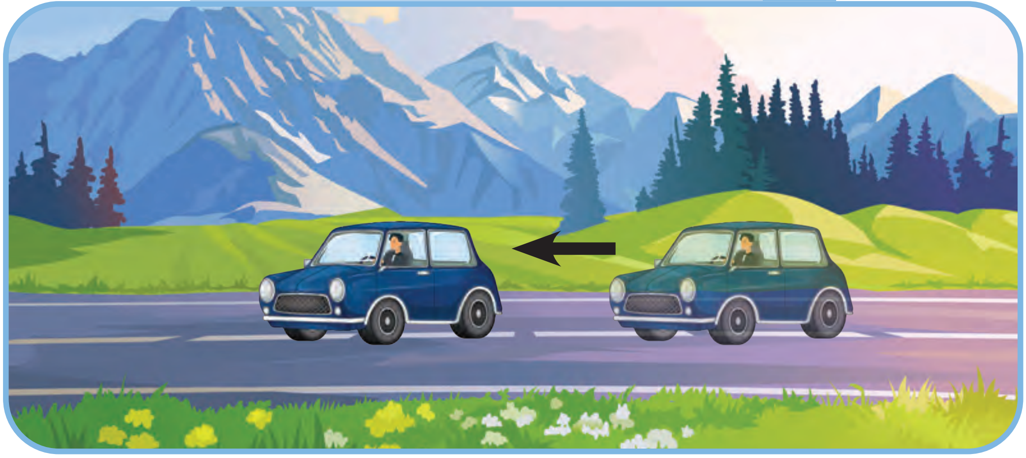
قبلَ أنْ تبدأَ دراسةَ هذهِ الوحدةِ، استعنْ بدليلِ "كيفَ أتعلّمُ؟" لتنظيمِ وقتكَ وفقَ جداولِ توزيعِ المهامِّ الأسبوعيّةِ.
كما يمكنُكَ تقييمُ تَعلّمِكَ وصولاً لإتقانِ مهاراتِ التّعلّمِ في دراسةِ موادِّ منهاجِ التّعلّمِ التّمكينيِّ الآتيةِ: الرياضيّاتِ، واللُّغةِ العربيّةِ، وعلم الأحياء والفيزياء والكيمياء، واللغة الفرنسيّة، واللُّغةِ الإنكليزيّةِ.

دروس الوحدة

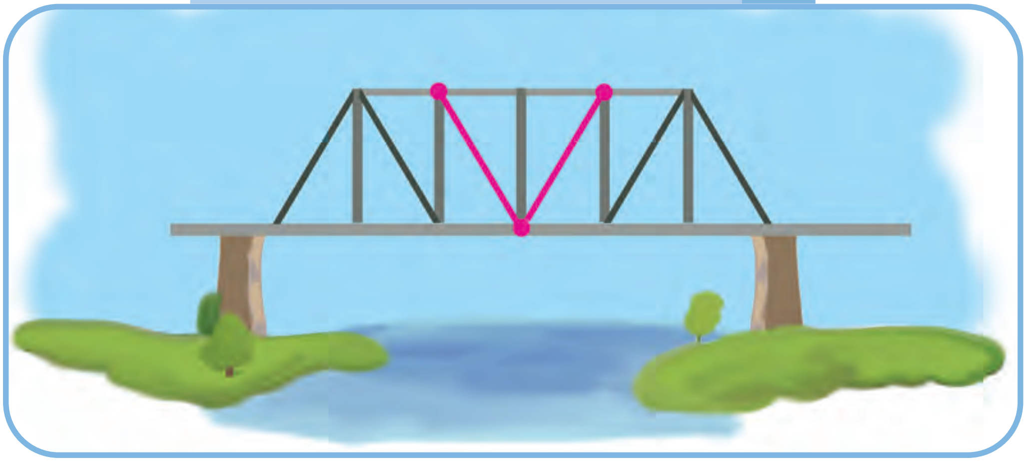
1 الانسحاب وخواصه



2 صورة شكل هندسي وفق انسحاب



3 تطابق المثلّثات



هيا نبدأ

كيف استخدم مفهوم الانسحاب والتطابق في حل المشكلات؟

استخدام مفهوم الانسحاب والتطابق في حل المشكلات.

من 8 إلى 10 دقائق.

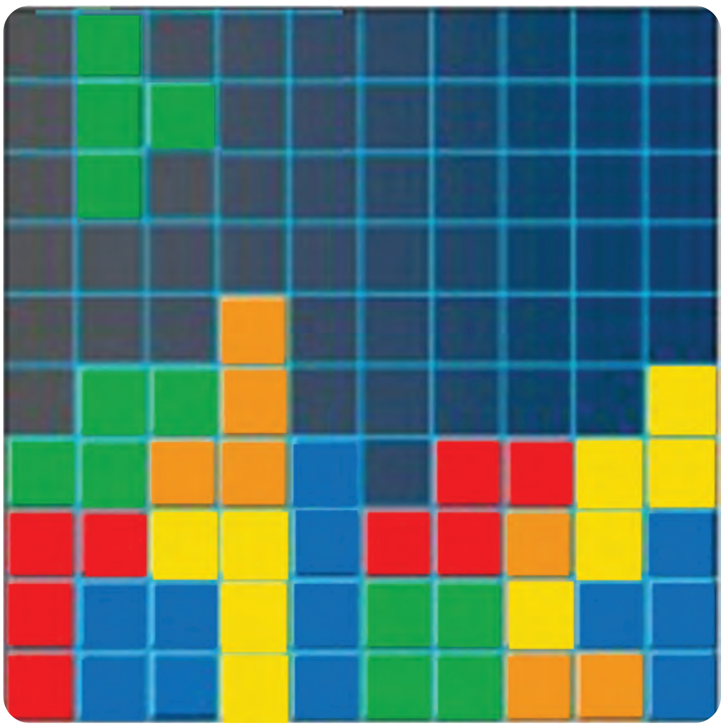
قلم ممحاة ألوان

أجيب عن الأسئلة الآتية:

a في أحد العاب الفيديو الهدف من اللعبة هو تحريك القطعة ذات اللون الاخضر في اعلى الشاشة نحو اليمين أو اليسار والأسفل لملئ كل صف ادناه بدون ترك فراغات، أصف تحريك مناسب للقطعة الخضراء لتحقق الهدف:

....

....



b أراد شاب أن يحسب المسافة بين النقطتين B و C فقام بتعيين نقطة أخرى D ليستعملها كنقطة مرجعية بحيث تكون العلاقات بين القطع المستقيمة كما هو موضّح في الصورة، اذا علمت أن طول DF = 50 m أحسب المسافة بين B و C.

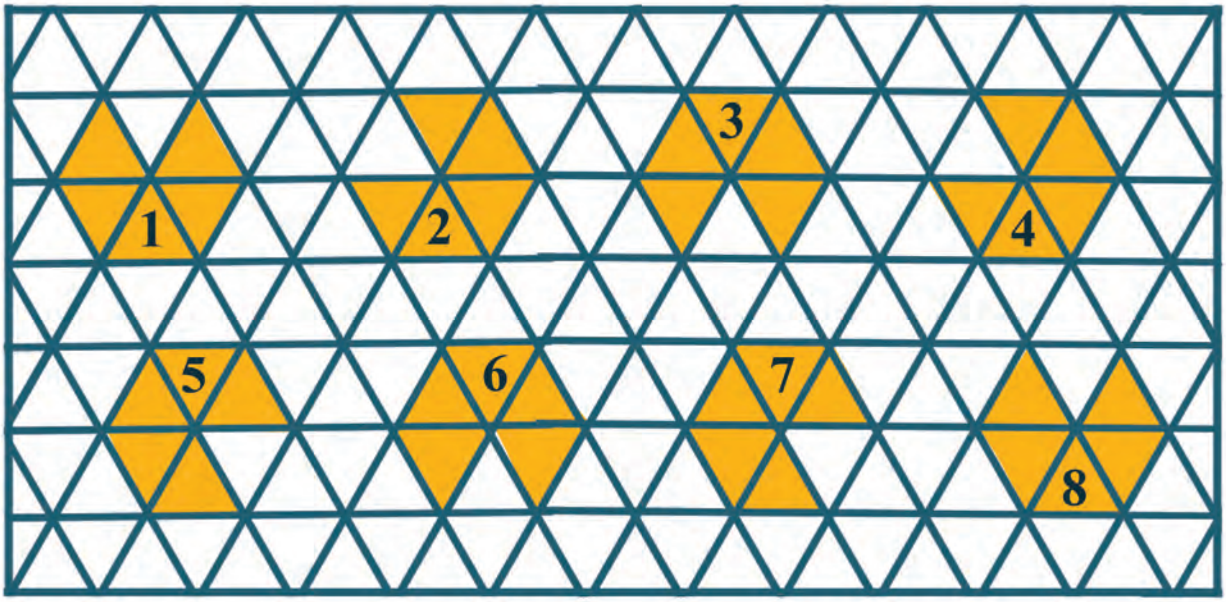
أتحقّق من إجابتي

a أحرّك القطعة الخضراء إلى اليسار بمقدار مربّع واحد، ثمّ إلى الأسفل بمقدار ثلاثة مربّعات.

b يبدو من الشكل أن المثلّثين ABC و DFA متطابقين لذلك يكون:

$$BC = DF = 50$$

الدّرس الأول: الانسحاب وخواصه



متوازي الأضلاع   الانسحاب

- تحديد خواص الانسحاب وإنشاء صورة نقطة أو قطعة مستقيمة أو مستقيم أو نصف مستقيم أو دائرة وفق الانسحاب.

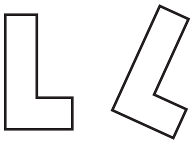
من 1:00 إلى 1:30 ساعة.

قلم   ممحاة   مسطرة

هيّا بنا

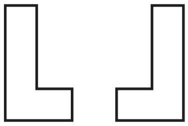
أذكر الشكل الّذي يمثل انسحاباً من (1) إلى (2):

a



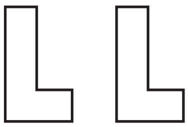
(2) (1)

b



(2) (1)

c



(2) (1)

النشاط 1: مفهوم الانسحاب

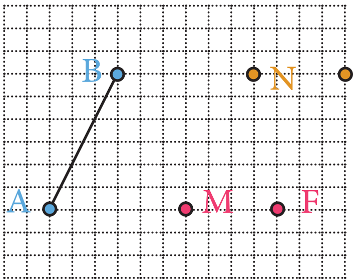
تعرّف مفهوم الانسحاب.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

أتأمّل الشكل ثم أجيب، كما في المثال المحلول:

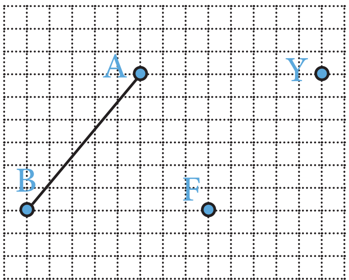
a أتأمّل الشكل المجاور:



1. تنطبق النّقطة M على النّقطة N بانزلاق من A إلى B.
2. الرّباعي ABNM متوازي أضلاع.

أقول أنَ النّقطة E هي صورة النّقطة F وفق الانسحاب الّذي ينقل النّقطة A إلى B.

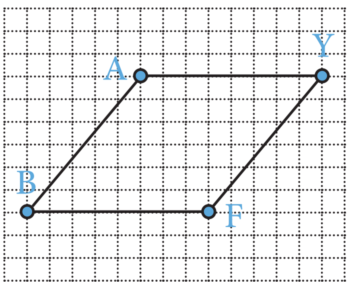
b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً ثم أملأ الفراغات:



1. صورة النّقطة y بانسحاب من A إلى B هي ....
2. الرّباعي .... متوازي أضلاع.

أتحقّق من إجابتي

b
1. صورة النّقطة y بانسحاب من A إلى B هي F
2. الرّباعي ABFY متوازي أضلاع.



النشاط 2: الانسحاب والأطوال

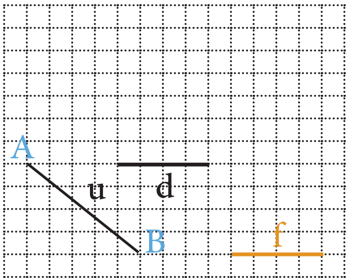
استنتاج أن الانسحاب يحافظ على الأطوال.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم   ممحاة   مسطرة

أحسب أطوال القطع المستقيمة مستفيداً من خواصّ الانسحاب، كما في المثال المحلول:

a أتأمّل الشكل المرسوم جانباً:

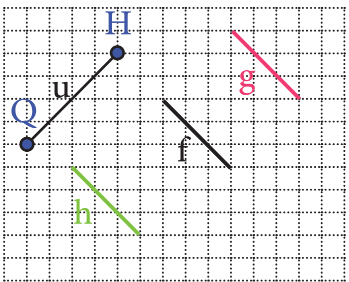


1. صورة القطعة d وفق انسحاب من A إلى B هي القطعة f.
2. أقيس بالمسطرة طول القطعة d وطول القطعة f.

ماذا ألاحظ؟

نلاحظ أنّ طول القطعة d يساوي طول القطعة f.

b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً:



1. صورة القطعة f وفق انسحاب من Q إلى H هي القطعة ....
2. صورة القطعة f وفق انسحاب من H إلى Q هي القطعة ....
3. أقيس بالمسطرة طول القطع f و g و h، ألاحظ أنّ ....

أتحقّق من إجابتي

b
1. صورة القطعة f وفق انسحاب من Q إلى H هي القطعة g.
2. صورة القطعة f وفق انسحاب من H إلى Q هي القطعة h.
3. ألاحظ أنّ القطع متساوية الطول.

النشاط 3: الانسحاب وقياسات الزوايا

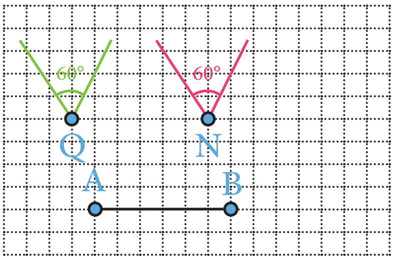
استنتاج أن الانسحاب يحافظ على قياسات الزوايا.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

أحسب قياسات زوايا مفقودة بالاعتماد على خواصّ الانسحاب، كما في المثال المحلول:

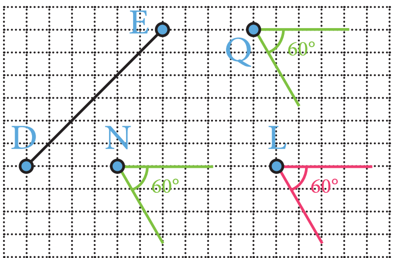
a أتأمّل الشكل المجاور:



1. صورة الزاوية $\widehat{Q}$ وفق انسحاب من A إلى B هي الزاوية $\widehat{N}$.
2. أقيس بالمنقلة قياس الزاوية $\widehat{Q}$ و $\widehat{N}$.

أقول أنَ الزاوية $\widehat{N}$ هي صورة الزاوية $\widehat{Q}$ وفق الانسحاب الّذي ينقل النّقطة A إلى B، وتكون $\widehat{N} = \widehat{Q}$.

b أتأمّل الشكل المجاور:



1. صورة الزاوية $\widehat{N}$ وفق انسحاب من D إلى E هي الزاوية ......
2. أقيس بالمنقلة قياس الزاوية $\widehat{N}$ و $\widehat{Q}$.

ماذا ألاحظ؟

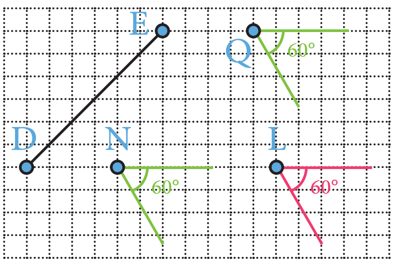
أتحقّق من إجابتي

b

1. صورة الزاوية $\widehat{N}$ وفق انسحاب من D إلى E هي الزاوية $\widehat{Q}$
2. بعد قياس الزاويتين $\widehat{N}$ و $\widehat{Q}$ أجد:

$$\widehat{N} = \widehat{Q} = 60°$$

نلاحظ أنّ الزاويتين متساويتان.



النشاط 4: الانسحاب والمحيطات والمساحات

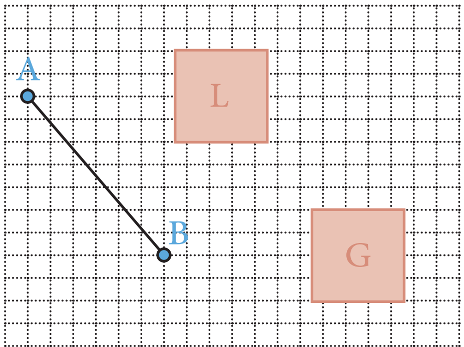
استنتاج أنّ الانسحاب يحافظ على المحيطات والمساحات.

من 8 إلى 10 دقائق.

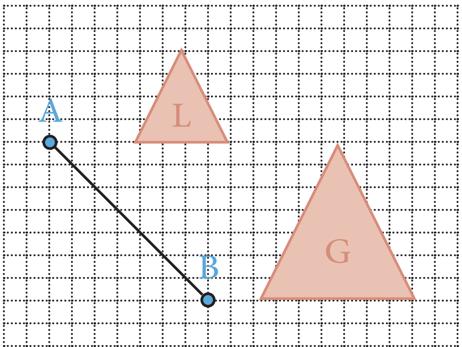
قلم ممحاة مسطرة

أحسب محيطات ومساحات الأشكال بالاعتماد على خواصّ الانسحاب، كما في المثال المحلول:

a



الشكل الأول



الشكل الثاني

أتأمّل الشكل المجاور:

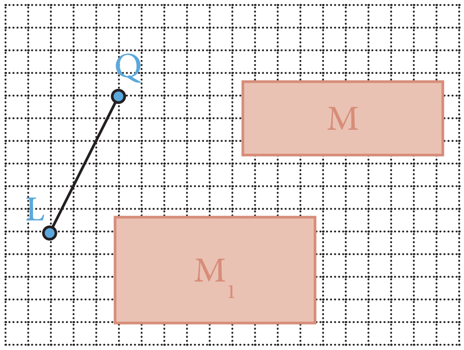
1. في أي الشكلين السّابقين يكون الشكل G صورة L وفق انسحاب من A إلى B ؟ الشكل الأوّل.

....

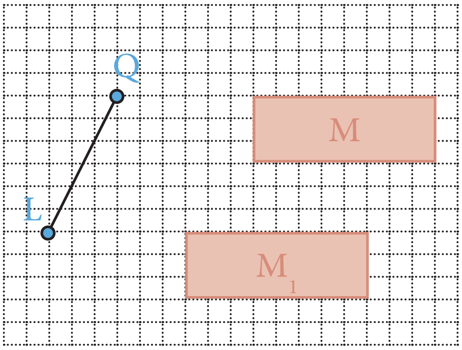
2. أقارن بين محيطي ومساحتي الشكلين G و L ماذا ألاحظ؟ ألاحظ أنّهما متساويان.

....

b



الشكل الأول



الشكل الثاني

أتأمّل الشكل المجاور:

1. في أي الشكلين السابقين يكون الشكل M_1 صورة M وفق انسحاب من Q إلى L ؟

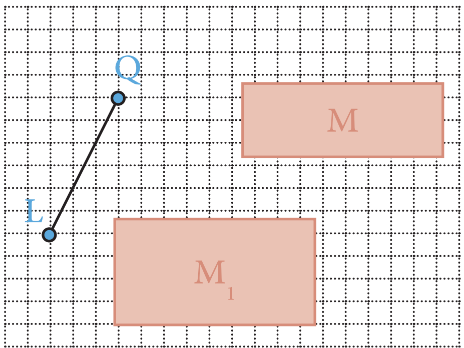
....

2. أحسب مساحة ومحيط المستطيلين M_1 و M في الشكل الأول؟ ماذا ألاحظ؟

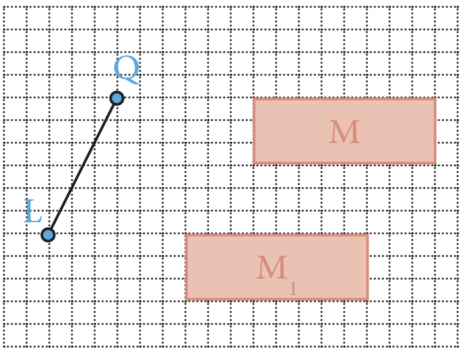
....

أتحقّق من إجابتي

b



الشكل الأول



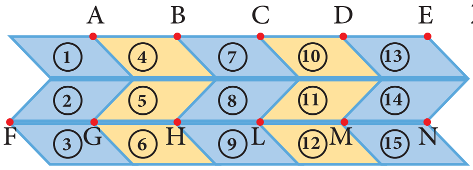
الشكل الثاني

1. الشكل الثاني.
2. مساحتا المستطيلين متساويتان وتساوي 24 وحدة مربّعة والمحيطان متساويان ويساويان 22 وحدة.

أختبر نفسي

50 – 55 دقيقة

1 لدينا في الشكل المجاور 15 متوازي أضلاع طبوقة مرقّمة من 1حتى 15.



a. ما صورة كلٍّ من متوازيّ الأضلاع 1 و 2 وفق الانسحاب من A إلى D ؟

....

....

b. ما صورة كل من متوازييّ الأضلاع 15 و 11 وفق الانسحاب من E إلى C؟

....

....

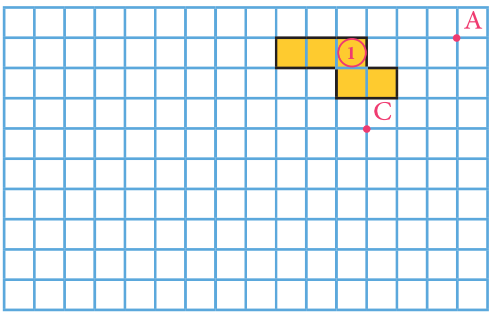
c. وفق أيّ انسحاب ينتقل متوازي الأضلاع 3 إلى متوازي الأضلاع 7؟

....

d. وفق أيّ انسحاب ينتقل متوازي الأضلاع 4 إلى 9؟

....

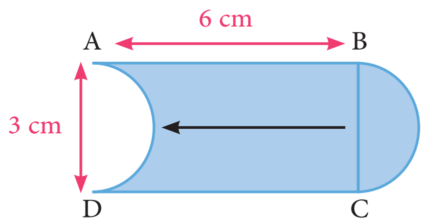
2 أتأمّل الشّكل المجاور:



a. أرسم الشكل 2 صورة الشكل 1 وفق الانسحاب من A إلى C.

b. أرسم صورة الشكل 2 وفق الانسحاب من A إلى C.

3 أتأمّل الشّكل الآتي:



a. ما صورة نصف الدائرة التي قطرها [BC] وفق الانسحاب الّذي ينقل B إلى A؟

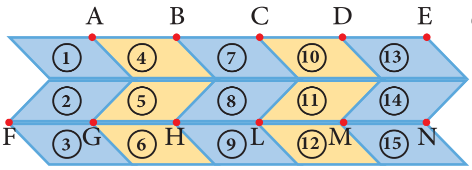
....

b. أستنتج مساحة المنطقة الملوّنة بالأزرق؟

....

أتحقّق من إجابتي

1 لدينا في الشكل المجاور 15 متوازي أضلاع طبوقة مرقّمة من 1حتى 15.



a. ما صورة كلٍّ من متوازيَي الأضلاع 1 و 2 وفق الانسحاب من A إلى D ؟

صورة متوازي الأضلاع 1 هو متوازي الأضلاع 10.

صورة متوازي الأضلاع 2 هو متوازي الأضلاع 11.

b. ما صورة كل من متوازيَي الأضلاع 15 و 11 وفق الانسحاب من E إلى C؟

صورة متوازي الأضلاع 15 هو متوازي الأضلاع 9.

صورة متوازي الأضلاع 11 هو متوازي الأضلاع 5.

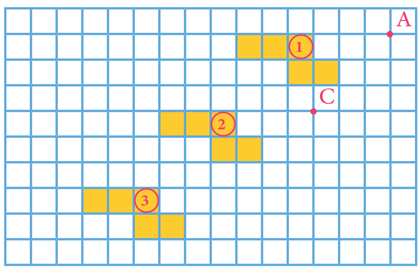
c. وفق أيّ انسحاب ينتقل متوازي الأضلاع 3 إلى متوازي الأضلاع 7؟ الانسحاب من G إلى C، يوجد خيارات أخرى صحيحة أتأملها مثل F إلى B.

d. وفق أيّ انسحاب ينتقل متوازي الأضلاع 4 إلى 9؟ الانسحاب من B إلى L.

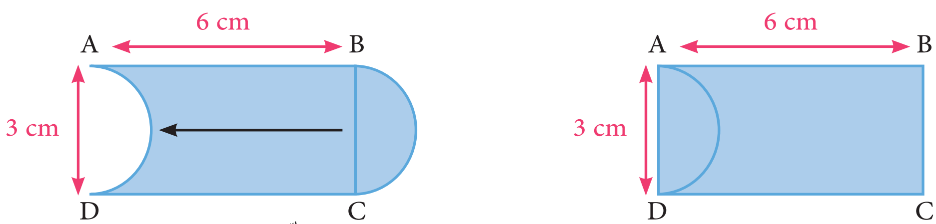
2 أتأمّل الشّكل المجاور:

a. أرسم الشكل 2 صورة الشكل 1 وفق الانسحاب من A إلى C؟

b. أرسم صورة الشكل 2 وفق الانسحاب من A إلى C؟



3 أتأمّل الشّكل الآتي:



a. ما صورة نصف الدائرة التي قطرها [BC] وفق الانسحاب الّذي ينقل B إلى A؟

نصف الدائرة التي قطرها [AD].

b. أستنتج مساحة المنطقة الملوّنة بالأزرق؟

مساحة المنطقة المظلّلة هي مساحة متوازي الأضلاع ABCD التي تساوي $18\ cm^2$.

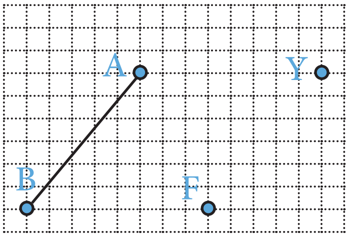
ألخّصُ درسي:

20 – 25 دقيقة

تعلّمت في درس الانسحاب:

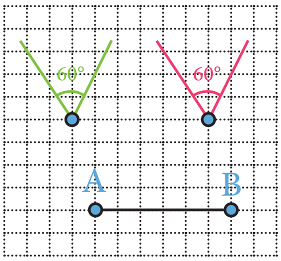
أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلمتها في الدرس:

☐ تعرّفت مفهوم الانسحاب: وهو انتقال النّقطة من موضع إلى موضع آخر دون تدوير.

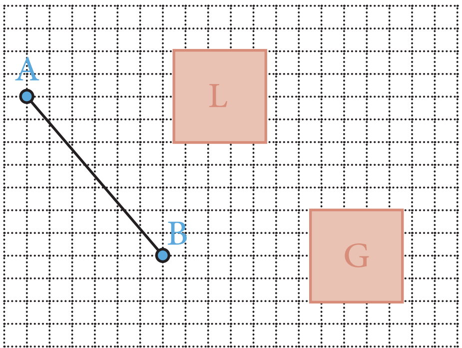


☐ خواصّ الانسحاب:

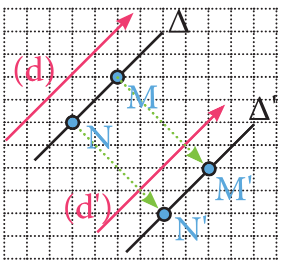
- الانسحاب يحافظ على أطوال الأضلاع.
- الانسحاب يحافظ على قياسات الزوايا.



- الانسحاب يحافظ على محيطات ومساحات الأشكال الهندسية.



- الانسحاب يحافظ على التوازي.



يمكنني رسم زاوية وأضع نقطتين A و B ثم اجراء الانسحاب لها وفق انسحاب من A إلى B.

الدّرس الثاني: صورة شكل هندسي وفق انسحاب

صورة نقطة	صورة مستقيم	صورة شكل هندسي
متوازي الأضلاع	الانسحاب	

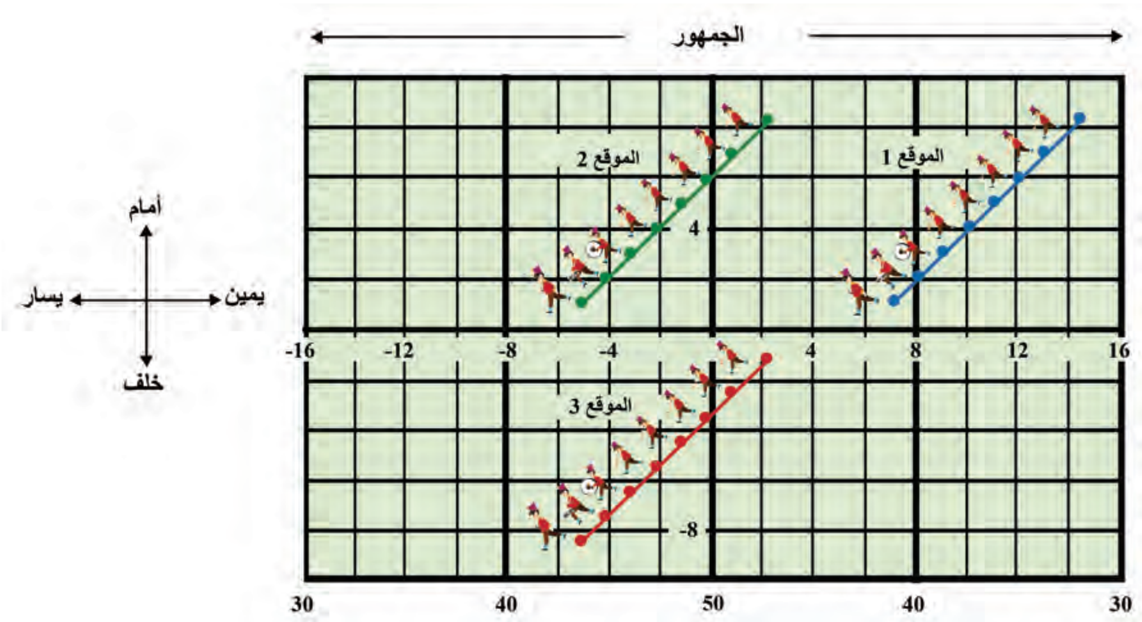
تحديد خواص الانسحاب وإنشاء صورة نقطة أو قطعة مستقيمة أو مستقيم أو نصف مستقيم أو دائرة وفق انسحاب.

من 1 إلى 1:15 ساعة.

قلم ممحاة مسطرة فرجار

هيّا بنا

عندما تتحرك الفرقة أثناء العرض فإنها تنتقل من الموقع الأول باتجاه اليسار ست وحدات إلى الموقع الثاني وتنتقل من الموقع الثاني اتجاه الأسفل خمس وحدات فإنها تستقر عند الموقع الثالث.



أضع نقطتين A و B على الشكل يعبّران عن الانسحاب من الموقع الأول إلى الموقع الثالث.

النشاط 1: انسحاب نقطة

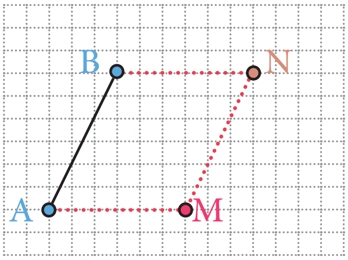
رسم صورة نقطة وفق انسحاب معلوم.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

أرسمُ صورة نقطة وفق انسحاب معلوم، كما في المثال المحلول:

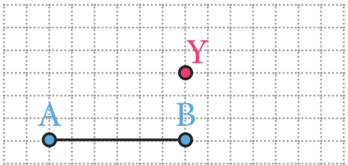
a أتأمّل الشكل المجاور: لتكن M نقطة ما لاتقع على المستقيم (AB).



أعيّن النقطة N التي تجعل الرّباعي ABNM متوازي أضلاع.

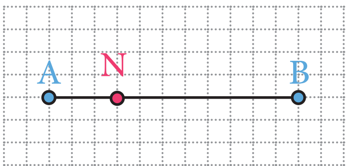
أقول أنَ النقطة M هي صورة النقطة N وفق الانسحاب الذي ينقل النقطة A إلى B.

b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً ثم أجيبُ عن الأسئلة:



- أعيّن النقطة F صورة النقطة Y وفق انسحاب من A إلى B.
- ما نوع الرّباعي ABYF؟ ....

c أتأمّل الشكل المرسوم جانباً ثم أجيبُ عن الأسئلة:

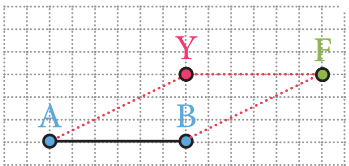


- أعيّن النقطة F صورة النقطة N وفق انسحاب من A إلى B.
- ما وضع النقاط A و B و N و F؟ ....
- أقارن بين طولي القطعتين [AB] و [NF].

....

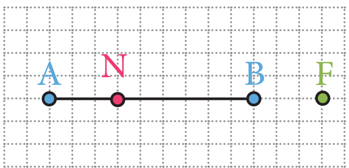
أتحقّق من إجابتي

b صورة النقطة F وفق انسحاب من A إلى B هي Y التي تجعل الرّباعي ABFY متوازي أضلاع.



c صورة النقطة F وفق انسحاب من A إلى B هي F التي تجعل النقاط A و B و N و F على استقامة واحدة.

والقطعتان [AB] و [NF] متساويتان.



النشاط 2: انسحاب قطعة مستقيمة ومستقيم

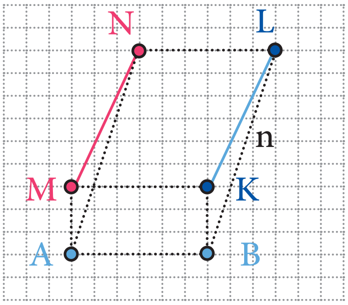
رسم صورة قطعة مستقيمة وصورة مستقيم وفق انسحاب مفروض.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

أرسمُ صورة قطعة مستقيمة وصورة مستقيم وفق انسحاب مفروض، كما في المثال المحلول:

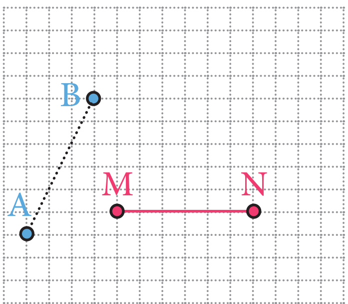
a أتأمّل الشكل المرسوم جانباً:



1. صورة النقطة M وفق الانسحاب من A إلى B هي النقطة K التي تجعل الرّباعي ABKM متوازي أضلاع.
2. صورة النقطة N وفق الانسحاب من A إلى B هي النقطة L التي تجعل الرّباعي ABLN متوازي أضلاع.
3. صورة القطعة [MN] وفق الانسحاب من A لى B هي القطعة [KL].

لإيجاد صورة قطعة مستقيمة وفق انسحاب نوجد صورة البداية ونوجد صورة النهاية ثم نصل بين النقطتين الجديدتين.

b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً:



1. أعيّن على الشكل صورة النقطة M وفق الانسحاب من A إلى B.

....

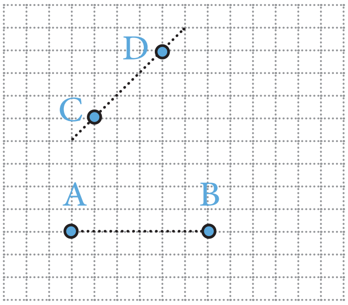
2. أعيّن صورة النقطة N وفق الانسحاب من A إلى B.

....

3. ماصورة القطعة المستقيمة [MN] وفق الانسحاب السابق؟

....

c أتأمّل الشكل المرسوم جانباً:



1. أعيّن على الشكل صورة النقطة C وفق الانسحاب من A إلى B.

....

2. أعيّن صورة النقطة D وفق الانسحاب من A إلى B.

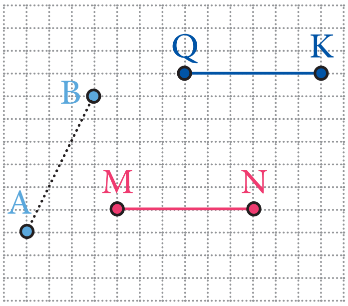
....

3. ما صورة المستقيم (CD) وفق الانسحاب السابق ؟

....

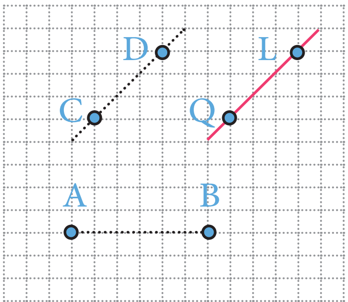
أتحقّق من إجابتي

b



1. صورة النقطة M وفق الانسحاب من A إلى B هي Q
2. صورة النقطة N وفق الانسحاب من A إلى B هي K.
3. صورة القطعة المستقيمة [MN] وفق الانسحاب السابق هي القطعة [QK].

c



1. صورة النقطة C وفق الانسحاب من A إلى B هي Q.
2. صورة النقطة D وفق الانسحاب من A إلى B هي L.
3. صورة المستقيم (CD) وفق الانسحاب السابق هو المستقيم (QL).

النشاط 3: انسحاب شكل هندسي

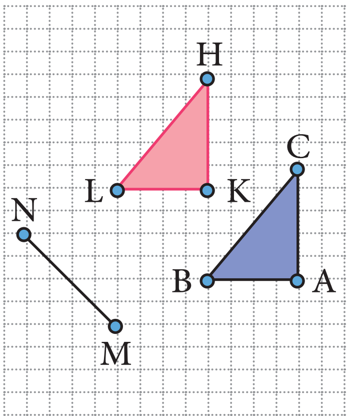
رسمُ صورة شكل هندسي وفق انسحاب مفروض.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم — ممحاة — مسطرة

أرسمُ صورة شكل هندسي وفق انسحاب، كما في المثال المحلول:

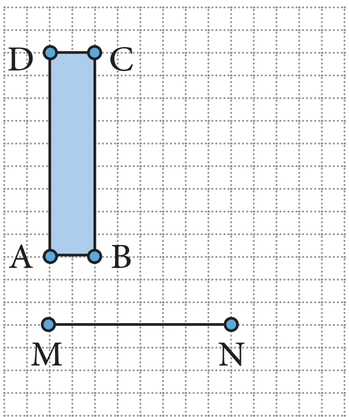
a أتأمّل الشكل المرسوم جانباً:



1. صورة النقطة A وفق انسحاب من M إلى N هي النقطة K.
2. صورة النقطة B وفق انسحاب من M إلى N هي النقطة L.
3. صورة النقطة C وفق انسحاب من M إلى N هي النقطة H.
4. صورة المثلّث ABC وفق الانسحاب من M إلى N هو المثلّث KLH.

لإيجاد صورة شكل وفق انسحاب أوجد صور النقاط الأساسية في الشكل ثم أصل بين النقاط الجديدة.

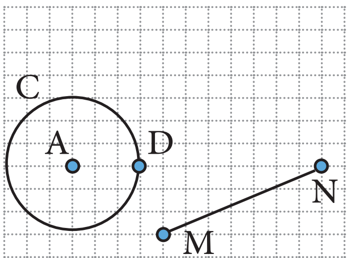
b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً:



1. أرسم صورة النقطة A وفق انسحاب من M إلى N.
2. أرسم صورة النقطة B وفق انسحاب من M إلى N.
3. أرسم صورة النقطة C وفق انسحاب من M إلى N.
4. أرسم صورة النقطة D وفق انسحاب من M إلى N.
5. صورة المستطيلABCD وفق الانسحاب من M إلى N هو:

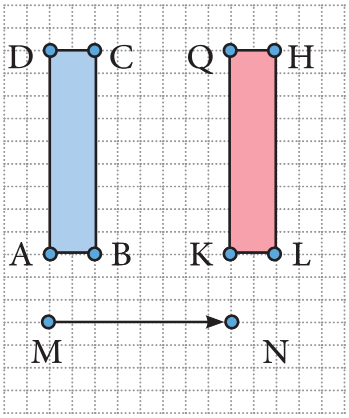
....

c أتأمّل الشكل المرسوم جانباً:



1. أرسم صورة النقطة A وفق انسحاب من M إلى N
2. أرسم صورة القطعة [AD] وفق انسحاب من M إلى N
3. مستعيناً بالفرجار أرسم الدائرة C_1 صورة الدائرة C وفق انسحاب من M إلى N.

أتحقّق من إجابتي



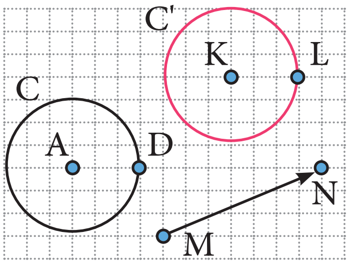
b 1. صورة النقطة A وفق انسحاب من M إلى N هي النقطة K.

2. صورة النقطة B وفق انسحاب من M إلى N هي النقطة L.

3. صورة النقطة C وفق انسحاب من M إلى N هي النقطة H.

4. صورة النقطة D وفق انسحاب من M إلى N هي النقطة Q.

5. صورة المستطيلABCD وفق الانسحاب من M إلى N هوالمستطيل KLHQ.



c 1. صورة النقطة A وفق انسحاب من M إلى N هي النقطة K.

2. أرسم صورة القطعة [AD] وفق انسحاب من M إلى N هي القطعة [KL].

3. أثبّتُ إبرة الفرجار على K وأفتحه بمقدار يساوي KL ثمّ أرسم الدائرة 'C التي مركزها K ونصف قطرها 'C فتكون 'C صورة الدائرة C وفق انسحاب من M إلى N.

النشاط 4: الانسحاب

تنظيم معلوماتي عن الانسحاب.

من 15 إلى 20 دقيقة.

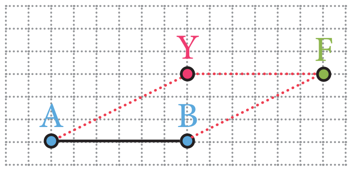
قلم ممحاة مسطرة

أقرأ عن الانسحاب، ثم أثبت معلوماتي عنه:

الانسحاب

ما الانسحاب؟

- صورة النقطة F وفق انسحاب من A إلى B هي النقطة Y التي تجعل ABFY متوازي أضلاع.

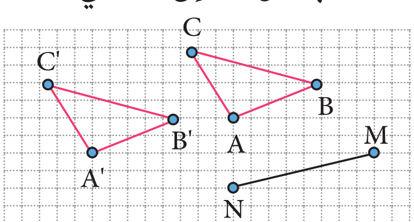


ما خواص الانسحاب؟

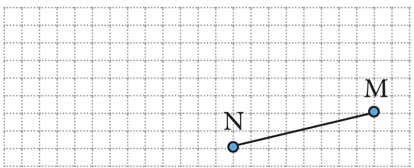
- يحافظ الانسحاب على: الأطوال - الاستقامة - قياس الزوايا - المساحات.
- صورة قطعة مستقيمة وفق انسحاب مفروض هي قطعة توازي الأصل وتساويها في الطول
- صورة مستقيم وفق انسحاب مفروض هو مستقيم يوازي الأصل
- صورة شكل هندسي وفق انسحاب هو شكل هندسي يطابق الأصل.

مثال عن انسحاب مثلّث:

في الشبكة المجاورة صورة المثلّث ABC وفق انسحاب من M إلى N هي A'B'C'.

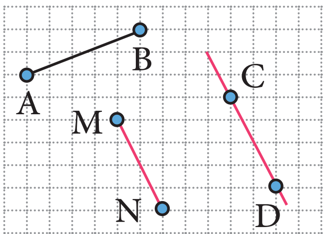


- يمكنني أن أرسم شكلاً وأرسم صورته وفق الانسحاب من N إلى M.

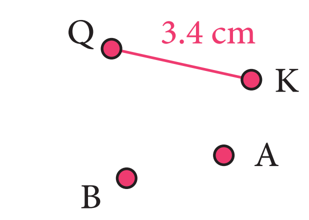


مثال ليس انسحاباً:

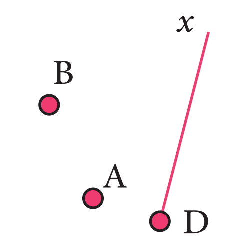
في الشكل المجاور المستقيم (CD) ليس صورة المستقيم (MN) وفق انسحاب من A إلى B فصورة مستقيم وفق انسحاب هي مستقيم يوازيه وليس قطعة مستقيمة.



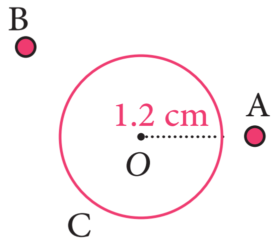
1 أنظر إلى الأشكال الآتية، ثم أرسم صورة القطعة المستقيمة [QK]وصورة نصف المستقيم (Dx] وصورة الدائرة C وفق الانسحاب من A إلى B؟



1. القطعة المستقيمة [QK]

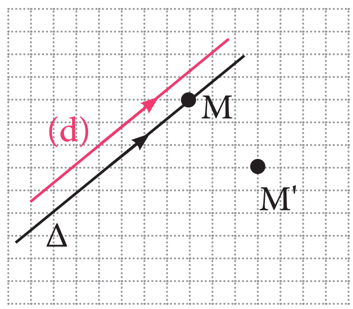


2. نصف المستقيم (Dx]

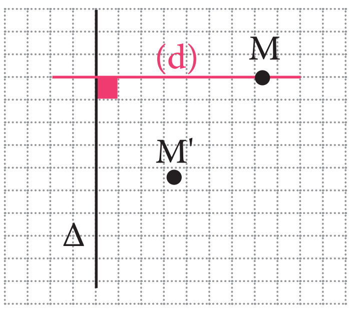


3. الدائرة C

2 أتأمّل الشكلان (1) و(2)، ثمّ أرسم صورة المستقيمين (d) و(Δ) وفق الانسحاب من M إلى 'M؟



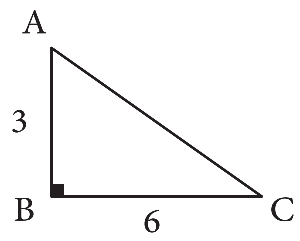
1



2

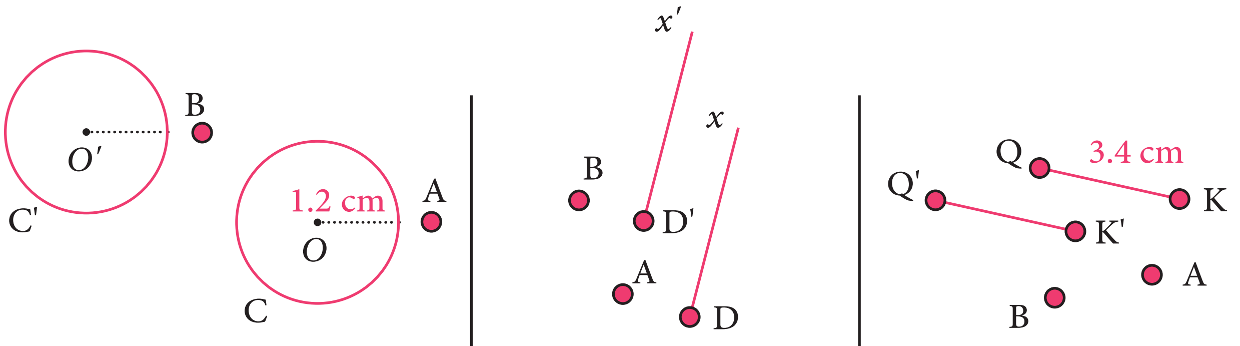
3 ABC مثلّث قائم في B فيه BA = 3 و BC = 6:

1. أضعُ النقطة E على الضلع [BA] بحيث يكون BE = 2.
2. أرسمُ صورة القطعة [BE] وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى C.



أتحقّق من إجابتي

1 أنظر إلى الأشكال الآتية، ثم أرسم صورة القطعة المستقيمة [QK]وصورة نصف المستقيم (Dx] وصورة الدائرة C وفق الانسحاب من A إلى B؟



1. القطعة المستقيمة [QK]   2. نصف المستقيم (Dx]   3. الدائرة C

2 أتأمّل الشكلان (1) و(2)، ثمّ أرسم صورة المستقيمين (d) و(Δ) وفق الانسحاب من M إلى M'؟

لرسم صورة المستقيم Δ وفق الانسحاب المفروض أختار نقطتين M و Nمن المستقيم Δ.

1. أوجد النقطة M' صورة M بالانسحاب من M إلى M'.
2. أوجد صورة النقطة N' صورة N بالانسحاب من M إلى M'.

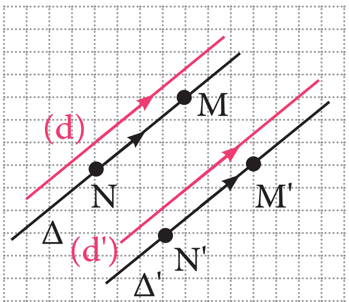
أصل بين M' و N' فأحصل على المستقيم Δ' صورة المستقيم Δ وفق الانسحاب من M إلى M'.

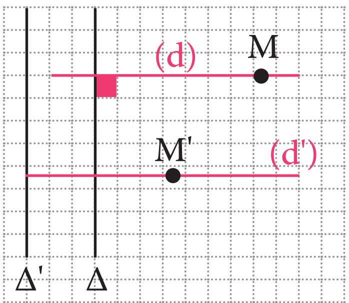
بأسلوب مشابه أحصل على المستقيم (d') صورة المستقيم (d) وفق الانسحاب السابق.

ألاحظ ان Δ' و (d') متوازيان.

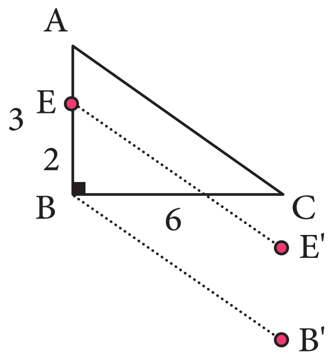
بأسلوب مشابه لحل الطلب الأول أوجد صورة المستقيمين Δ و (d) وفق الانسحاب.

وأجد أنّ المستقيمين Δ' و (d') متعامدان.





3 ABC مثلّث قائم في B فيه BA = 3 و BC = 6:



1. أضعُ النقطة E على الضلع [BA] بحيث يكون BE = 2.
2. أرسمُ صورة القطعة [BE] وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى C.

لرسم صورة القطعة [BE] وفق الانسحاب من A إلى C:

أوجد 'B صورة B وفق الانسحاب من A إلى C.

أوجد 'E صورة E وفق الانسحاب من A إلى C.

فتكون القطعة ['B'E] صورة القطعة [BE] وفق الانسحاب المفروض.

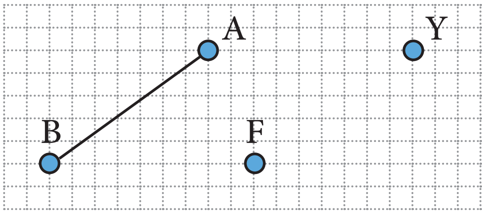
ألاحظ أن القطعتين ['B'E] و[BE] متساويتان والمستقيمن ('B'E) و(BE) متوازيان.

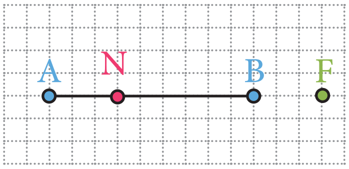
ألخّصُ درسي:

تعلّمت في درس صورة شكل هندسي وفق انسحاب:

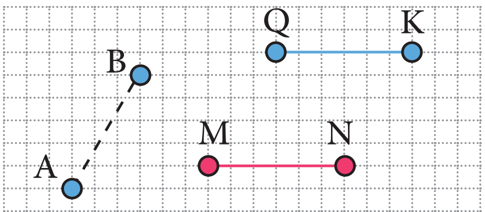
أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلمتها في الدرس:

☐ صورة نقطة وفق انسحاب مفروض هي نقطة.

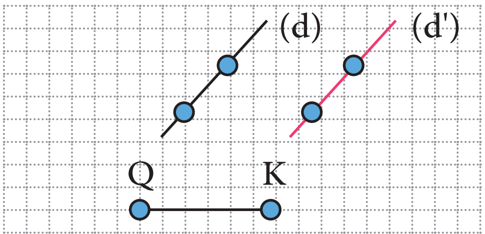




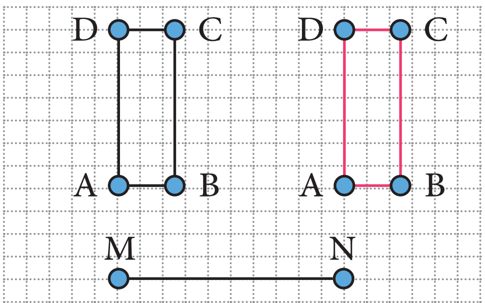
☐ صورة قطعة مستقيمة وفق انسحاب مفروض هي قطعة توازي الأصل وتساويها في الطول.



☐ صورة مستقيم وفق انسحاب مفروض هو مستقيم يوازي الأصل .

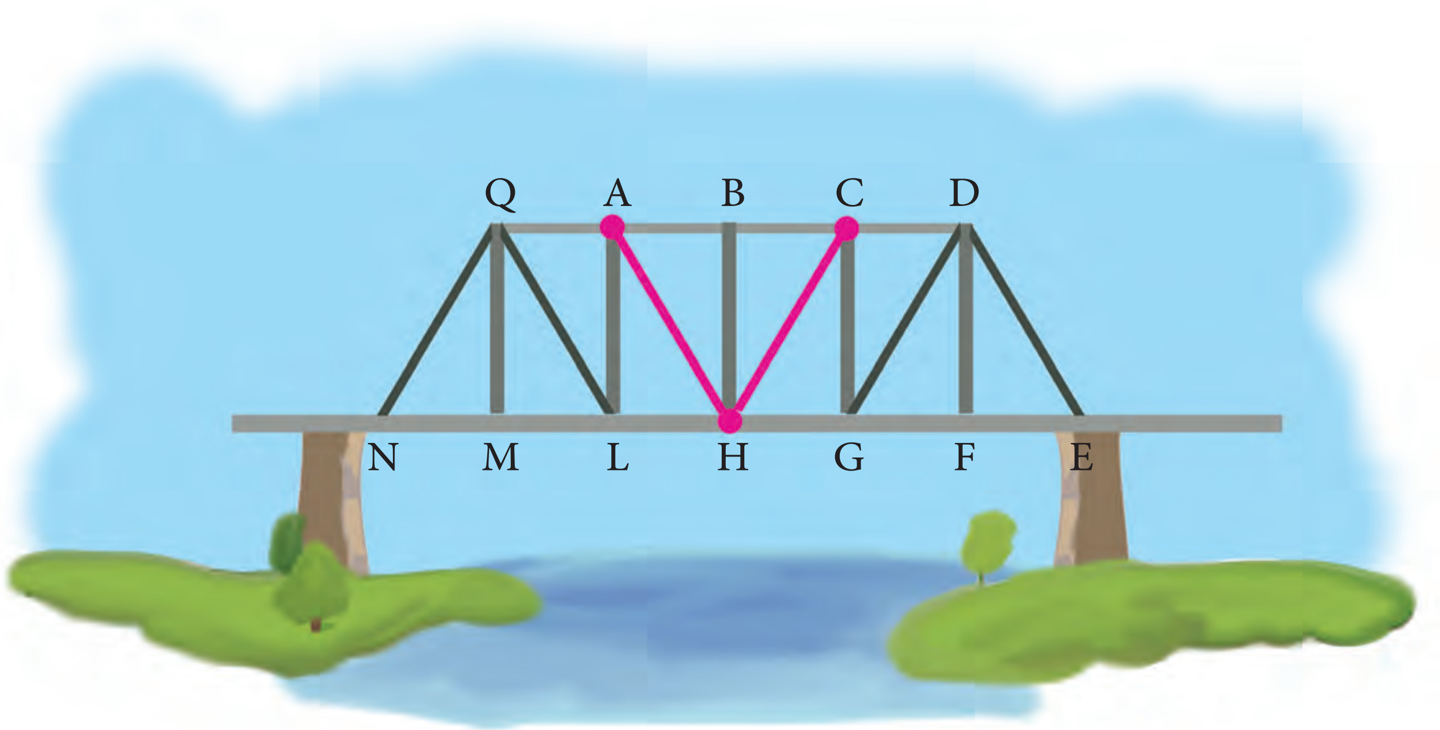


☐ صورة شكل هندسيّ وفق انسحاب معلوم هو شكل يطابق الأصل.



يمكنني رسم شكل هندسي مألوف، ثمّ إجراء انسحاب عليه.

الدّرس الثّالث: تطابق المثلّثات



الأضلاع المتقابلة | الزوايا المتقابلة
تطابق مثلّثين | الانسحاب

- اثبات تطابق مثلّثين ومثلّثين قائمين واستعمال خصائص المثلّث القائم في حلّ المسائل.

من 1 إلى 1:15 ساعة.

قلم | ممحاة | مسطرة

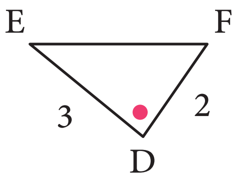
هـيّا بـنـا

أشكال غير متطابقة	اشكال متطابقة
	
الشكلين 4 و 5 لهما الشكل نفسه لكنّهما مختلفين في القياس.	الأشكال 1 و2 و3 لها القياسات نفسها والأشكال نفسها بالرّغم من أنّها في أوضاع مختلفة.

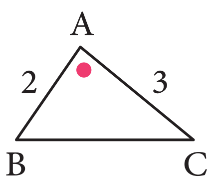
وفق الانسحاب، أيّ شكل وصورته قابلان للانطباق (أي أنّ صورة شكل هو شكل يطابقه)
يتطابق مضلّعان إذا انطبقت عناصر الأول من أضلاع وزوايا على مقابلاتها من الثاني.

- أقوم بقص المثلّث ABC وأطبّقه على المثلّث DEF وأملأ الجدولين التاليين بما يناسبهما:

الضّلع من ABC	الضّلع المقابل له من DEF
[AB]	[DF]
[AC]	[DE]
[BC]	؟



الزّاوية من ABC	الزّاوية المقابل له من DEF
A	D
B	F
C	؟



النشاط 1: تطابق (ضلع، ضلع، ضلع)

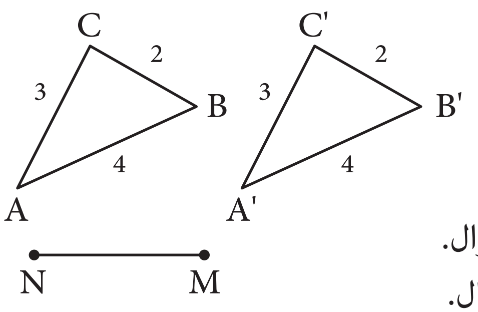
إثبات تطابق مثلّثين اعتماداً على حالة (ضلع، ضلع، ضلع).

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

أثبتُ تطابق مثلّثين وأحسب قياسات زوايا مفقودة اعتماداً على التّطابق ، كما في المثال المحلول:

a أتأمّل الشكل المرسوم جانباً ثم أملأ الفراغات بما يناسبها وفق الانسحاب من N الى M يكون:



1. صورة النقطة A هي النقطة A'.
2. صورة النقطة B هي النقطة B'.
3. صورة النقطة C هي النقطة C'.

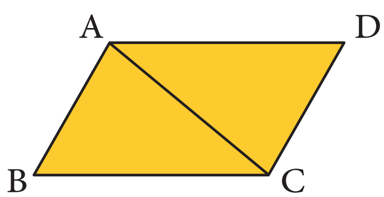
بحسب خواصّ الانسحاب أجد أنّ:

1. $AC = A'C' = 3$ لأنّ الانسحاب يحافظ على الأطوال.
2. $BC = B'C' = 2$ لأن الانسحاب يحافظ على الأطوال.
3. $AB = A'B' = 4$ لأن الانسحاب يحافظ على الأطوال.

المثلّث ABC يطابق المثلّث A'B'C'.

يتطابق مثلّثان إذا تساوت أطوال أضلاع الأوّل مع مقابلاتها من الثاني تسمّى هذه الحالة حالة (ضلع، ضلع، ضلع).

b أتأمّل الشكل المجاور: لدينا ABCD متوازي أضلاع:



1. أثبت تطابق المثلّثين ADC وABC.

....

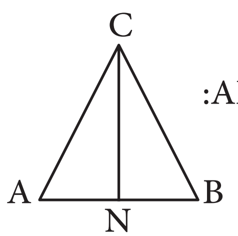
....

....

2. إذا علمت أنّ $\widehat{ACD} = 55°$ أستنتج قياس $\widehat{CAB}$.

....

c في الشّكل المجاور ABC مثلّثٌ متساوي الساقين رأسه C فيه N منتصف AB:



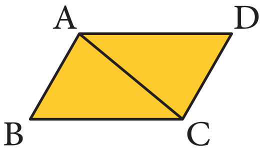
1. أثبت تطابق المثلّثين CNB و CNA؟

....

2. إذا علمت أنّ $\widehat{BCN} = 35°$ أستنتج قياس $\widehat{NCA}$؟

....

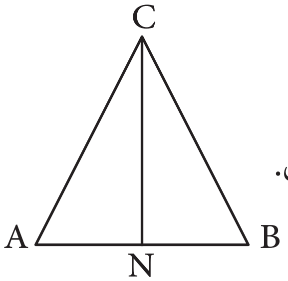
أتحقّق من إجابتي



b

1. $AD = BC$ لأن كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متساويان.
$DC = AB$ لأن كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متساويان.
AC ضلع مشترك، حسب حالة (ضلع، ضلع، ضلع) المثلّثان طبوقان.
2. من التطابق نستنتج أن:

$$\widehat{CAB} = \widehat{ACD} = 55°$$



c

1. $CB = CA$ لأنّ المثلّث مثلّث متساوي الساقين رأسه.
$NB = NA$ لأنّ N منتصف AB.
CN ضلع مشترك، حسب حالة (ضلع، ضلع، ضلع) المثلّثان طبوقان.
2. من التطابق نستنتج أن:

$$\widehat{NCB} = \widehat{NCA} = 35°$$

النشاط 2: تطابق (ضلع، زاوية، ضلع)

إثبات تطابق مثلّثين اعتماداً على حالة (ضلع، زاوية، ضلع).

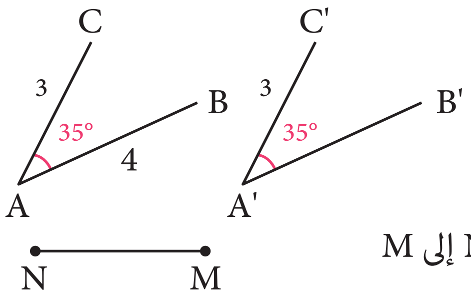
من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

أثبت تطابق مثلّثين وأثبت تساوي أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا اعتماداً على التطابق، كما في المثال المحلول:

a

أتأمّل الشكل المرسوم جانباً وفق الانسحاب من N الى M يكون:



1. صورة القطعة [AB]هي:.................
2. صورة القطعة [AC]هي:.................
3. صورة الزاوية $\widehat{CAB}$ هي:.................

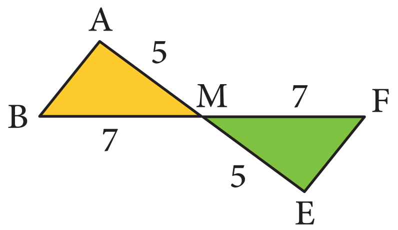
بالتالي فإنّ صورة المثلّث ABC وفق الانسحاب من N إلى M هو المثلّث A'B'C'.

بحسب خواصّ الانسحاب نجد أنّ:

1. $AC = A'C' = 3$ لأن الانسحاب يحافظ على الأطوال.
2. $AB = A'B' = 4$ لأن الانسحاب يحافظ على الأطوال.
3. $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} = 55°$ لأن الانسحاب يحافظ على القياسات.

يتطابق مثلّثان إذا تساوى طولا ضلعين وزاوية محصورة بينهما من الأوّل مع مقابلاتها من الثاني وتُسمى هذه الحالة حالة (ضلع، زاوية، ضلع).

b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً:



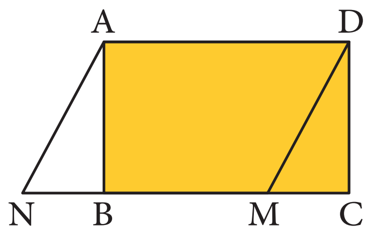
1. أثبت تطابق المثلّثين MEF و MAB؟

....

2. أثبت انّ $EF = AB$؟

....

c في الشكل المرسوم جانباً لدينا ABCD مستطيل $MC=NB$:



1. أثبت تطابق المثلّثين DCM و ABN؟

....

2. أثبت أنّ $MD = AN$؟

....

أتحقّق من إجابتي

b
1. $MF = MB$ فرضاً.
$ME = MA$ فرضاً.
$\widehat{FME} = \widehat{BMA}$ للتقابل بالرأس.
2. حسب حالة (ضلع، زاوية، ضلع) المثلّثان طبوقان ومن التطابق نستنتج أنّ $EF = AB$.

c
1. $DC = AB$ لأنّ كل ضلعين متقابلين في المستطيل متساويان.
$MC = NB$ فرضاً.
$\hat{C} = \hat{B} = 90°$ لأن ABCD مستطيل زواياه قائمة.
2. حسب حالة (ضلع، زاوية، ضلع) المثلّثان طبوقان ومن التطابق أستنتج أنّ $DM = AN$.

النشاط 3: تطابق (زاوية، ضلع، زاوية)

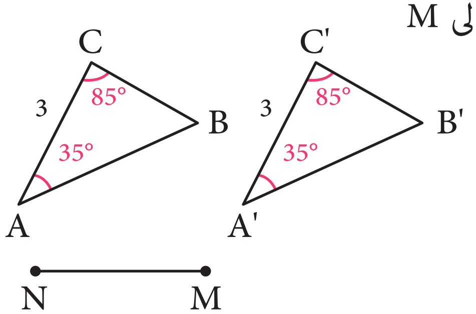
إثبات تطابق مثلّثين اعتماداً على حالة (زاوية، ضلع، زاوية).

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

أثبت تطابق مثلّثين وأستنتج تساوي الأضلاع والزوايا المتقابلة، كما في المثال المحلول:

a أتأمّل الشكل المرسوم جانباً وفق الانسحاب من N الى M يكون:



1. صورة القطعة [AC] هي [A'C']
2. صورة الزاوية $\widehat{A}$ هي $\widehat{A'}$
3. صورة الزاوية $\widehat{C}$ هي $\widehat{C'}$.

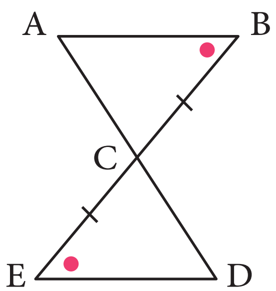
بالتالي فإنّ صورة المثلّث ABC وفق الانسحاب من N إلى M هو المثلّث A'B'C'.

بحسب خواصّ الانسحاب نجد أنّ:

1. $AC = A'C' = 3$ لأن الانسحاب يحافظ على الأطوال.
2. $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} = 35°$ لأن الانسحاب يحافظ على قياسات الزوايا.
3. $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} = 85°$ لأن الانسحاب يحافظ على قياسات الزوايا.

يتطابق مثلّثان إذا تساوى طول ضلع وزاويتين مجاورتين له من الأوّل مع مقابلاتها من الثاني وتُسمّى هذه الحالة حالة (زاوية، ضلع، زاوية).

b في الشكل المجاور لدينا: $BC = CE$ و $B = E$



1. أثبت تطابق المثلّثين ACB و DCE؟

....

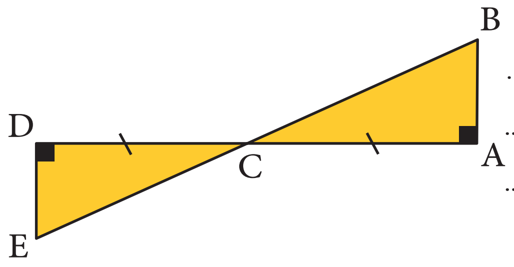
....

....

2. أستنتج أنّ $\widehat{A} = \widehat{D}$ ؟

....

c أتأمّل الشّكل المرسوم جانباً لدينا C منتصف [AD] :



1. أثبت تطابق المثلّثين ACB و DCE ؟

....

....

....

2. أثبت أنّ C منتصف [BE].

....

أتحقّق من إجابتي

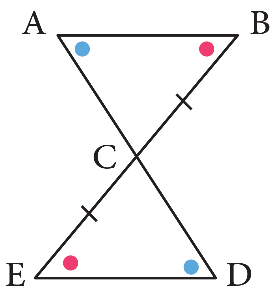
b 1. CB = CE فرضاً.

$\widehat{B} = \widehat{E}$ فرضاً.

$\widehat{BCA} = \widehat{ECD}$ للتقابل بالرأس.

حسب حالة (زاوية، ضلع، زاوية) المثلّثان طبوقان.

2. أستنتج من التطابق أنّ: $\widehat{A} = \widehat{D}$



c 1. CA = CD فرضاً

$\widehat{A} = \widehat{D}$ فرضاً.

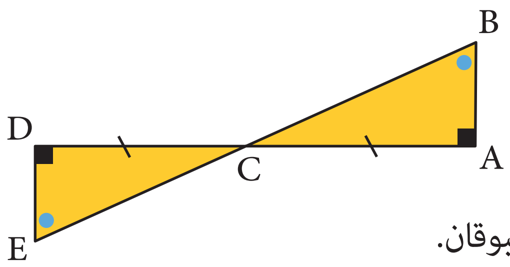
$\widehat{BCA} = \widehat{ECD}$ للتقابل بالرأس.

حسب حالة (زاوية، ضلع، زاوية) المثلّثان طبوقان.

2. أستنتج من التطابق:

BC = CE أي أنّ C منتصف [BE].

$\widehat{B} = \widehat{E}$



النشاط 4: تطابق المثلّثات القائمة

استنتاج حالات تطابق مثلّثين قائمين.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

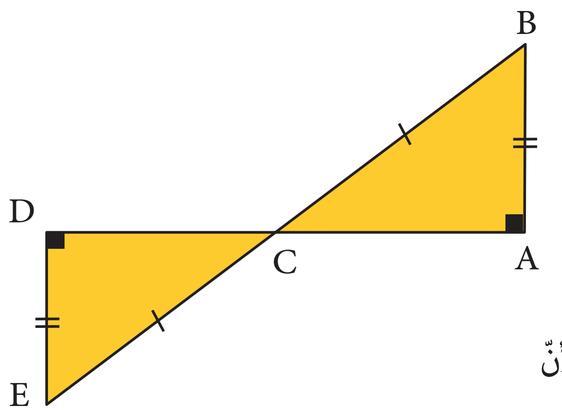
أثبت تطابق مثلّثين قائمين، كما في المثال المحلول:

a أتأمّل الشكل المرسوم جانباً فيه C منتصف [EB]

و $\hat{A} = \hat{D} = 90$ والمطلوب:

أثبت تطابق المثلّثين ACB و DCE.

ماذا ألاحظ؟



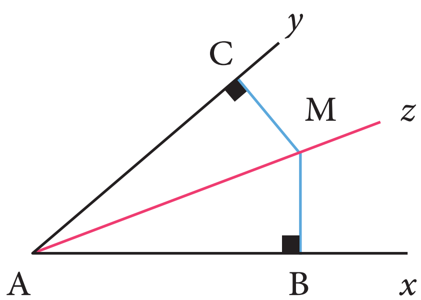
1. $BC = CE$ لأنّ C منتصف [EB]
2. $\widehat{ACB} = \widehat{DCE}$ للتقابل بالرأس
3. $\widehat{DEC} = \widehat{ABC} = 180 - (90 + \widehat{ACB})$ لأنّ مجموع زوايا المثلّث °180.

حسب حالة (زاوية، ضلع، زاوية) المثلّثان طبوقان إذاً يتطابق مثلّثان قائمان:

1. إذا تساوى طول الوتر وضلع قائم من الأول مع مقابلاتها من الثاني وتُسمّى حالة وتر وضلع قائم.
2. إذا تساوى طول الوتر وزاوية حادّة من الأول مع مقابلاتها من الثّاني وتُسمّى حالة وتر وزاوية حادّة.

b أنظر الشكل المرسوم جانباً فيه: $\widehat{xAZ} = \widehat{zAy}$

أثبت أنّ المثلّثين BAM و MAC طبوقان.



....

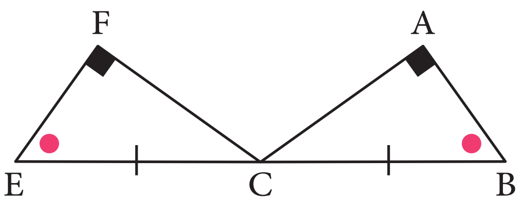
....

....

....

c في الشكل المرسوم جانباً مثلّثان قائمان في A وF والمطلوب:

أثبت أنّ المثلّثين ACB و CFE طبوقان.



....

....

....

....

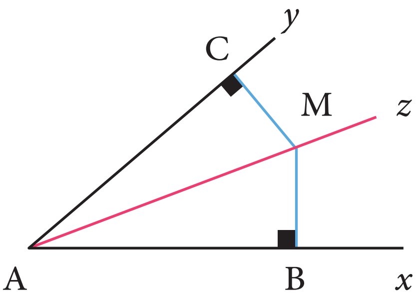
أتحقّق من إجابتي

b المثلّثان القائمان فيهما:

AM وتر مشترك

$\widehat{xAZ} = \widehat{zAy}$ فرضاً

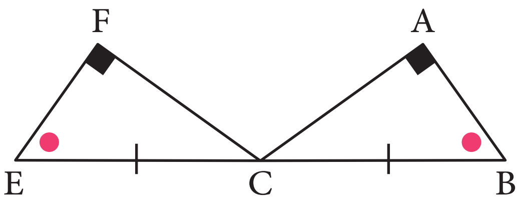
حسب حالة وتر وزاوية حادّة يكون المثلّثان القائمان طبوقان.



c المثلّثان قائمان فيهما:

$CB = CE$ وتر.

$\widehat{ABC} = \widehat{CEF}$



حسب حالة وتر وزاوية حادة يكون المثلّثان القائمان طبوقان.

النشاط 5: تطابق المثلّثات

تنظيم معلوماتي عن تطابق مثلّثات.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

أقرأ عن تطابق مثلّثات ثم أثبت معلوماتي عنه:

ما هو تطابق المثلّثات؟

يتطابق مثلّثان: إذا تساوت أطوال أضلاع الأوّل مع مقابلاتها من الثاني وتساوت قياسات زوايا الأول مع مقابلاتها من الثاني.

ما حالات تطابق المثلّثات؟

- إذا تساوت أطوال أضلاع الأول مع مقابلاتها من الثاني وتُسمّى حالة (ضلع، ضلع، ضلع).
- إذا تساوى طولا ضلعين وزاوية محصورة بينهما من الأوّل مع مقابلاتها من الثاني وتُسمّى حالة (ضلع، زاوية، ضلع).
- إذا تساوى طول ضلع وزاويتين مجاورتين له من الأول مع مقابلاتها من الثّاني وتُسمّى حالة (زاوية، ضلع، زاوية).

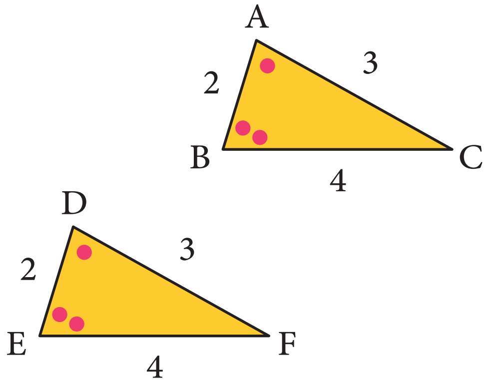
يتطابق مثلّثان قائمان:

- إذا تساوى طول الوتر وضلع قائم من الأول مع مقابلاتها من الثاني وتُسمّى حالة وتر وضلع قائم.
- إذا تساوى طول الوتر وزاوية حادّة من الأوّل مع مقابلاتها من الثاني وتُسمّى حالة وتر وزاوية حادّة.

تطابق مثلّثين

مثال عن تطابق مثلّثين:

في الشكل المجاور المثلّثان ABC و DEF طبوقان.



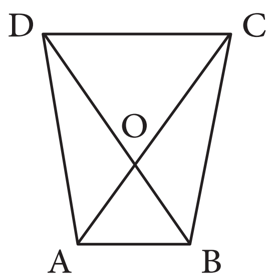
- ما هي الخاصة التي استعملتها لمعرفة أن المثلثين طبوقين؟

....

....

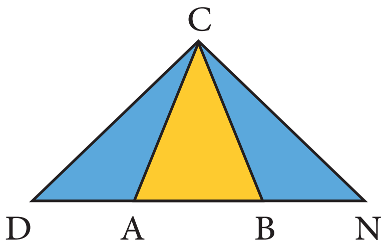
مثال عن مثلّثين غير طبوقين:

في الشكل المجاور المثلّثان AOB و DOC ليسا طبوقين فالتطابق يحافظ على القياسات.



أختبر نفسي

35 – 40 دقيقة



1 في الشكل المرسوم جانباً، لدينا ABC مثلّث متساوي الساقين رأسه C ولدينا BN=DA.

1. أثبت تطابق المثلّثين CBN و CAD.

2. أستنتج نوع المثلّث CDN.

....

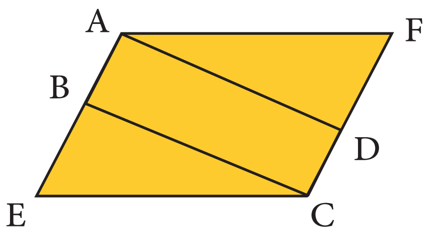
....

....

....

....

....



2 في الشكل المرسوم جانباً، لدينا AECF متوازي أضلاع و ABCD مستطيل، أثبت تطابق المثلّثين AFD وCEB.

....

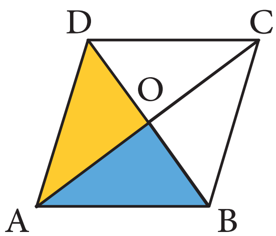
....

....

....

....

....



3 في الشكل المرسوم جانباً، ABCD معيّن، أثبت تطابق المثلّثين DAO وOAB.

....

....

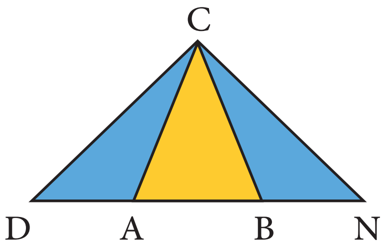
....

....

....

....

أتحقّق من إجابتي



1 في الشكل المرسوم جانباً، لدينا ABC مثلّث متساوي الساقين رأسه C ولدينا BN=DA.

1. أثبت تطابق المثلّثين CBN و CAD؟
2. أستنتج نوع المثلّث CDN؟

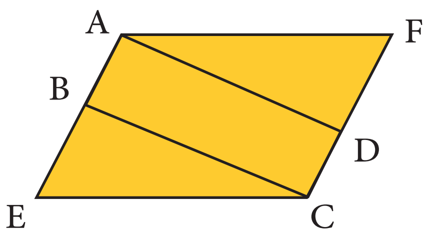
1. BN = AD فرضاً

CB = CA لأنّ المثلّث ABC مثلّث متساوي الساقين رأسه C

$\widehat{CAD} = \widehat{CBN}$ مكملتان لزاويتين متساويتين

حسب حالة (ضلع – زاوية – ضلع) المثلّثان طبوقان.

2. من التطابق نستنتج أن CD = CN بالتالي المثلّث CDN متساوي الساقين.



2 في الشكل المرسوم جانباً، لدينا AECF متوازي أضلاع و ABCD مستطيل، أثبت تطابق المثلّثين AFD و CEB.

AF = EC لأن كل ضلعين متقابلين في متوازي الاضلاع متساويان.

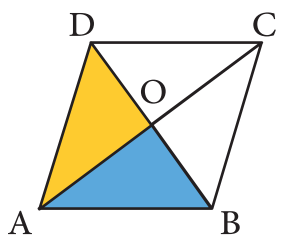
AD = BC لأنّ كل ضلعين متقابلين في المستطيل متساويان.

DF = CF - CD

EB = AE - AB ولأنّ CD=AB

يكون DF = EB حسب حالة (ضلع، ضلع، ضلع) المثلّثان طبوقان.

3 في الشكل المرسوم جانباً ABCD معيّن، أثبت تطابق المثلّثين DAO وOAB.



DO = OB لأن قطرا المعيّن متناصفان.

AD = AB لأنّ كل ضلعين متجاورين في المعين متساويان.

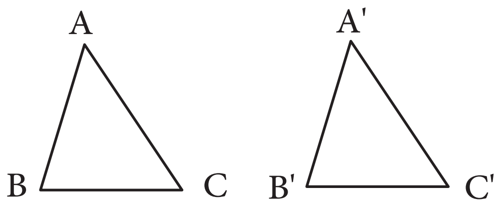
AO ضلع مشترك.

حسب حالة (ضلع، ضلع، ضلع) المثلّثان طبوقان.

تعلّمت في درس تطابق المثلثات:

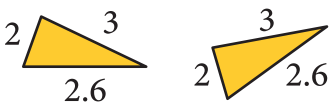
أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلمتها في الدرس:

☐ يتطابق مثلّثان إذا تساوت أطوال أضلاع الأوّل مع مقابلاتها من الثاني وتساوت قياسات زوايا الأوّل مع مقابلاتها من الثاني.

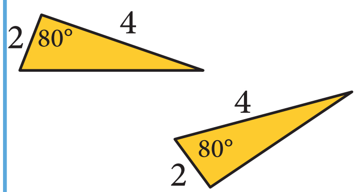


☐ حالات تطابق مثلّثين:

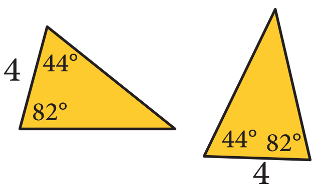
- إذا تساوت أطوال أضلاع الأول مع مقابلاتها من الثاني وتُسمّى حالة (ضلع، ضلع، ضلع).



- إذا تساوى طولا ضلعين وزاوية محصورة بينهما من الأوّل مع مقابلاتها من الثاني وتُسمّى حالة (ضلع، زاوية، ضلع).

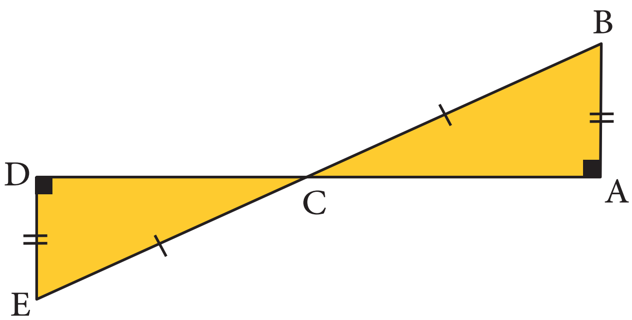


- إذا تساوى طول ضلع وزاويتين مجاورتين له من الأول مع مقابلاتها من الثاني وتُسمّى حالة (زاوية، ضلع، زاوية).

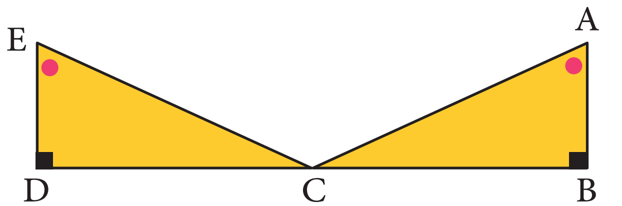


☐ يتطابق مثلّثان قائمان :

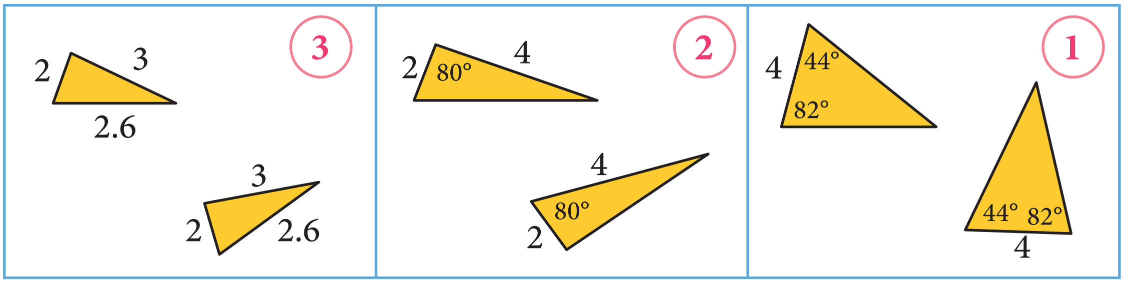
- إذا تساوى طول ضلع قائمة وطول وتر من الأول مع مقابلاتها من الثاني وتُسمّى حالة وتر وضلع قائمة.



- إذا تساوى طول الوتر وقياس زاوية حادّة من الأول مع مقابلاتها من الثّاني وتُسمّى حالة وتر وزاوية حادة.



1 في كل حالة من الحالات الاتية علل تطابق المثلّثين:

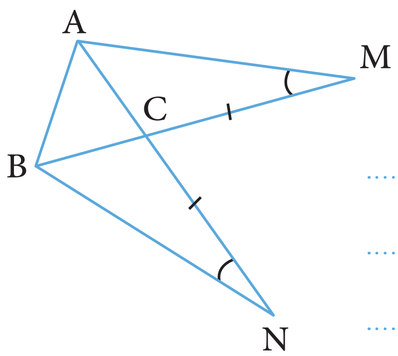


....

....

....

2 في الشكل المجاور:



a أثبت تطابق المثلّثين CNB و CMA.

....

....

....

....

b أثبت تطابق المثلّثين ANB و BMA.

....

....

....

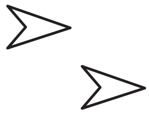
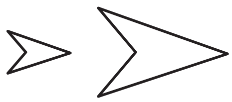
....

c أستنتج نوع المثلّث CBA.

....

3 لكل حالة من الحالات الاتيه اجابة واحدة صحيحة:

1. أجد الشكل وصورته في الحالة:

○  ○  ○ 

2. P نقطة غير واقعه على المستقيم (RS) ، Q صورة P وفق الانسحاب الذي ينقل R الى S عندئذ:

○ RSPQ متوازي أضلاع ○ PQRS متوازي أضلاع ○ RSQP متوازي اضلاع

3. مساحة شكل F هي $20\ cm^2$ ، فإن مساحة الشكل F' صورة الشكل F وفق الانسحاب هي:

○ أكبر من 20 ○ 20 ○ أصغر من 20

4. ABC مثلّث قائم، فإن صورته وفق انسحاب:

○ مثلّث متساوي الساقين ○ مثلّث متساوي الاضلاع ○ مثلّث قائم

5. D و Δ مستقيمان متوازيان فإن صورتهما وفق انسحاب هو:

○ مستقيمان متقاطعان ○ مستقيمان متوازيان ○ مستقيمان متعامدان

4 أقول إن كنت موافق أم لا أمام الاداعاءت التالية:

1. d و 'd مستقيمان متوازيان، عندئذ يوجد انسحاب واحد فقط ينقل d إلى 'd. ....
2. d و 'd مستقيمان متقاطعان، عندئذ لايوجد انسحاب ينقل d إلى 'd. ....
3. المستقيم ('BM) صورة المستقيم (AM) وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B عندئذ 'M صورة M وفق الانسحاب السابق. ....
4. القطعة المستقيمة ['BM]صورة القطعة المستقيم [AM] وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى Bعندئذ 'M صورة M وفق الانسحاب السابق. ....

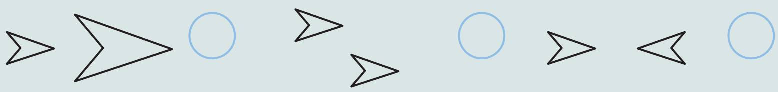
كيف أحب أن أتعلّم؟

في نهاية الوحدة أصبح بإمكاني تحديد الطّريقة الّتي ساعدتني أكثر في التّعلّم من خلال تلوين عدد من النُّجوم وفق ما يأتي:

ساعدتني كثيراً: ★★★ ساعدتني: ★★☆ ساعدتني قليلاً: ★☆☆

☆☆☆ أتعلّم بطريقة الاختيار من متعدِّد:

1. أجد الشكل وصورته في الحالة:

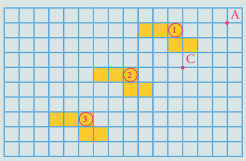


☆☆☆ أتعلّم بطريقة الرَّسم:

2 أتأمّل الشّكل المجاور:

a. أرسم الشكل 2 صورة الشكل 1 وفق الانسحاب من A إلى C؟

b. أرسم صورة الشكل 2 وفق الانسحاب من A إلى C؟

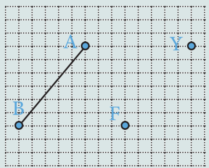


☆☆☆ أتعلّم بطريقة كتابة الإجابة:

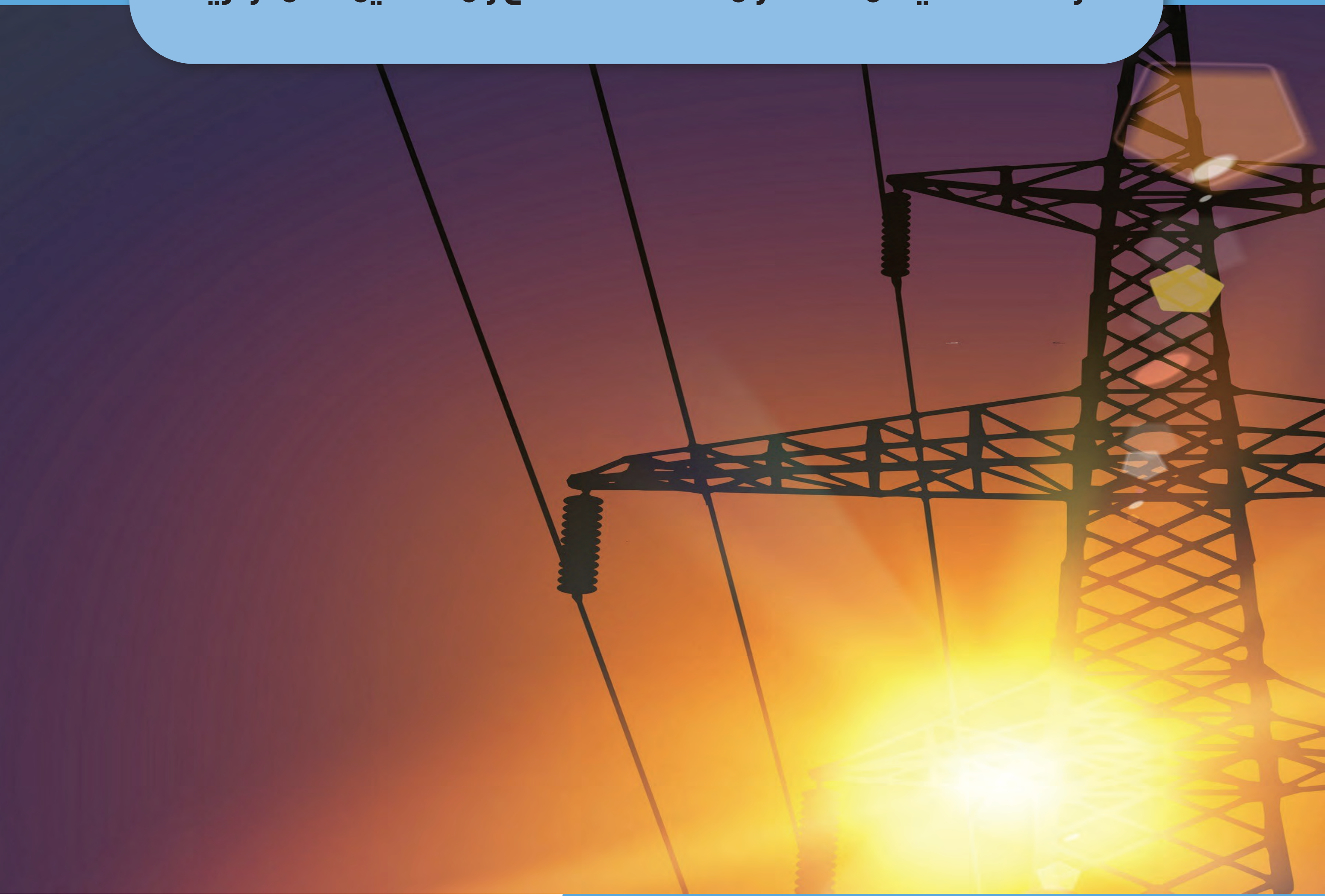
b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً ثم أملأ الفراغات:

1. صورة النّقطة y بانسحاب من A إلى B هي ....

2. الرّباعي .... متوازي أضلاع.



الوحدة الثانية: مثلّثات ومنتصفات أضلاع ومستقيمات متوازيّة



6 - 8 ساعات

قبلَ أنْ تبدأَ دراسةَ هذهِ الوحدةِ، استعنْ بدليلِ "كيفَ أتعلّمُ؟" لتنظيمِ وقتكَ وفقَ جداولِ توزيعِ المهامِّ الأسبوعيّةِ.
كما يمكنُكَ تقييمُ تَعلّمِكَ وصولاً لإتقانِ مهاراتِ التّعلّمِ في دراسةِ موادِّ منهاجِ التّعلّمِ التّمكينيِّ الآتيةِ: الرياضيّاتِ، واللُّغةِ العربيّةِ، وعلم الأحياء والفيزياء والكيمياء، واللغة الفرنسيّة، واللُّغةِ الإنكليزيّةِ.

دروس الوحدة

1 منتصفا ضلعين في المثلّث

2 تساوي ثلاث نسب

مراجعة في التناسب

كتابة تناسب وحساب قيمة مجهول في تناسب.

من 5 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

في كلّ مما يلي، واحدة فقط من الإجابات الثلاث المقترحة صحيحة، أشير إليها:

1 النقاط A وB وC وD وE على استقامة واحدة بهذا الترتيب وتقسم [AE] إلى قطع متساوية، إذاً:

○ $\frac{AB}{AE} = \frac{1}{5}$　○ $\frac{AB}{AE} = \frac{2}{5}$　○ $\frac{AB}{AE} = \frac{1}{4}$

2 النقاط الثلاث A وB وC تحقق (AC) || (AB)، فيمكن تأكيد أنّ:

○ C ∈ (AB)　○ A هي منتصف [BC]　○ AB =AC

3 إذا كان $\frac{3}{2} = \frac{x}{5}$ كان:

○ $x = \frac{3 \times 5}{2}$　○ $x = \frac{2 \times 5}{2}$　○ $x = \frac{2}{2 \times 5}$

4 إذا كان $\frac{7}{x} = \frac{5}{24}$ كان:

○ $x = \frac{7 \times 24}{5}$　○ $x = \frac{7 \times 5}{24}$　○ $x = \frac{5 \times 24}{7}$

5 إذا كان الجدول التالي هو جدول تناسب فإنه يمكن أن نكتب:

y	16	4
30	x	5

○ $\frac{4}{5} = \frac{x}{16} = \frac{y}{30}$ ○ $\frac{5}{4} = \frac{x}{16} = \frac{y}{30}$ ○ $\frac{4}{5} = \frac{16}{x} = \frac{y}{30}$

أتحقّق من إجابتي

1 النقاط A وB وC وD وE على استقامة واحدة بهذا الترتيب وتقسم [AE] إلى قطع متساوية، إذاً:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{1}{4}$$

2 النقاط الثلاث A وB وC تحقق (AC) || (AB)، فيمكن تأكيد أنّ:

$$C \in (AB)$$

3 إذا كان $\frac{3}{2} = \frac{x}{5}$ كان: $x = \frac{3 \times 5}{2}$

4 إذا كان $\frac{7}{x} = \frac{5}{24}$ كان: $x = \frac{7 \times 24}{5}$

5 إذا كان الجدول التالي هو جدول تناسب فإنه يمكن أن نكتب:

y	16	4
30	x	5

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{x} = \frac{y}{30}$$

الدّرس الأول: منتصفا ضلعين في المثلّث

طول ضلع مثلّث   التوازي   منتصف طول قطعة مستقيمة

استنتاج خواص التوازي في المثلّث واستعمالها في حل المسائل.

من 2 الى 2:30 ساعة.

قلم   ممحاة   مسطرة

هيّا بنا

1. أرسمُ ثلاثة مثلّثات ABC، في إحداهما $\widehat{A}$ حادة وفي آخر $\widehat{A}$ منفرجة وفي ثالثها $\widehat{A}$ قائمة.

2. في كلّ من تلك المثلّثات، أضعُ النقطة M في منتصف [AB] والنقطة N في منتصف [AC]، ثمّ أرسمُ المستقيم (MN).

- أحددُ وضع المستقيمين (MN) و(BC).

....

- أقارنُ بين الطولين MN و BC.

....

النشاط 1: منتصفا ضلعين

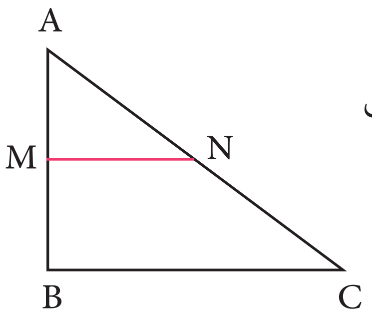
اكتشاف خاصة المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلّث.

من 10 الى 12 دقيقة.

قلم منقلة مسطرة

أنفذُ خطوات رسم منتصفي ضلعين في مثلّث وأجيبُ عن الأسئلة في كلٍّ مما يلي، كما في المثال المحلول:

a في الشكل المرسوم جانباً ABC مثلّث:



1. أضّعُ النقطة M منتصف الضلع [AB]، النقطة N منتصف الضلع [AC].
2. أرسمُ المستقيم (MN).
3. أقيسُ طول [MN] وطول [BC].
4. أَضعُ إشارة (✓) في ◯ لأختار الإجابة الصحيحة اعتماداً على ما سبق:

◯ طول [MN] = ربع طول [BC]

◯ طول [MN] = ثلث طول [BC]

✓ طول [MN] = نصف طول [BC]

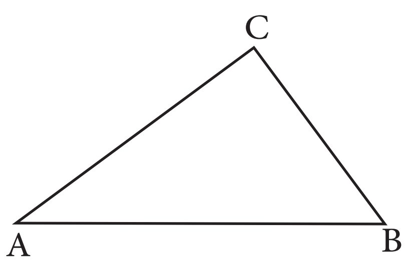
✓ (MN) يوازي (BC)

◯ (MN) يعامد (BC)

◯ (MN) يقطع (BC)

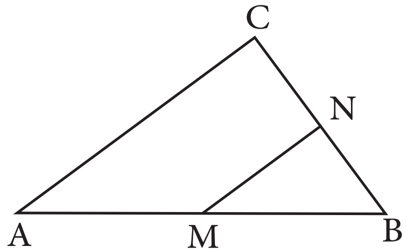
من الشكل نجد أن هناك توازي بين المستقيم (MN) والضلع [BC]. وأيضاً: $MN = \frac{1}{2} BC$

b ABC مثلّث:



1. أضّعُ النقطة M منتصف الضلع [AB]، النقطة N منتصف الضلع [BC].
2. أرسمُ المستقيم (MN).
3. أقيسُ الطول MN والطول BC.

أتحقّق من إجابتي



b بما أن M منتصف AB والنقطة N منتصف BC.

فإن: $(MN) \parallel (AC)$.

و طول القطعة $[MN]$ نصف طول القطعة $[AC]$.

المبرهنة الأولى في المنتصفات:

- المستقيم المار بمنتصفي ضلعين من أضلاع مثلّث، يوازي ضلعها الثالثة.
- طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين من أضلاع مثلّث، يساوي نصف طول الضلع الثالثة

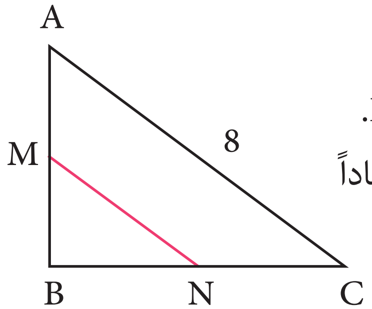
النشاط 2: القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين

حساب طول القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث.

من 5 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

أنفذ خطوات رسم مستقيم يوازي ضلع في مثلّث وأجيب عن الأسئلة في كل مما يلي، كما في المثال المحلول:

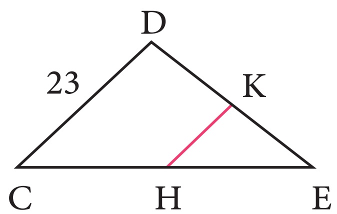


a في الشكل المرسوم جانباً ABC مثلّث:

1. $AC = 8$ والنقطة M منتصف AB و النقطة N منتصف BC.
2. أَضعُ إشارة (✓) في ◯ لأختار الإجابة الصحيحة اعتماداً على ما سبق:

حسب مبرهنة المنتصفات الأولى

✓ $MN = 4$ ◯ $MN = 2$ ◯ $MN = 8$



b في الشكل المرسوم جانباً DEC مثلّث:

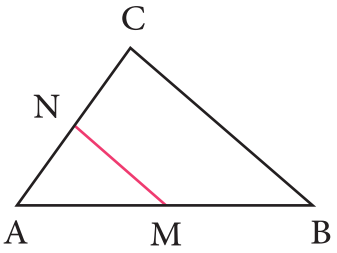
$DC = 23$ والنقطة K منتصف DE و النقطة H منتصف EC.

1. أَضعُ إشارة (✓) في ◯ لأختار الإجابة الصحيحة اعتماداً على ما سبق:

◯ $HK = 11.5$ ◯ $HK = 23$ ◯ $HK = 14$

b في الشكل المرسوم جانباً DEC مثلّث:

$MN = 8$ والنقطة M منتصف AB و النقطة N منتصف AC.

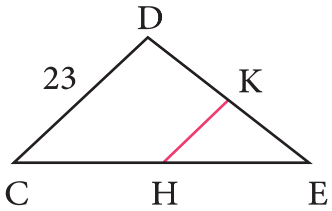


1. أَضعُ إشارة (✓) في ◯ لأختار الإجابة الصحيحة اعتماداً على ما سبق:

◯ $BC = 4$ ◯ $BC = 16$ ◯ $BC = 8$

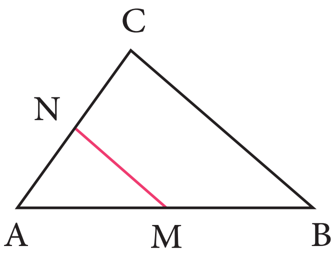
أتحقّق من إجابتي

b بما أن النقطة k منتصف الضلع [DE] و النقطة H منتصف الضلع [CE] فحسب مبرهنة المنتصفات الأولى نجد أن :



$$HK = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(23) = 11.5$$

c بما أن النقطة M منتصف الضلع [AB] و النقطة N منتصف الضلع [AC] فحسب مبرهنة المنتصفات الأولى نجد أن:



$$MN = \frac{1}{2}CB$$

$$CB = 2\ MN = 2(8) = 16$$

النشاط 3: موازٍ لضلع من منتصف ضلع آخر

اكتشاف خاصة المستقيم المار بمنتصف ضلع في المثلّث موازياً ضلعاً آخر منه.

من 5 إلى 10 دقائق.

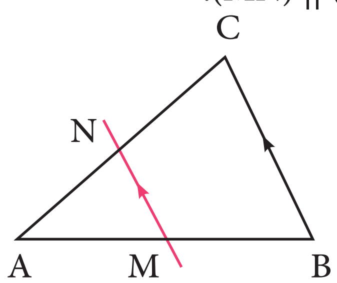
قلم   ممحاة   مسطرة

أنفذ خطوات رسم مستقيم يوازي ضلعاً في مثلّث وأجيب عن الأسئلة في كل ممّا يلي، كما في المثال المحلول:

a في الشكل المرسوم جانباً ABC مثلّث:

1. النقطة M منتصف AB و النقطة N على الضلع AC و (BC) || (MN).

2. أَضعُ إشارة (✓) في ◯ لأختار الإجابة الصحيحة:



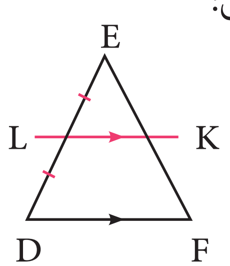
✓ N منتصف الضلع [AC]

◯ N منتصف الضلع [BC]

◯ N تقع على الضلع [AC] بأي مكان

b DEF مثلّث: النقطة L منتصف DE والنقطة K تقع على الضلع EF و (DF) || (LK).

أَضعُ إشارة (✓) في ◯ لأختار الإجابة الصحيحة اعتماداً على ما سبق:



◯ K منتصف الضلع [EF]

◯ K منتصف الضلع [DF]

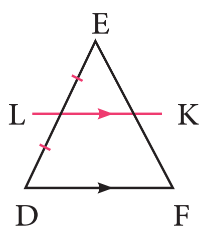
◯ K تقع على الضلع [EF] بأي مكان

أتحقّق من إجابتي

b بما أن النقطة L منتصف الضلع [DE] و (DF) \\ (LK)

وحسب مبرهنة المنتصفات الثانية نجد أن K تقع في منتصف الضلع EF.

المبرهنة الثانية في المنتصفات: المستقيم المار بمنتصف أحد أضلاع مثلّث موازياً ضلعاً آخر، يقطع الضلع الثالث في منتصفه.



النشاط 4: مبرهنات المنتصفات

تنظيم معلوماتي عن مبرهنات المنتصفات في مثلّث واستعمالاتها.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

أقرأ من مبرهنات المنتصفات واستعمالاتها، ثمّ أثبت معلوماتي عنها:

ما المبرهنة الأولى في المنتصفات؟

- المستقيم المار بمنتصفي ضلعين من أضلاع مثلّث، يوازي ضلعه الثالثة.
- طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين من أضلاع مثلّث، يساوي نصف طول الضلع الثالثة.

ما المبرهنة الثانية في المنتصفات؟

- المستقيم المار بمنتصف أحد أضلاع مثلّث موازياً ضلعاً آخر، يقطع الضلع الثالث في منتصفه.

أين أستخدم المبرهنة الأولى في المنتصفات؟

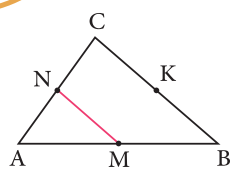
- لحساب طول قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث، نستخدم المبرهنة الأولى في المنتصفات.
- لإثبات توازي مستقيم مع أحد أضلاع مثلّث علماً أنّ هذا المستقيم يمر بمنتصفي الضلعين الآخرين في المثلّث، نستخدم مبرهنة المنتصفات الأولى.

أين أستخدم المبرهنة الثانية في المنتصفات؟

- لإثبات أن نقطة تقع في منتصف أحد أضلاع مثلّث علماً أنه يمر منها مستقيم موازٍ لضلع آخر، نستخدم مبرهنة الثانية في المنتصفات.

منتصفات ضلعين في مثلّث

أمثلة أستخدم فيها مبرهنتي المنتصفات :



أحسب طول القطعة MN في المثلّث ABC.

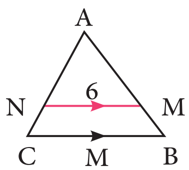
(BC) || (MN)

إذاكان BC=10 و AB=12 و M منتصف [AB] و N منتصف [AC] و K منتصف [BC].

$$MN = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}(10) = 5$$

- يمكنني حساب [NK]. ....

مثال لا يمكنني أن أستخدم فيه مبرهنتي المنتصفات:



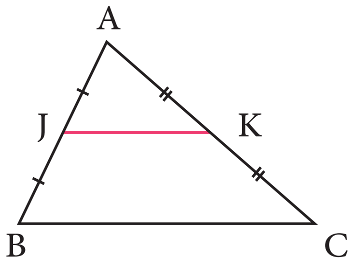
ألاحظ أن في الشكل المجاور MN = 6

و (BC) || (MN)

لا يمكن أن تكون طول BC = 12

(لم أستخدم مبرهنتي المنتصفات لأن النقطتين N، M ليستا بمنتصفي الضلعين)

1 في مثلّث ABC: J منتصف [AB] و K منتصف [AC] و BC = 12 cm.
أحسب طول القطعة [JK].



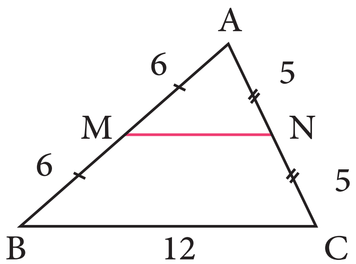
....

....

....

2 ABC مثلّث فيه M و N نقطتان من ضلعيه [AB] و [AC] على التوالي وتحققان الأطوال المشار إليها على الشكل.

- أثبت أنّ المستقيمين (MN) و (BC) متوازيان.
- أحسب طول القطعة [MN].



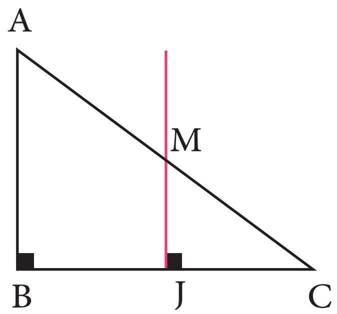
....

....

....

3 ABC مثلّث قائم في B والنقطة J منتصف الضلع [BC] حسب الشكل.

- أثبت أن المستقيم (MJ) يوازي الضلع [AB].
- أثبت أن M منتصف [AC].



....

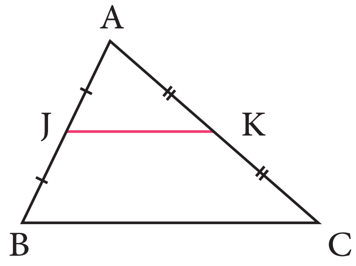
....

....

أتحقّق من إجابتي

1 في مثلّث ABC: J منتصف [AB] و K منتصف [AC] و BC = 12 cm.

أحسب طول القطعة [JK].

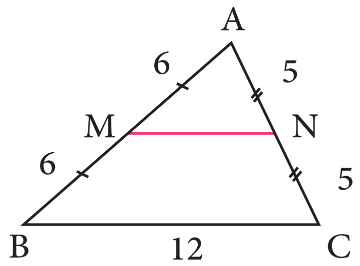


بما أنّ J منتصف [AB] و K منتصف [AC]

وحسب المبرهنة الأولى في المنتصفات نجد أنّ:

$$JK = \frac{1}{2}\,BC = \frac{1}{2}\,(12) = 6$$

2 ABC مثلّث فيه M و N نقطتان من ضلعيه [AB] و [AC] على التوالي وتحققان الأطوال المشار إليها على الشكل.

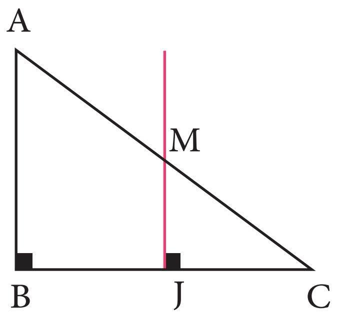


- أثبت أنّ المستقيمين (MN) و (BC) متوازيان.
- أحسب طول القطعة [MN].

- من الشكل نجد أن M منتصف AB و N منتصف AC وحسب المبرهنة الثانية في المنتصفات نجد أن (BC) || (MN).
- بما أن [MN] قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين فيكون:

$$MN = \frac{1}{2}\,BC = \frac{1}{2}\,(12) = 6$$

3 ABC مثلّث قائم في B و النقطة J منتصف الضلع [BC] حسب الشكل.



- أثبت أن المستقيم (MJ) يوازي الضلع [AB].
- أثبت أن M منتصف [AC].

- بما أن المثلّث قائم في B فإنّ AB عامود على BC و نلاحظ أنّ JM عامود على BC فرضاً إذاً (AB) || (JM) لأنّ العمودين على مستقيم واحد متوازيان.
- بما أن J منتصف الضلع [BC] ومن الطلب السابق وجدنا أن (AB) || (MJ) وحسب المبرهنة الثانية في المنتصفات نجد أن M منتصف الضلع [AC].

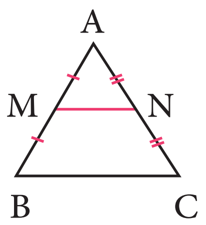
ألخّصُ درسي:

15 – 20 دقيقة

تعلّمت في درس منتصفا ضلعين في المثلث:

أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:

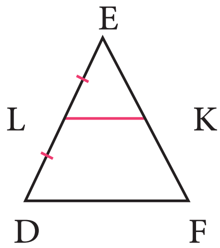
☐ **حساب طول قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث.**



في المثلّث ABC ، M منتصف [AB] و N منتصف [AC] و(MN) || (BC) فإذا كان BC = 10 فإن:

$$[MN] = \frac{1}{2}[CB] = \frac{1}{2}(10) = 5$$

☐ **استخدام المبرهنة الثانية في المنتصفات لإثبات أن نقطة تقع في منتصف ضلع لمثلّث.**



النقطة L منتصف DE والنقطة K تقع على الضلع EF و (LK) || (DF)

فحسب المبرهنة الثانية في المنتصفات نجد أن K تقع في منتصف الضلع [EF].

يمكنني رسم مثلّث، ثمّ أحسب طول قطعة مستقيمة واصلة بين منتصفي ضلعين في أي مثلّث.

الدّرس الثاني: تساوي ثلاث نسب

طول ضلع مثلّث   التوازي   نسب متساوية

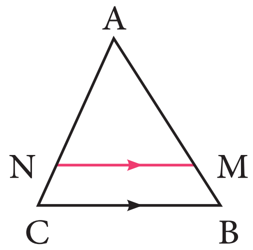
استعمال خصائص المستقيمات المتوازية والمتعامدة والمتقاطعة في حل المسائل

من 1 الى 1:30 ساعة.

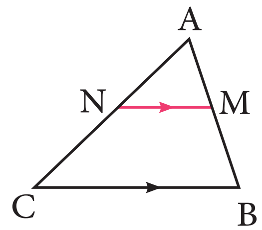
قلم   ممحاة   مسطرة

هيّا بنا

1. في كلّ من الشكلين الآتيين، أقيسُ أطوال أضلاع كلٍّ من المثلّثين ABC وAMN، ثمّ أنظم جدولاً بالنتائج لكل حالة.



أطوال أضلاع المثلّث AMN	AM = ...	AN = ...	MN = ...
أطوال أضلاع المثلّث AMN	AB = ...	AC = ...	BC = ...



أطوال أضلاع المثلّث AMN	AM = ...	AN = ...	MN = ...
أطوال أضلاع المثلّث AMN	AB = ...	AC = ...	BC = ...

2. هل كلّ من الجدولين هو جدول تناسب؟

....

....

النشاط 1: النسب المتساوية

اكتشاف مبرهنة النسب الثلاث المتساوية.

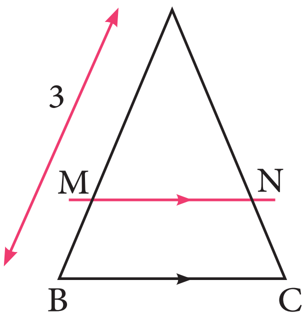
من 10 إلى 15 دقيقة.

قلم ممحاة مسطرة

أَضعُ إشارة (✓) في ◯ لأختار الإجابة الصحيحة، كما في المثال المحلول:

a في الشكل المرسوم جانباً ABC مثلّث فيه: AB = 3 ، M نقطة على AB تحقق AM = 2.

أرسمُ مستقيماً ماراً من M وموازياً لـ(BC) ويقطع AC في N.

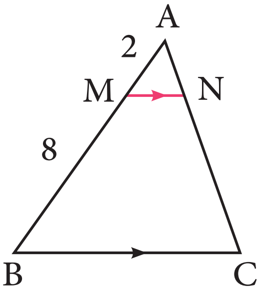


◯ $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$ ◯ $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$ ✓ $\frac{AN}{AC} = \frac{2}{3}$

◯ $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$ ✓ $\frac{MN}{BC} = \frac{2}{3}$ ◯ $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$

b في الشكل المرسوم جانباً ABC مثلّث فيه: AB = 8 ، M نقطة على AB تحقق AM = 2.

أرسمُ مستقيماً ماراً من M وموازياً لـ(BC) ويقطع AC في N.



◯ $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{4}$ ◯ $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$ ◯ $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$

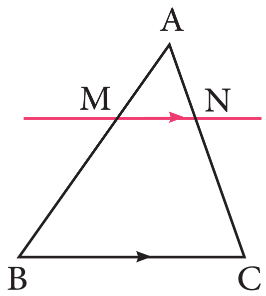
◯ $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{4}$ ◯ $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{3}$ ◯ $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$

c أرسمُ مثلّثاً ABC ثـم أعـيّن عليـه النقطة D عـلى الضلع [AB] بحيـث $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$ و النقطة E على الضلع [AC] وأرسـم المسـتقيم (DE) || (BC).

○ $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$ ○ $\frac{AE}{AC}=\frac{3}{4}$ ○ $\frac{AE}{AC}=\frac{1}{4}$

○ $\frac{DE}{BC}=\frac{3}{4}$ ○ $\frac{DE}{BC}=\frac{2}{4}$ ○ $\frac{DE}{BC}=\frac{1}{4}$

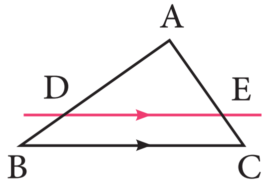
أتحقّق من إجابتي



b بما أن $\frac{AM}{AB}=\frac{1}{4}$ فإن $\frac{AN}{AC}=\frac{1}{4}$ و $\frac{MN}{BC}=\frac{1}{4}$

مبرهنة النسب الثلاث المتساوية: إذا قطع مستقيم (d) ضلعي المثلّث ABC، [AB] في M و[AC] في N وكان (BC) || (MN) كان:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$



c بما أن $\frac{AD}{AB}=\frac{3}{4}$ فإن $\frac{AE}{AC}=\frac{3}{4}$ و $\frac{DE}{BC}=\frac{3}{4}$

النشاط 2: توظيف مبرهنة النسب الثلاث

حساب طول ضلع في مثلّث باستخدام مبرهنة النسب الثلاث المتساوية.

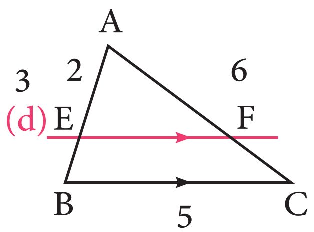
من 20 إلى 25 دقيقة.

قلم ممحاة مسطرة

أَضعُ إشارة (✓) في ○ لأختار الإجابة الصحيحة، كما في المثال المحلول:

a في الشـكل المرسـوم جانبـاً ABC مثلّـث أطـوال أضلاعـه، AB = 3
BC = 5 ، AC = 6

المسـتقيم (BC) || (d) و يقطـع [AB] في E و [AC] في F. إذا علمـت أن AE = 2.

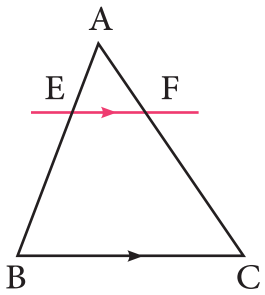


- $\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{AB}$ ○
- $\frac{AB}{AE} = \frac{AF}{AC}$ ○
- $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ ✓

- $\frac{AF}{6} = \frac{2}{5}$ ○
- $\frac{AF}{5} = \frac{2}{3}$ ○
- $\frac{AF}{6} = \frac{2}{3}$ ✓

- $AF = \frac{6 \times 3}{2} = 9$ ○
- $AF = \frac{3 \times 2}{6} = 1$ ○
- $AF = \frac{6 \times 2}{3} = 4$ ✓

b في الشـكل المرسـوم جانبـاً ABC مثلّـث فيـه، BC = 8 ، AC = 12
AB =10
المسـتقيم (BC) || (d) و يقطـع [AB] في E و [AC] في F . إذا علمـت أن AE = 3

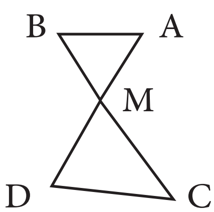


- $\frac{AF}{AC} = \frac{EF}{AB}$ ○
- $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$ ○
- $\frac{AF}{AC} = \frac{AB}{AE}$ ○

- $\frac{AF}{12} = \frac{10}{3}$ ○
- $\frac{AF}{12} = \frac{3}{10}$ ○
- $\frac{AF}{8} = \frac{12}{3}$ ○

- $AF = \frac{10 \times 3}{12} = 2.5$ ○
- $AF = \frac{3 \times 12}{10} = \frac{18}{5}$ ○
- $AF = \frac{8 \times 12}{3} = 32$ ○

c في الشـكل المرسـوم جانبـاً DCM مثلّـث فيـه، DM = 8 ، MC = 12
DC =10
المستقيم (BA) || (DC) . إذا علمت أن AM = 3



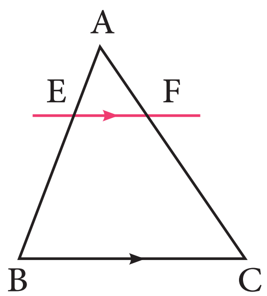
- $\frac{AM}{DM} = \frac{BM}{BC}$ ○
- $\frac{AM}{DM} = \frac{AB}{MC}$ ○
- $\frac{AM}{DM} = \frac{BM}{MC}$ ○

$\frac{3}{12} = \frac{MB}{3}$ ◯ $\frac{3}{12} = \frac{BM}{8}$ ◯ $\frac{3}{8} = \frac{BM}{12}$ ◯

$AF = \frac{3 \times 8}{12} = \frac{9}{2}$ ◯ $AF = \frac{3 \times 8}{12} = 2$ ◯ $BM = \frac{3 \times 12}{8} = \frac{36}{8} = \frac{19}{4}$ ◯

أتحقّق من إجابتي

b بما أن (BC) || (d) فحسب مبرهنة النسب الثلاث المتساوية:



$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

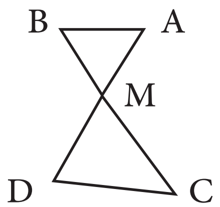
$$\frac{3}{10} = \frac{AF}{12} = \frac{EF}{8}$$

ومنه:

$$\frac{3}{10} = \frac{AF}{12}$$

$$AF = \frac{12 \times 3}{10} = \frac{36}{10} = 3.6$$

c بما أن (BA) || (DC) فحسب مبرهنة النسب الثلاث المتساوية:



$$\frac{AM}{DM} = \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{DC}$$

$$\frac{3}{8} = \frac{MB}{12} = \frac{AB}{10}$$

ومنه:

$$\frac{3}{8} = \frac{MB}{12}$$

$$MB = \frac{12 \times 3}{8} = \frac{36}{8} = \frac{18}{4}$$

النشاط 3: ما مبرهنة النسب الثلاث؟

تنظيم معلوماتي عن مبرهنة النسب الثلاث واستخدامها.

من 20 إلى 25 دقيقة.

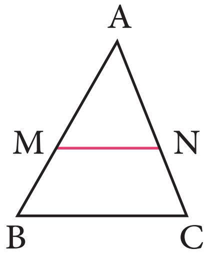
قلم ممحاة

أقرأ عن مبرّهنة النسب الثلاث ثم أثبت معلوماتي ومعارفي عنها:

مبرهنة النسب الثلاث

ما مُبرهنة النسب الثلاث؟

إذا قطع مستقيم (d) ضلعي مثلّث ABC [AB] في M و[AC] في N وكان (AB) || (MN)، كان:



$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

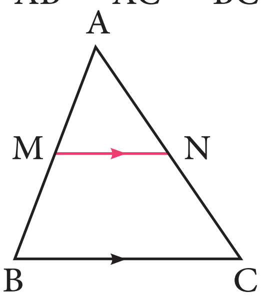
أين أستخدم مبرهنة النسب المتساوية:

- لحساب طول ضلع في مثلّث نستخدم مبرهنة النسب الثلاث في مثلّث.
- حالة خاصة: إذا كان النقطتان في منتصفي الضلعين، نستخدم المبرهنة الأولى في المنتصفات.

مثال عن استخدام النسب الثلاث:

أكتبُ النسب الثلاث المتساوية في المثلّث ABC إذا كان (MN) || (BC):

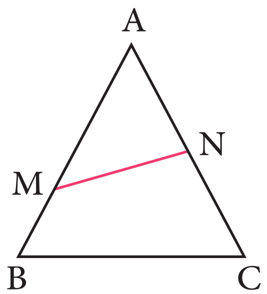
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



- أرسم على ورقة، مثلّث بنفس المعطيات السابقة على أن يكون قائم في B وأكتب النسب.

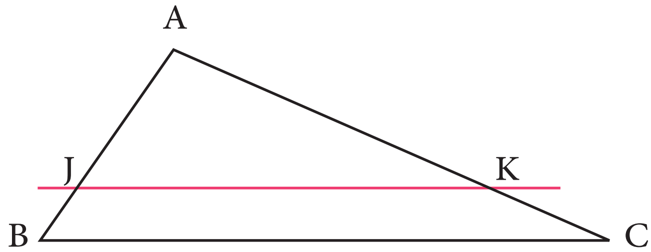
مثال لا يمكنني فيه استخدام النسب الثلاث:

لا يمكنني أن أطبق مبرهنة النسب الثّلاث في الشّكل المجاور لعدم وجود توازي.



15 – 20 دقيقة

1 في مثلّث ABC : $BC = 15\ cm$ ،$AJ = 5\ cm$ ، $AB = 8\ cm$
بحيث $(JK) \parallel (BC)$
أحسب طول القطعة [JK].



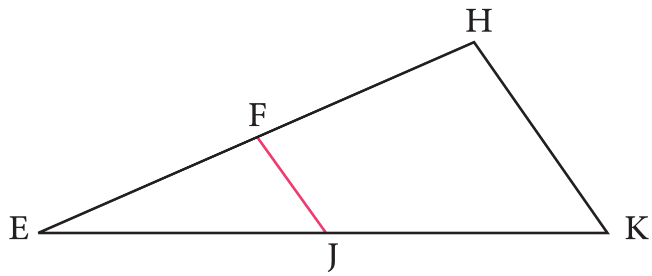
....

....

....

....

2 EHK مثلّث فيه: $EK = 12\ cm$ ،$KH = 8\ cm$ ،$EJ = 5\ cm$ بحيث $(HK) \parallel (EJ)$،
أحسب طول [FJ]



....

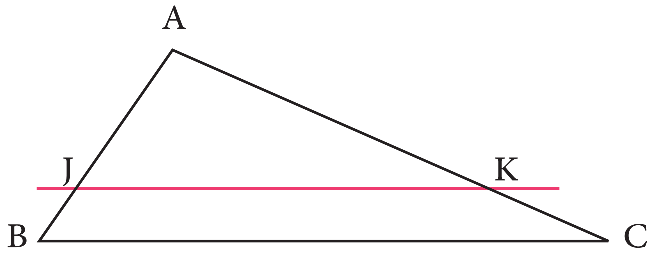
....

....

....

أتحقّق من إجابتي

1 في مثلّث ABC : $BC = 15\ cm$ ، $AJ = 5\ cm$ ، $AB = 8\ cm$
بحيث $(JK) \parallel (BC)$
أحسب طول القطعة [JK].



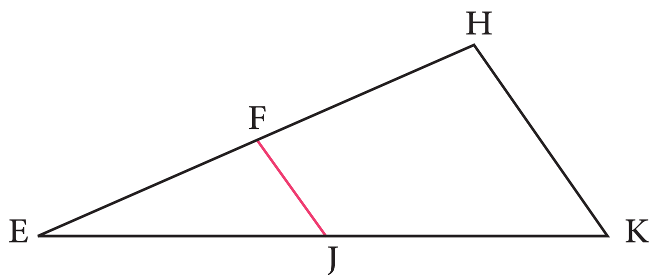
حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلّث ABC :

$$\frac{AJ}{AB} = \frac{AK}{AC} = \frac{JK}{BC}$$

$$\frac{5}{8} = \frac{AK}{AC} = \frac{JK}{15}$$

$$JK = \frac{15 \times 5}{8} = \frac{75}{8}$$

2 EHK مثلّث فيه: $EK = 12\ cm$، $KH = 8\ cm$، $EJ = 5\ cm$ بحيث $(HK) \parallel (EJ)$،
أحسب طول [FJ].



حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلّث EKH:

$$\frac{EJ}{EK} = \frac{EF}{EH} = \frac{JF}{HK}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{EF}{EH} = \frac{JF}{8}$$

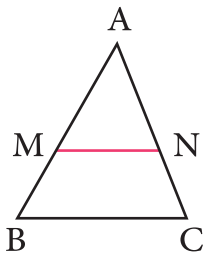
$$JF = \frac{8 \times 5}{12} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$$

أَلخّصُ درسي: 15 – 20 دقيقة

تعلّمت في درس تساوي ثلاث نسب:

أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:

☐ **كتابة ثلاث نسب متساوية صحيحة:**



النسب المتساوية في مثلّث ABC إذا كان(MN) || (BC) هي:

$$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}$$

☐ **استخدام مبرهنة النسب الثلاث في إيجاد طول ضلع في مثلّث.**

EHK مثلّث فيه: EK = 12 cm ،KH = 8 cm ،EJ = 5 cm

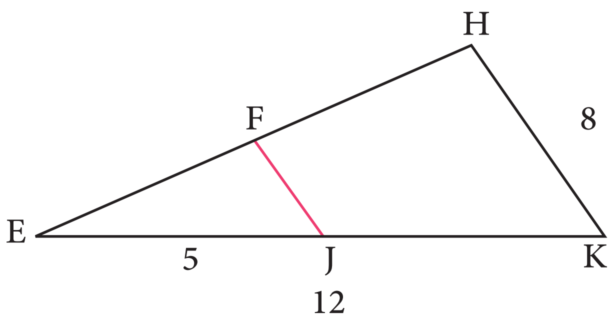
بحيث (HK) || (FJ) طول [FJ]

حسب مبرهنة النسب الثلاث في المثلّث EKH :

$$\frac{EJ}{EK}=\frac{EF}{EH}=\frac{JF}{HK}$$

$$\frac{5}{12}=\frac{JF}{8}$$

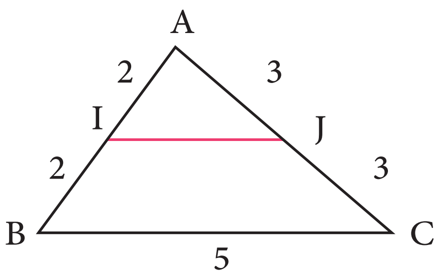
$$JF=\frac{8\times 5}{12}=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}$$



يمكنني أن أحسب طول أي ضلع في مثلّث إذا عُلم منه أطوال ثلاث قطع مستقيمة، في حال وجود توازي مع أحد أضلاع المثلّث.

1 أجيب بعبارة موافق أم غير موافق مع شرح الإجابة.

ABC مثلّث فيه J ،I نقطتان من الضلعين [AB]،[AC]
و يحققان الأطوال الموضّحة بالشكل .



- $(IJ) \parallel (BC)$ ....
- $[IJ] = [BC] = 5$ ....

....

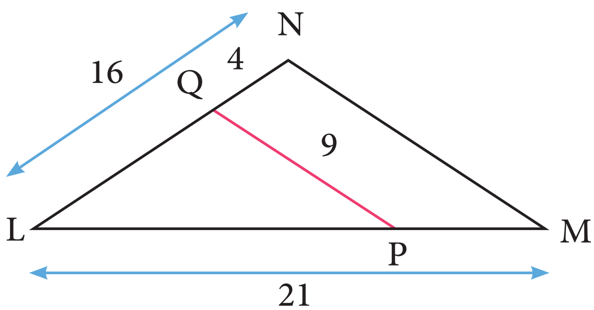
....

....

....

2 أحلُّ المسألة التالية:

في الشكل المرافق: LMN مثلّث فيه:
$(PQ) \parallel (MN)$
أحسب كلّاً من الأضلاع [MN] ، [LP]



....

....

....

....

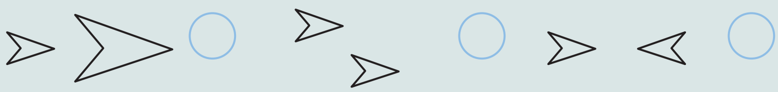
كيف أحب أن أتعلّم؟

في نهاية الوحدة أصبح بإمكاني تحديد الطّريقة الّتي ساعدتني أكثر في التّعلّم من خلال تلوين عدد من النُّجوم وفق ما يأتي:

ساعدتني كثيراً: ★★★ ساعدتني: ★★☆ ساعدتني قليلاً: ★☆☆

☆☆☆ أتعلّم بطريقة الاختيار من متعدِّد:

1. أجد الشكل وصورته في الحالة:

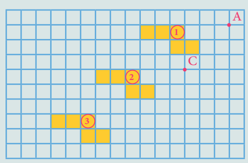


☆☆☆ أتعلّم بطريقة الرَّسم:

2 أتأمّل الشّكل المجاور:

a. أرسم الشكل 2 صورة الشكل 1 وفق الانسحاب من A إلى C؟

b. أرسم صورة الشكل 2 وفق الانسحاب من A إلى C؟

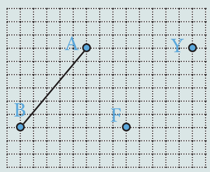


☆☆☆ أتعلّم بطريقة كتابة الإجابة:

b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً ثم أملأ الفراغات:

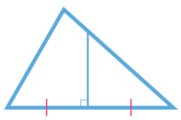
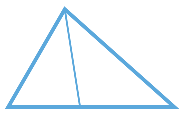
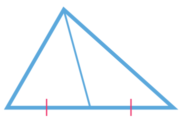
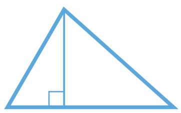
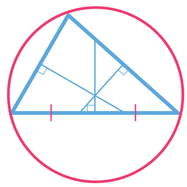
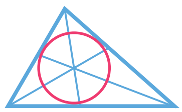
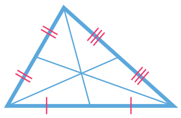
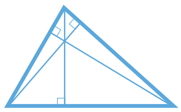
1. صورة النّقطة y بانسحاب من A إلى B هي ....

2. الرّباعي .... متوازي أضلاع.



الوحدة الثالثة: الخطوط الأساسيّة في المثلّث

القطع المستقيمة والنقاط الخاصة في المثلّثات

محور ضلع	منصّف زاوية	المتوسط	الارتفاع
			
نقطة تلاقي المحاور هي: مركز الدائرة الخارجية للمثلّث	نقطة تلاقي المنصّفات هي: مركز الدائرة الداخلية للمثلّث	نقطة تلاقي المتوسطات هي: مركز المثلّث	نقطة تلاقي الارتفاعات هي: ملتقى الارتفاعات
			

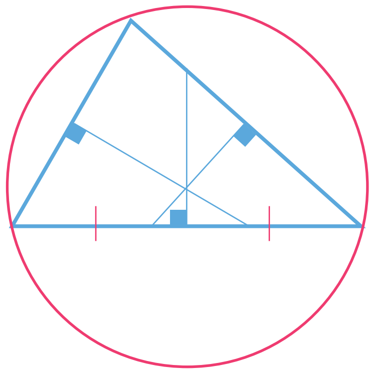
من 1:30 إلى 2:00 ساعة .

قبلَ أنْ تبدأَ دراسةَ هذهِ الوحدةِ، استعنْ بدليلِ "كيفَ أتعلّمُ؟" لتنظيمِ وقتكَ وفقَ جداولِ توزيعِ المهامِّ الأسبوعيّةِ.

كما يمكنُكَ تقييمُ تَعلّمِكَ وصولاً لإتقانِ مهاراتِ التّعلّمِ في دراسةِ موادِّ منهاجِ التّعلّمِ التّمكينيِّ الآتيةِ: الرياضيّاتِ، واللُّغةِ العربيّةِ، وعلم الأحياء والفيزياء والكيمياء، واللغة الفرنسيّة، واللُّغةِ الإنكليزيّةِ.

دروس الوحدة

1 محور ضلع في المثلّث



2 ارتفاع مثلّث

3 المتوسط في المثلّث

4 منصّف زاوية مثلّث

هيّا نبدأ

كيف أعيّن نقاط مميزة في المثلّث؟

تعيين مركز الدائرة المارة بروؤس مثلّث ومركز الدائرة الماسة لأضلاع المثلّث ومركز ثقل مثلّث.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

a صُمّم مطبخ على شكل مثلّث ووضعت الثلاجة في زاوية A والفرن في زاوية أخرى B وأدوات المطبخ في الزاوية الثالثة C. نريد تعيين موقع بريز كهرباء لوضعه داخل المطبخ بحيث يكون موقعه متساوي البعد عن الفرن والثلاجة والادوات، أين نضع البريز؟

....

....

b في أحد المهرجانات يريد مهرّج أنّ يقدّم عرضاً مسرحيّاً للأطفال وذلك بجعل قطعة خشبية على شكل مثلّث متوازنة عند وضعها على عصا؟ كيف يمكن لنا تعيين موضع العصا على القطعة الخشبية لجعلها متوازنة؟

....

....

....

c مزرعـة عـلى شـكل مثلّـث يريـد صاحبها بناء حوض سـباحة بشـكل دائرة يمس اسـوار المزرعـة كيـف يمكـن لنا تعيـين مركز حوض السـباحة؟

....

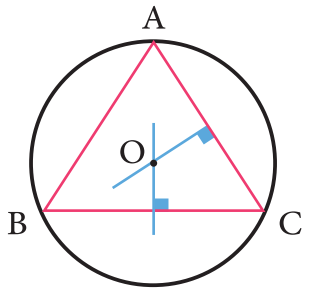
....

....

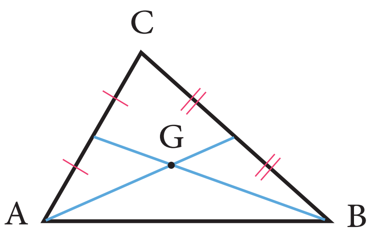
نعلـم أنّ نقطـة تلاقـي المحـاور هـي مركـز الدائـرة المـاؤة بـرؤوس مثلّـث، وأنّ نقطـة تلاقـي المنصّفـات هـي مركـز الدائـرة الماسـة بالأضـلاع، وانّ نقطـة تلاقي المتوسـطات هـي مركز ثقل ا لمثلّث

أتحقّق من إجابتي

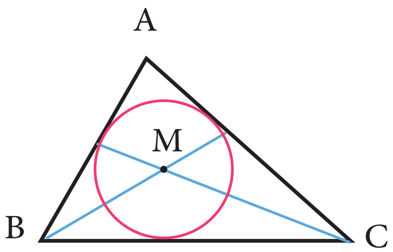
a نعلـم أنّ مركـز الدائـرة المـارة بـرؤوس المثلّـث ABC تكـون متسـاوية البعـد عـن رؤوسـه ومركـز هـذه الدائرة هـو نقطة تلاقـي المحاور.



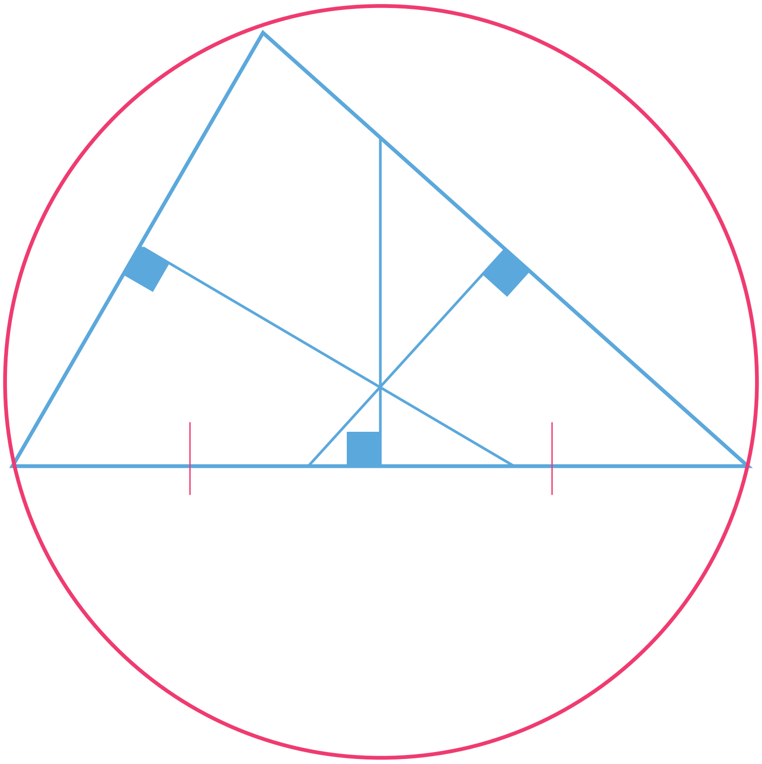
b نعلـم أن النقطـة التـي تتوازن عندها الخشـبة المثلّثيـة هـي مركز ثقل المثلّـث أي نقطة تلاقي المتوسـطات وهي النقطة المنشـودة.



c نعلـم مركـز الدائـرة الماسـة داخـلاً لأضـلاع مثلّـث هـو نقطـة تلاقـي منصّفـات المثلّـث وهـي النقطـة المنشـودة.



الدّرس الأول: محور ضلع في المثلّث



محور قطعة مستقيمة　　المثلّث
نقطة تلاقي المحاور　　مركز دائرة مارّة برؤوس المثلّث

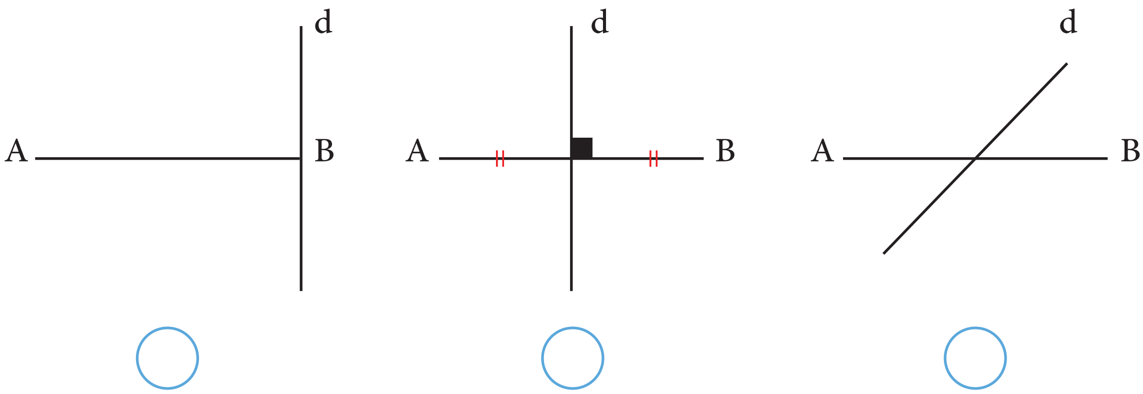
إنشـاء الخطـوط الأساسـية في المثلّـث مسـتعملاً الأدوات الهندسـية، واسـتعمال خصائـص الخطـوط الأساسـية في المثلّـث في حـل المسـائل.

من 1:15 إلى 1:30 ساعة.

قلم　ممحاة　منقلة　كوس　فرجار

هيّا بنا

أختار في كل ممّا يأتي الشكل الذي يكون فيه المستقيم d يعامد القطعة المستقيمة [AB] في منتصفها.



أسمّي المستقيم العمودي على القطعة المستقيمة [AB] في منتصفها محور القطعة المستقيمة [AB] .

النشاط 1: ما هو محور ضلع في المثلّث؟

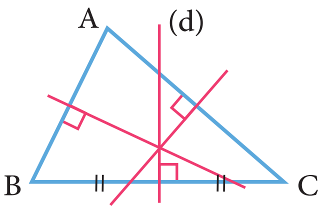
تمييز محور ضلع في المثلّث.

من 8 إلى 10 دقائق.

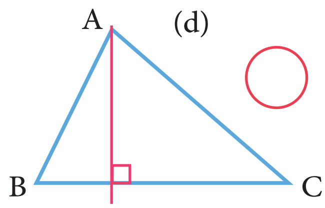
قلم ممحاة

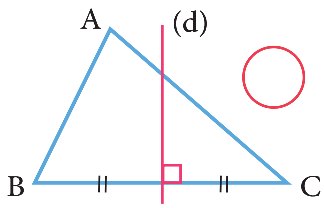
أحدد أيّاً من المستقيمات الآتية هو محور في المثلّث، كما في المثال المحلول:

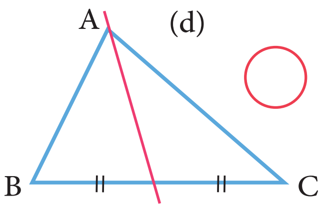
a في الشكل الآتي إنّ محور الضلع $[BC]$ في المثلّث ABC هو المستقيم (d).
لأن محور ضلع في المثلّث هو المستقيم العمودي على هذا الضلع في منتصفها.
وأقول أيضاً:
أيّاً كانت النقطة M من (d)، كان MB = MC.
(كل نقطة من محور ضلع مثلّث متساوية البعد عن طرفي الضلع).



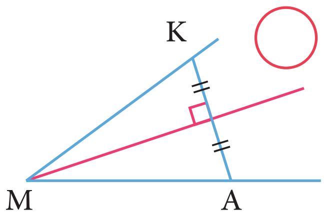
b محور الضلع $[BC]$ في المثلّث ABC هو في الشكل ....

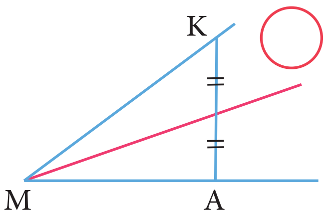


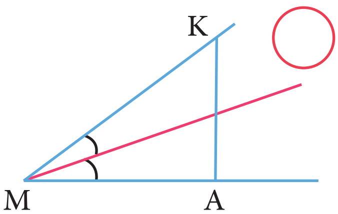




c محور الضلع $[AK]$ في المثلّث AKM هو في الشكل ....

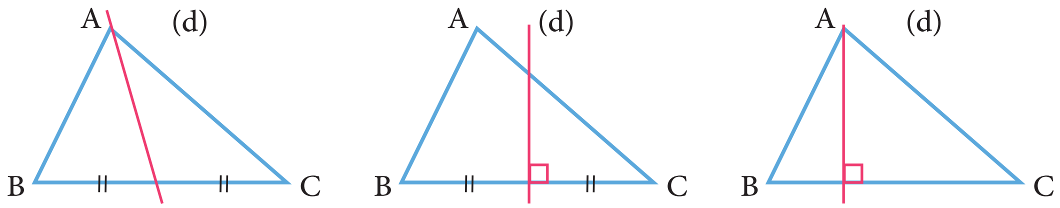






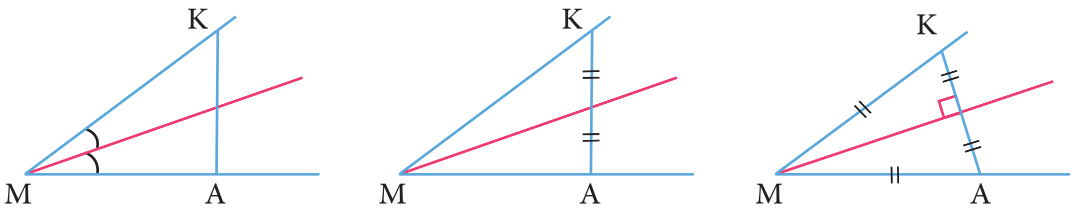
أتحقّق من إجابتي

b



- في الشكل الأول المستقيم يعامد $[BC]$ ولكن نقطة التعامد ليست في المنتصف. فهو ليس محوراً.
- في الشكل الثاني المستقيم يعامد $[BC]$ في المنتصف، فهو محور.
- في الشكل الثالث المستقيم لا يعامد $[BC]$ مع أنّ نقطة التقاطع في المنتصف. فهو ليس محوراً.

c



- في الشكل الأول المستقيم يعامد $[AK]$ في المنتصف. فهو محور.
- في الشكل الثاني المستقيم لا يعامد $[AK]$ مع أنّ نقطة التقاطع في المنتصف، فهو ليس محوراً.
- في الشكل الثالث المستقيم لا يعامد $[AK]$. فهو ليس محوراً.

النشاط 2: كيف أرسم محور ضلع في المثلّث؟

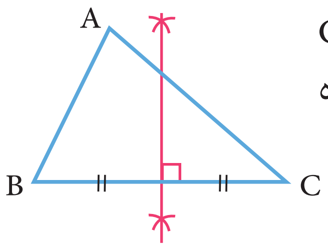
رسم محور ضلع في المثلّث.

من 10 إلى 12 دقيقة.

قلم ممحاة فرجار

أقرأ النصّ وأجيب على الأسئلة المرافقة، كما في المثال المحلول:

a في الشكل المجاور: الأقواس الدائرية التي مراكزها B و C وأنصاف أقطارها متساوية. أحدد ممّا يأتي بماذا تفيد هذه الأقواس:



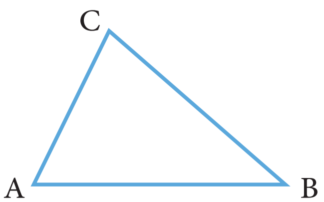
- في رسم الارتفاع المتعلق بالضلع [BC]
- في رسم محور الضلع [BC]
- في رسم منصّف الزاوية BAC.

أصل كلّاً من نقطتي تقاطع القوسين.

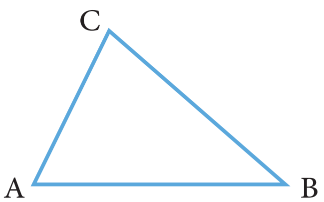
أسمّي هذا المستقيم محور الضلع [BC].

يمكن أن أقول المحاور الثلاثة في المثلّث تلتقي في نقطة واحدة O .

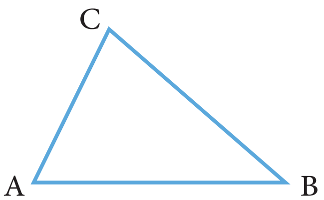
b أرسم محور الضلع [AB].



c أرسم محور الضلع [BC].

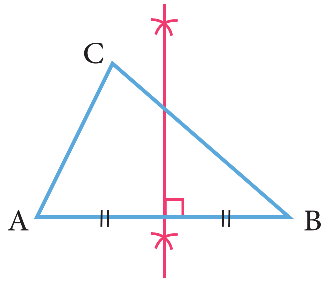


d أرسم محور الضلع [AC].



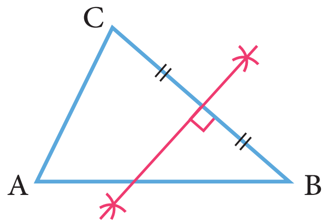
أتحقّق من إجابتي

b



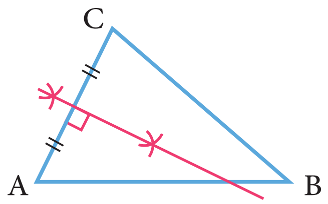
- أرسم قوسين من النقطة B وقوسين من النقطة A.
- أصل نقطتي تقاطع القوسين بمستقيم هو محور الضلع [AB].

c



- أرسم قوسين من النقطة B وقوسين من النقطة C.
- أصل نقطتي تقاطع القوسين بمستقيم هو محور الضلع [CB].

d



- أرسم قوسين من النقطة C وقوسين من النقطة A.
- أصل نقطتي تقاطع القوسين بمستقيم هو محور الضلع [AC].

النشاط 3: الدائرة المارّة برؤوس المثلّث

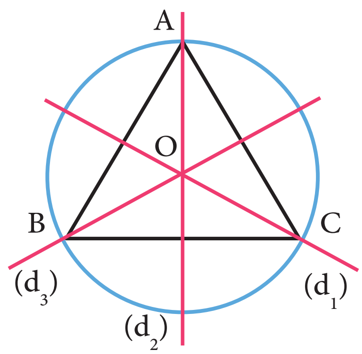
رسم الدائرة المارّة برؤوس المثلّث.

من 15 إلى 20 دقيقة.

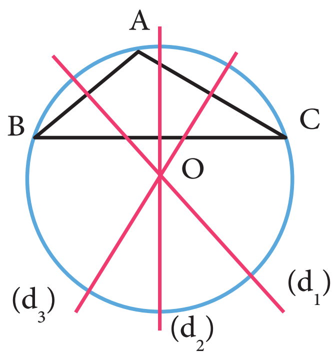
قلم ممحاة فرجار

أرسمُ الدائرة المارّة برؤوس مثلّث، كما في المثال المحلول:

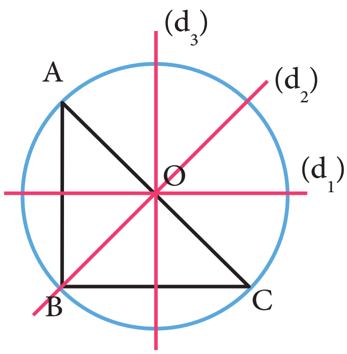
a أرسمُ محاور أضلاع كل مثلّث، ثمّ أثبّت إبرة الفرجار عند نقطة تلاقي المحاور وأفتحه بفتحة تساوي AO، ثمّ أرسمُ الدائرة فتمر من B وC.



المثلّث ABC حادّ الزوايا



المثلّث ABC منفرج في $\hat{A}$

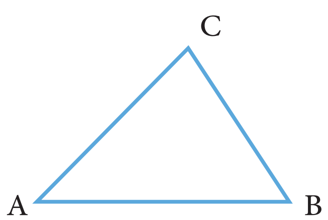


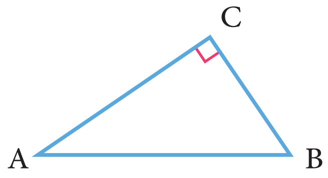
المثلّث ABC قائم في $\hat{A}$

- اعلم أنّ المحاور الثلاثة في المثلّث تلتقي في نقطة واحدة O . لذلك يمكن أن اكتفي برسم محورين فقط.
- النقطة O هي مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث.
- $OA = OB = OC$

b أرسم الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC

1. أرسم محور الضلع [AB].
2. أرسم محور الضلع [BC].
3. يتقاطعان بنقطة هي مركز الدائرة لذلك أرسم دائرة مركزها تلك النقطة وتمرّ من A فتمر من B وC.

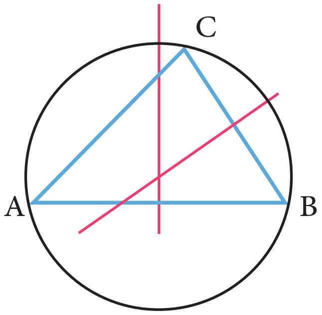




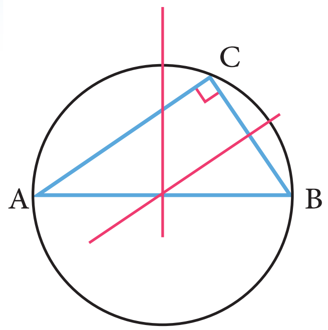
c أرسم الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث ABC

1. أرسم محور الضلع [AB].
2. أرسم محور الضلع [BC].
3. يتقاطعان بنقطة هي مركز الدائرة لذلك أرسم دائرة مركزها تلك النقطة وتمرّ من A.

أتحقّق من إجابتي



b
- ارسم الدائرة المارة برؤوس المثلّث ABC
- أرسم محور الضلع [AB].
- أرسم محور الضلع [BC].
- يتقاطعان بنقطة هي مركز الدائرة لذلك أرسم دائرة مركزها تلك النقطة وتمر من A فتمر من B وC.



c
- ارسم الدائرة المارة برؤوس المثلّث ABC
- أرسم محور الضلع [AB].
- أرسم محور الضلع [BC].
- يتقاطعان بنقطة هي مركز الدائرة لذلك أرسم دائرة مركزها تلك النقطة وتمر من A فتمر من B وC.

النشاط 4: المحور في المثلّث

تنظيم معلوماتي عن المحور في المثلّث.

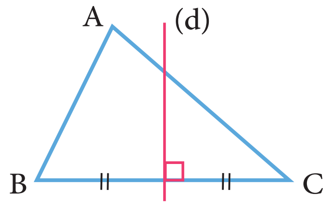
من 15 إلى 20 دقيقة.

قلم ممحاة

أقرأ عن المحور في المثلّث، ثمّ أثبت معلوماتي عنه:

ما هو المحور؟

محور ضلع في المثلّث هو المستقيم العمودي على هذا الضلع في منتصفه.

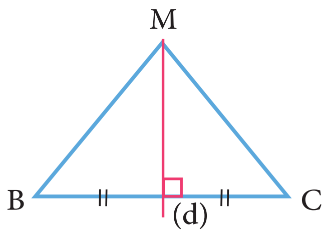


ماذا تحقق النقطة الواقعة على محور قطعة مستقيمة؟

- أيّاً كانت M من المحور (d) ، كان:

$MB = MC$

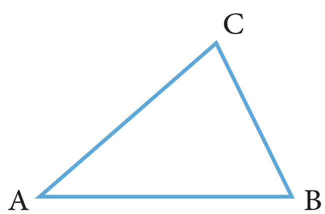
- بالعكس إذا كانت M تحقق $MB = MC$ فإن M من المحور (d).



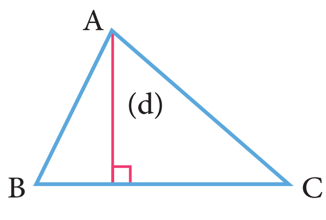
المحور في المثلّث

مثال على رسم محور قطعة مستقيمة:

أرسم مثلّثاً ABC ومحور الضلع [AB] ثم أضع نقطة M متساوية البعد عن طرفي القطعة [AB].



مثال عن مستقيم ليس بمحور:



35 – 40 دقيقة

1 أرسم دائرة مركزها O وأضع عليها ثلاث نقاط A و B و C.

- أرسم مستعيناً بالفرجار المحاور الثلاثة لأضلاع المثلّث ABC .
- ما الملفت في الشكل الذي رسمته؟

2 أرسم مثلّثاً ABC وأرسم محوري ضلعيه [AB] و [BC] . أرمز إلى نقطة تقاطعهما بالرمز M .
أثبت أنَّ المثلّث MAC متساوي الساقين.

....

....

....

3 المثلّثان ABC و ABD متساويا الساقين في A :

- أرسم شكلاً يمثّل المعطيات السابقة.
- عيّن مركز الدائرة المارة برؤوس المثلّث BCD؟

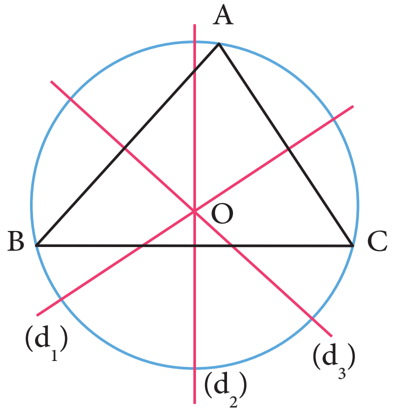
....

....

أتحقّق من إجابتي

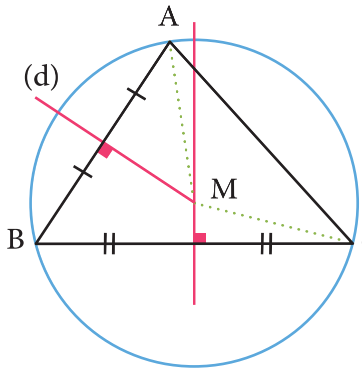
1 أرسم دائرة مركزها O وأضع عليها ثلاث نقاط A و B و C.

- أرسم مستعيناً بالفرجار المحاور الثلاثة لأضلاع المثلّث ABC .
- ما الملفت في الشكل الذي رسمته؟



الملفت أن المحاور الثلاثة جميعها مرّت من مركز الدائرة.
نلاحظ أيضا أنه يكفي رسم محورين فقط.

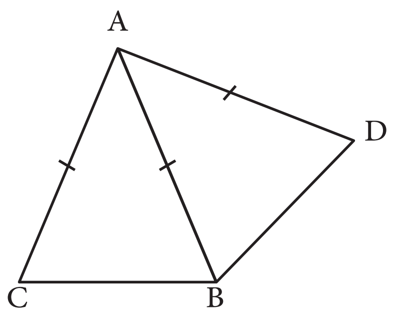
2 أرسم مثلّثاً ABC وأرسم محوري ضلعيه [AB] و[BC]. أرمز إلى نقطة تقاطعهما بالرمز M.
أثبت أنَّ المثلّث MAC متساوي الساقين.



نعلم أن نقطة تلاقي محاور أضلاع المثلّث هي مركز للدائرة المارّة بروؤسه.
إذن $MA = MC$
فالمثلّث MAC متساوي الساقين لتساوي طولي ضلعين فيه.

3 المثلّثان ABC و ABD متساويا الساقين في A :

- أرسم شكلاً يمثّل المعطيات السابقة.
- عيّن مركز الدائرة المارة برؤوس المثلّث BCD؟



محور القطعة [DB] يمر من A وكذلك محور القطعة [CB] يمر من A وبالتالي مركز الدائرة المارة برؤوس المثلّث BCD هو A
لأن: $AC = AB = AD$

أُلخّصُ درسي :

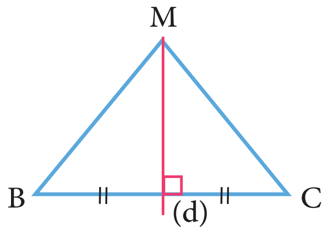
35 – 40 دقيقة

تعلّمت في درس محور ضلع في المثلّث:

أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:

☐ تمييز محور ضلع في مثلّث، ويمكن تعريفه وفق:

- محور ضلع في المثلّث هو المستقيم العمودي على هذا الضلع في منتصفه.
- أياً كانت M من المحور (d) ، كان $MB = MC$.

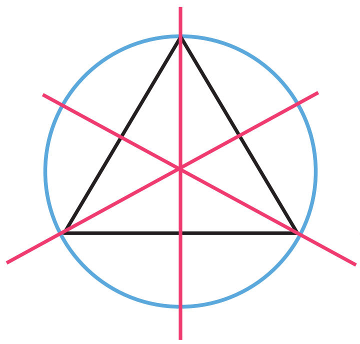


☐ رسم محور قطعة مستقيمة وفق الخطوات:

- أرسم قوسين من أحد رؤوس المثلّث وقوسين من رأس أخر.
- أصل نقطتي تقاطع القوسين بمستقيم هو محور ضلع في المثلّث.

☐ رسم دائرة مارة برؤوس مثلّث وفق الخطوات:

- أرسم محور ضلع في المثلّث.
- أرسم محور ضلع آخر.
- المحوران يتقاطعان بنقطة هي مركز الدائرة لذلك أرسم دائرة مركزها تلك النقطة وتمر من أحد رؤوس المثلّث وهي الدائرة المطلوبة.



يمكنني رسم مثلّث ورسم الدائرة المارة برؤوسه.

الدّرس الثاني: ارتفاع مثلّث

ارتفاع متعلّق بضلع المثلّث نقطة تلاقي الارتفاعات

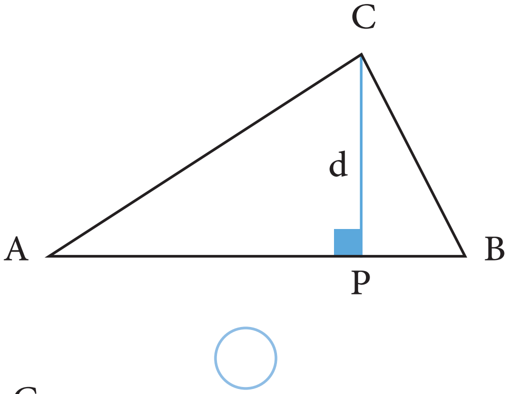
إنشاء الخطوط الأساسيّة في المثلّث مستعملاً الأدوات الهندسية، واستعمال خصائص الخطوط الأساسية في المثلّث في حل المسائل.

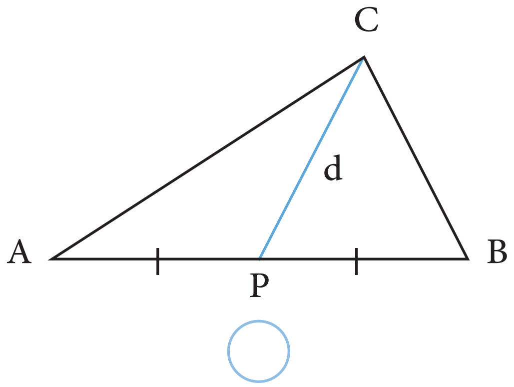
من 1:00 إلى 1:15 ساعة.

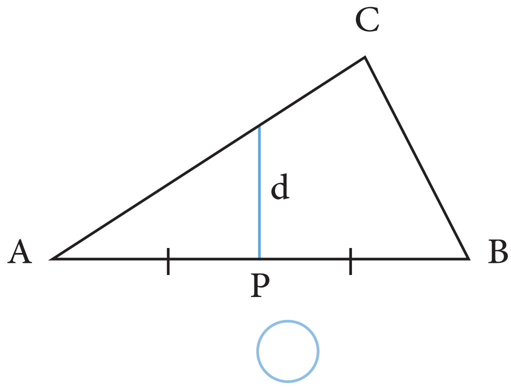
قلم ممحاة كوس

هيّا بنا

أختارُ في كل ممّا يأتي الشّكل الذي يكون فيه المستقيم d يعامد الضّلع [AB] ويمرّ من الرأس المقابل للضلع.







أُسمّي المستقيم المار بأحد رؤوس مثلّث والعمودي على الضلع المقابل لتلك الرأس: ارتفاع متعلّق بالضلع

النشاط 1: ما هو الارتفاع المتعلّق بضلع في المثلّث؟

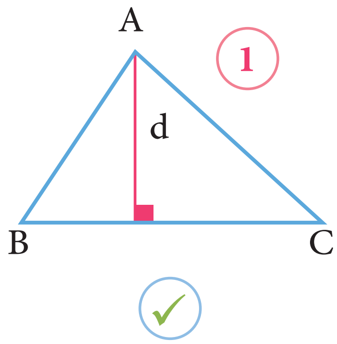
تمييز الارتفاع المتعلّق بضلع في المثلّث.

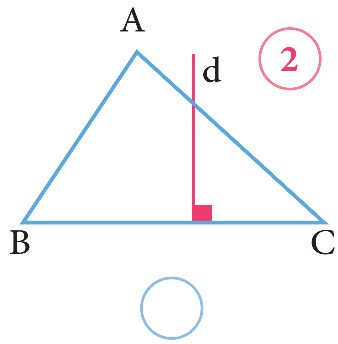
من 8 إلى 10 دقائق.

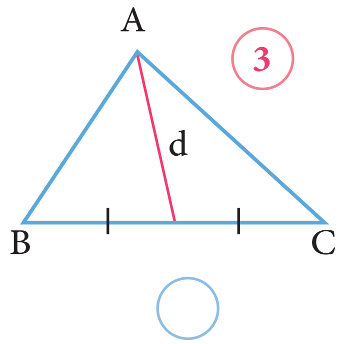
قلم ممحاة

أحدّد أيّاً من المستقيمات الآتية هو ارتفاع متعلّق بالضلع [BC] في المثلّث، كما في المثال المحلول:

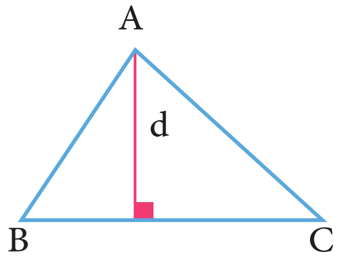
a في الشكل الآتي: إنّ الارتفاع المتعلّق بالضلع [BC] في المثلّث ABC هو المستقيم d.



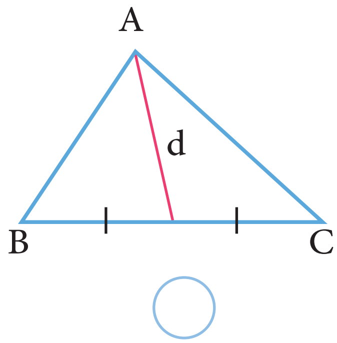


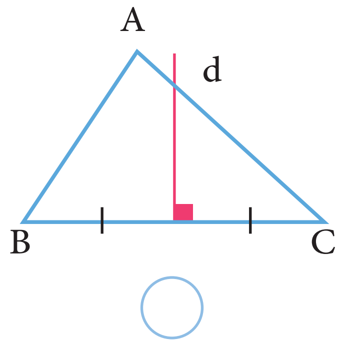


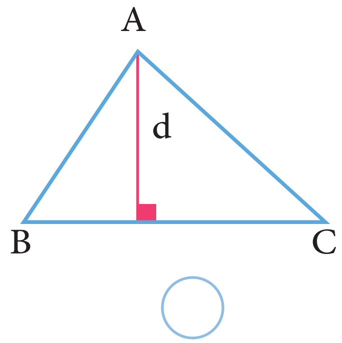
إنّ الارتفاع المتعلّق بالضّلع [BC] في المثلّث هو المستقيم الذي يعامد [BC] ويمرّ من الرأس A ألاحظ أنّ الارتفاع المتعلّق بالضلع [BC] في المثلّث ABC هو في الشكل الآتي هو d .



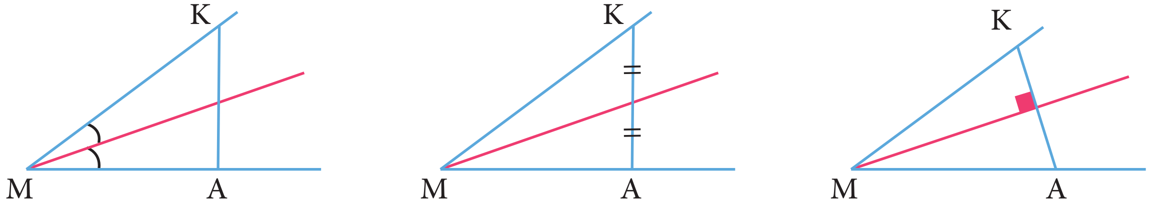
b الارتفاع المتعلّق بالضّلع [BC] في المثلّث ABC هو في الشكل ....





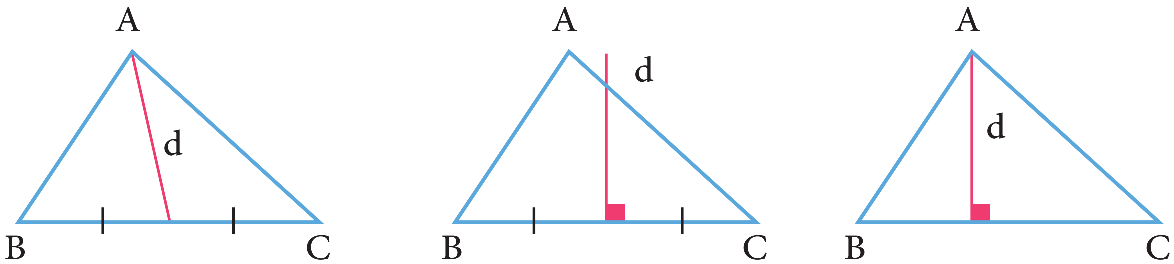


c الارتفاع المتعلّق بالضّلع [AK] في المثلّث AKM هو في الشكل .....

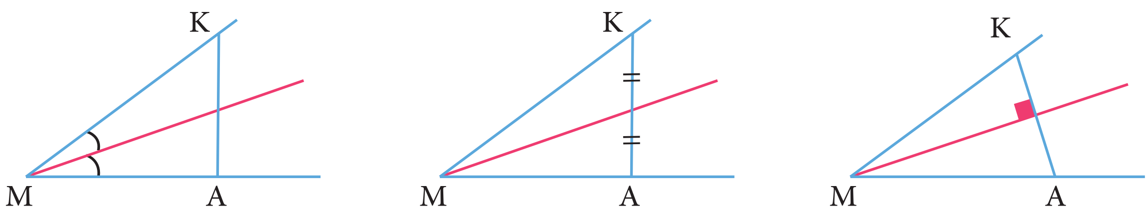


أتحقّق من إجابتي

b
- في الشكل الأول: المستقيم المرسوم يعامد [BC] ويمر من الرأس A فهو ارتفاع.
- في الشكل الثاني: المستقيم يعامد [BC] لكنه لا يمرّ بالرأس A فهو ليس ارتفاعاً.
- في الشكل الثالث: المستقيم لا يعامد [BC] مع أنّه مرسوم من A فهو ليس ارتفاعاً.



c
- في الشكل الأول المستقيم يعامد [AK] ومرسوم من M فهو ارتفاع.
- في الشكل الثاني المستقيم لا يعامد [AK] مع أنه مرسوم من M فهو ليس ارتفاعاً.
- في الشكل الثالث المستقيم لا يعامد [AK] فهو ليس ارتفاعاً.



النشاط 2: كيف أرسم ارتفاع ضلع في المثلّث؟

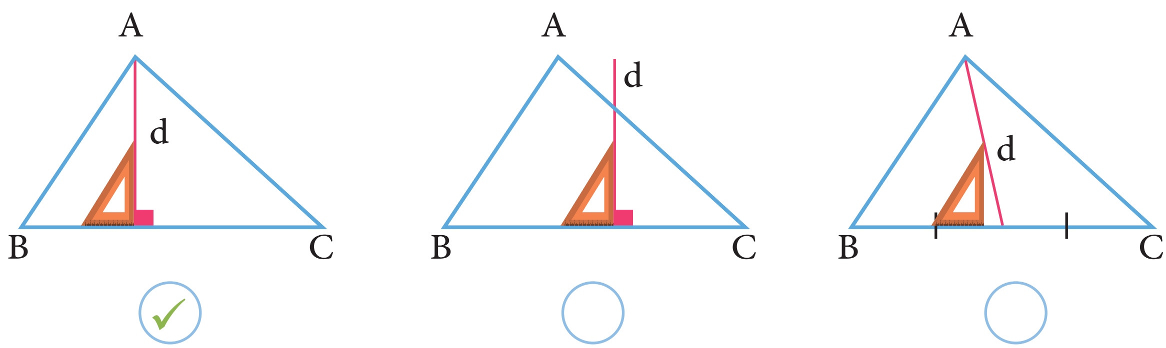
رسم ارتفاع ضلع في المثلّث.

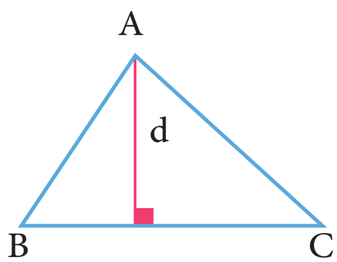
من 10 إلى 12 دقيقة.

قلم   ممحاة   كوس

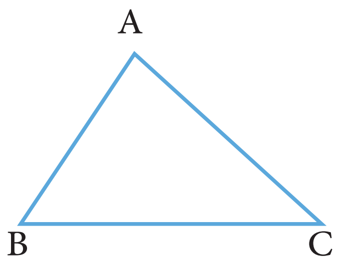
أقرأ النص وأجيب على الأسئلة المرافقة، كما في المثال المحلول:

a في الشكل المجاور المثلّث ABC أحدّد باستخدام الكوس المستقيم الذي يعامد الضلع [BC] والمارّ من الرأس A ؟ ماذا أسمّي هذا المستقيم؟

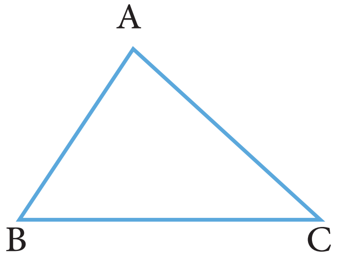




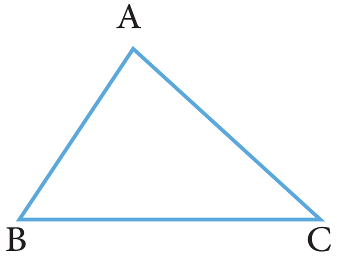
أسمّي المستقيم: ارتفاع متعلّق بالضلع [BC].



b بنفس الأسلوب السابق أرسم ارتفاع الضلع [AB].



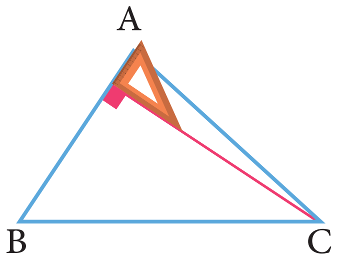
(c) بنفس الأسلوب السابق أرسم ارتفاع الضلع [BC].



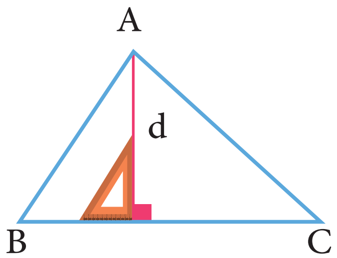
(d) بنفس الأسلوب السابق أرسم ارتفاع الضلع [AC].

أتحقّق من إجابتي

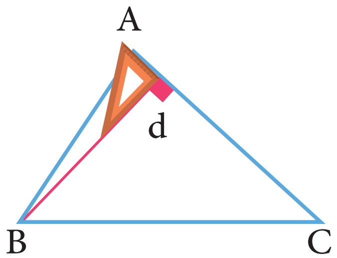
(b) أرسم المستقيم المرسوم من C والعمودي على [AB].



(c) بنفس الأسلوب السابق أرسم ارتفاع الضلع [BC].



(d) بنفس الأسلوب السابق أرسم ارتفاع الضلع [AC].



النشاط 3: نقطة تلاقي الارتفاعات

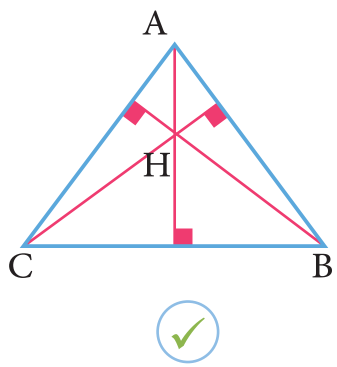
تحديد نقطة تلاقي ارتفاعات في مثلّث.

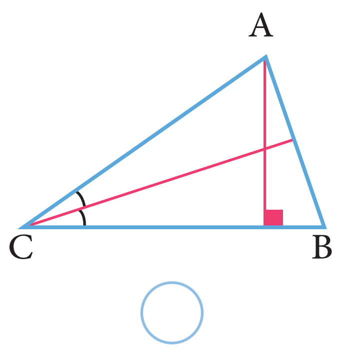
من 15 إلى 20 دقيقة.

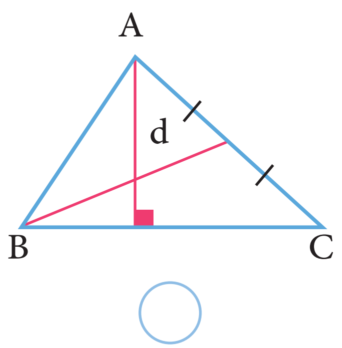
قلم ممحاة كوس

أعيّن نقطة تلاقي الارتفاعات، كما في المثال المحلول:

a في الأشكال الآتية ABC مثلّث والمطلوب: أحدّد الشكل الذي رُسم فيه ارتفاعات الأضلاع الثلاثة.







ألاحظ أنّ الارتفاعات الثلاثة تلتقي في نقطة أعيّن موقعها .

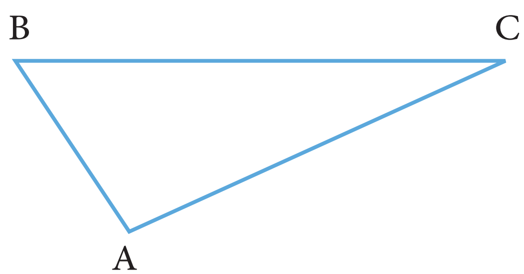
ألاحظ أنه لتعيين نقطة تلاقي الارتفاعات نكتفي برسم ارتفاعين فقط.

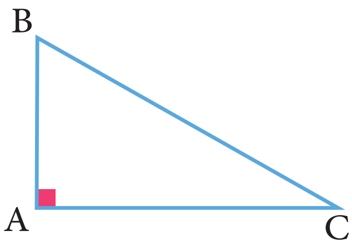
- أرسم المستقيم المرسوم من C والعمودي على [AB]
- أرسم المستقيم المرسوم من B والعمودي على [AC]
- أرسم المستقيم المرسوم من A والعمودي على [BC]

تلتقي الارتفاعات بنقطة هي H هي نقطة تلاقي الارتفاعات بنقطة تقع داخل المثلّث ABC.

b بنفس الأسلوب السابق.

أعيّن نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلّث ABC.

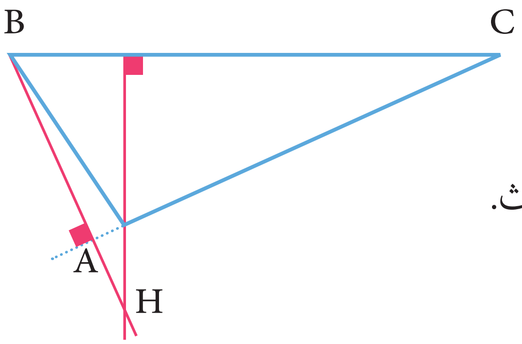




c بنفس الأسلوب السابق.

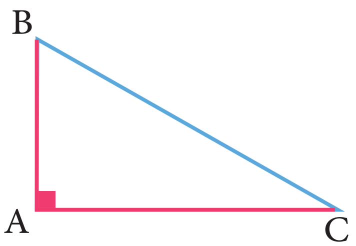
أعيّن نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلّث ABC.

أتحقّق من إجابتي



b لأعيّن نقطة تلاقي الارتفاعات

- أرسمُ الارتفاع المتعلّق بالضلع [BC]
- أرسمُ الارتفاع المتعلّق بالضلع [AC]
- يتقاطعان بنقطة هي H تقع خارج المثلّث.



c لأعيّن نقطة تلاقي الارتفاعات

- أرسمُ الارتفاع المتعلّق بالضلع [BC] فينطبق على الضلع [AC].
- أرسمُ الارتفاع المتعلّق بالضلع [AC] فينطبق على الضلع [AB].
- يتقاطعان بنقطة هي A تقع على الرأس القائم المثلّث.

النشاط 4: الارتفاع في المثلّث

تنظيم معلوماتي عن الارتفاع في المثلّث.

من 15 إلى 20 دقيقة.

قلم ممحاة

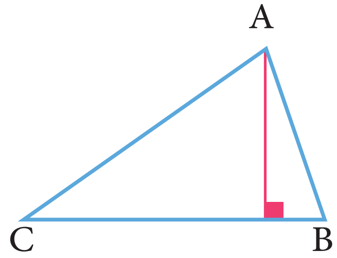
أقرأ عن الارتفاع في المثلّث، ثم أثبت معلوماتي عنه:

الارتفاع في المثلّث

ما هو الارتفاع؟

الارتفاع المتعلق بضلع في المثلّث:

هو المستقيم المرسوم من رأس المثلّث ويعامد الضلع المقابل لتلك الرأس.

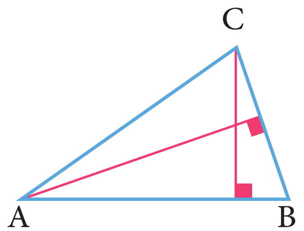


أين تتقاطع الارتفاعات في المثلّث؟

- الارتفاعات الثلاث تلتقي في نقطة واحدة
- نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلّث المنفرج تقع خارج المثلّث .
- نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلّث الحاد تقع داخل المثلّث.
- نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلّث القائم تقع على الرأس القائم.

مثال عن رسم الارتفاع:

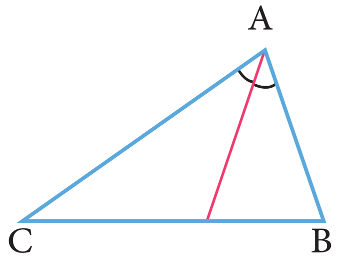
أرسم المثلّث ABC وأرسم ارتفاع الضلع[AB] وارتفاع الضلع [BC] وأعيّن نقطة تلاقي الارتفاعات.



- أرسم المثلّث القائم ABC في A وأرسم ارتفاع الضلع[AB] وارتفاع الضلع [BC] وأعيّن نقطة تلاقي الارتفاعات.

مثال عن مستقيم ليس بارتفاع:

في الشكل المستقيم لا يعامد [AB] مع أنه مرسوم من C. فهو ليس ارتفاعاً.



أختبر نفسي

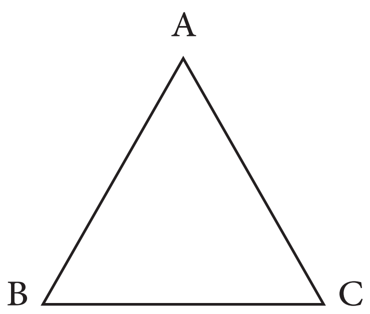
1 أرسم مثلّثاً ABC قائماً في A.

- أرسم مستعيناً بالكوس الارتفاعات الثلاثة لأضلاع المثلّث ABC.
- أين تقع نقطة تلاقي الارتفاعات؟

....

....

2 أعيّن النقطة J نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلّث ABC.
أعيّن نقطة تلاقي ارتفاعات كلٍّ من المثلّثات
AJB و AJC و BJC

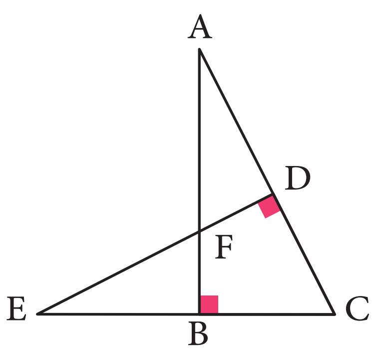


....

....

....

3 في الشكل المجاور ABC مثلّث قائم في B و CDE مثلّث قائم في D:
أثبت أنّ (AE) يعامد (CF).



....

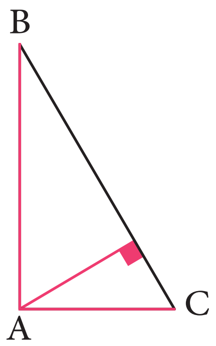
....

....

أتحقّق من إجابتي

1 أرسم مثلّثاً ABC قائماً في A.

- أرسم مستعيناً بالكوس الارتفاعات الثلاثة لأضلاع المثلّث ABC.
- أين تقع نقطة تلاقي الارتفاعات؟



أرسم ارتفاع الضلع [AB]

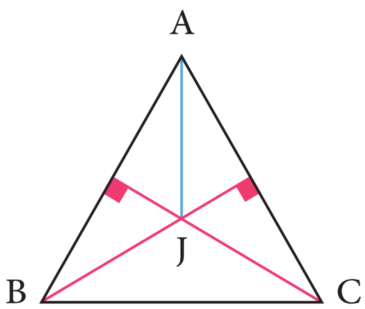
أرسم ارتفاع الضلع [BC]

يتقاطعان بنقطة هي A هي الرأس القائم.

2 أعيّن النقطة J نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلّث ABC.

أعيّن نقطة تلاقي ارتفاعات كلٍّ من المثلّثات

AJB و AJC و BJC



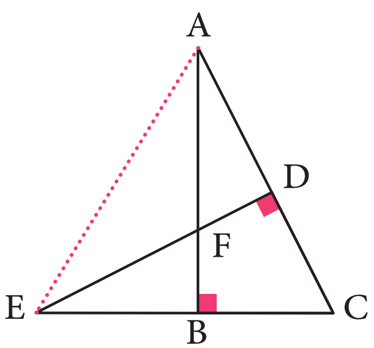
نقطة تلاقي الارتفاعات للمثلّث AJB هي C

نقطة تلاقي الارتفاعات للمثلّث AJC هي B

نقطة تلاقي الارتفاعات للمثلّث CJB هي A

3 في الشكل المجاور ABC مثلّث قائم في B و CDE مثلّث قائم في D:

أثبت أنّ (AE) يعامد (CF).



نقطة تلاقي الارتفاعات في المثلّث AEC هي F

ومنه المستقيم CF سيكون هو الارتفاع الثالث بالتالي

CF سيعامد AE

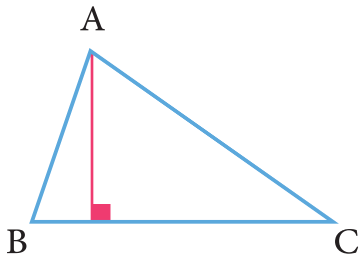
ألخّصُ درسي :

35 - 40 دقيقة

تعلّمت في درس ارتفاع ضلع في المثلّث:

أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:

☐ تمييز ارتفاع ضلع في مثلّث، ويمكن تعريفه وفق:
الارتفاع المتعلّق بالضلع [BC] في المثلّث هو المستقيم الذي يعامد الضلع ويمر من الرأس المقابل لتلك الضلع.



☐ رسم ارتفاع ضلع في مثلّث:

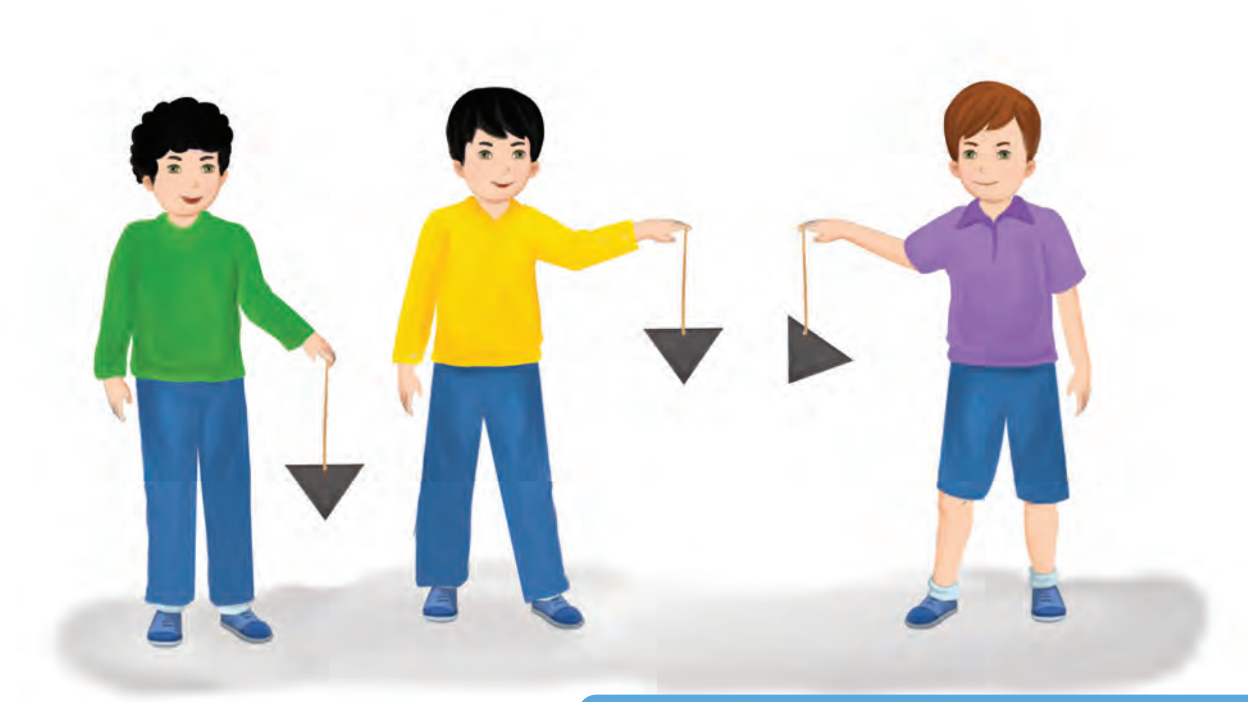
- أرسم عموداً من أحد رؤوس المثلّث إلى الضلع المقابل لتلك الرأس.

تعيين نقطة تلاقي الارتفاعات:

- أرسم ارتفاع ضلع في المثلّث.
- أرسم ارتفاع ضلع آخر.
- الارتفاعان يتقاطعان بنقطة تقع داخل المثلّث إذا كان المثلّث حادّاً، وخارج المثلّث إذا كان المثلّث منفرجاً، وعلى الرأس القائم إذا كان المثلّث قائماً.

يمكنني رسم مثلّث وتحديد نقطة تلاقي الارتفاعات.

الدّرس الثالث: المتوسّط في المثلّث



المتوسط في المثلّث   نقطة تلاقي المتوسطات   مركز ثقل المثلّث

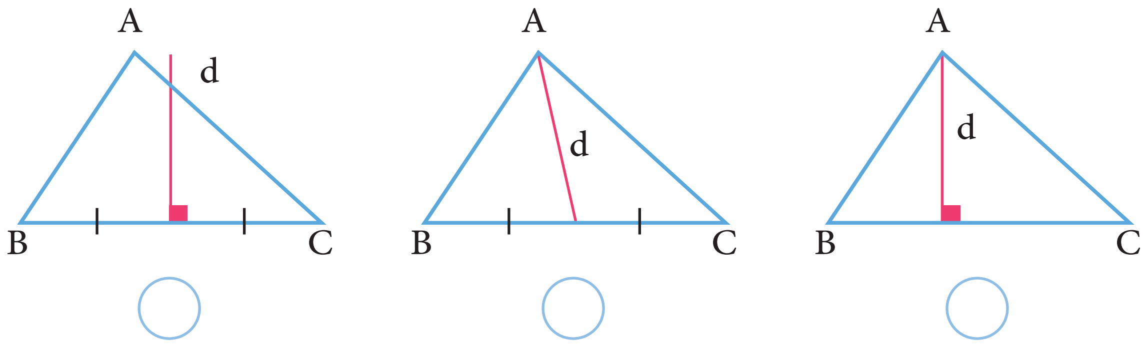
- إنشاء الخطوط الأساسية في المثلّث مستعملاً الأدوات الهندسية، واستعمال خصائص الخطوط الأساسية في المثلّث في حل المسائل.

من 1:00 إلى 1:15 ساعة.

قلم   ممحاة   مسطرة

هيّا بنا

أختار في كل مما يأتي الشّكل الذي يكون فيه المستقيم d مارّاً بالنقطة A ومنتصف الضلع CB المقابل لـ A.



اسميّ المستقيم المار بالنقطة A ومنتصف الضلع CB المقابل لـ A المتوسّط المرسوم من A (متوسّطCB).

النشاط 1: ما هو متوسّط ضلع في المثلّث؟

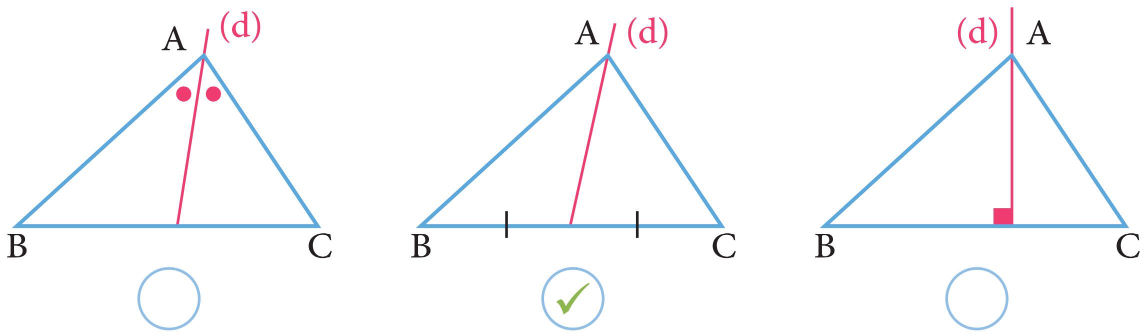
تمييز متوسّط ضلع في المثلّث.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

أحدّد أيّاً من المستقيمات الآتية هو متوسّط في المثلّث، كما في المثال المحلول:

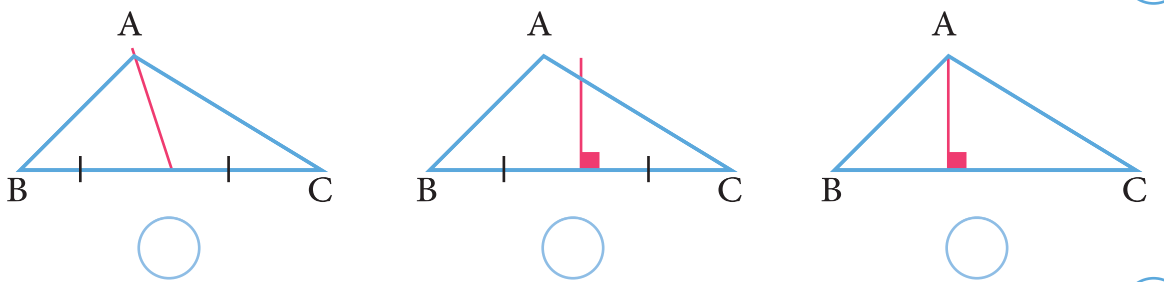
a في الشكل الآتي: إنّ متوسّط الضّلع [BC] في المثلّث ABC هو المستقيم d.



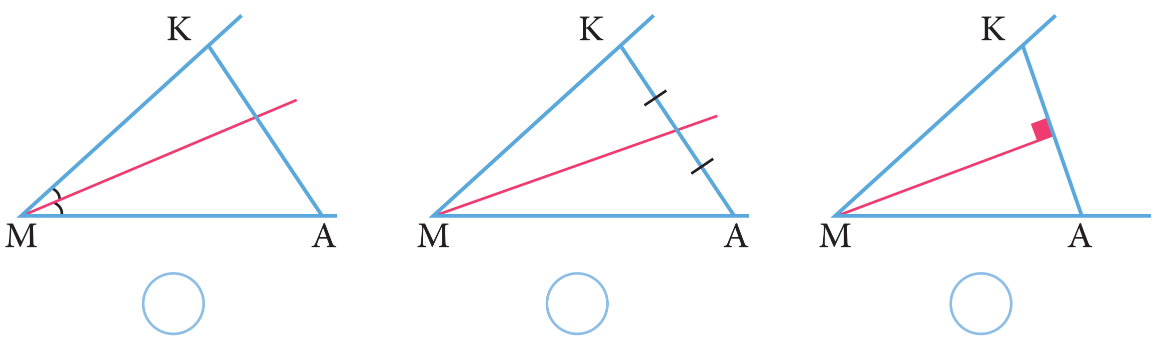
متوسّط الضّلع [BC] في المثلّث ABC هو المستقيم الّذي يصل بين A ومنتصف الضّلع [BC].

ألاحظ أنّ متوسّط الضّلع [BC] في المثلّث ABC في الشّكل الآتي هو d .

b متوسّط الضّلع [BC] في المثلّث ABC هو في الشّكل .....

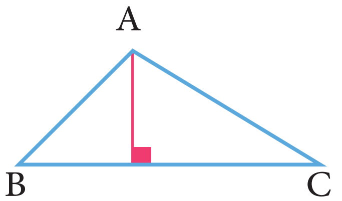


c متوسّط الضّلع [AK] في المثلّث ABC هو في الشّكل .....

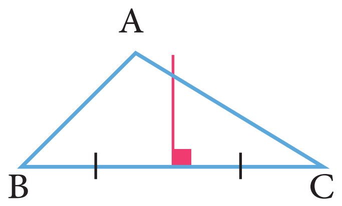


أتحقّق من إجابتي

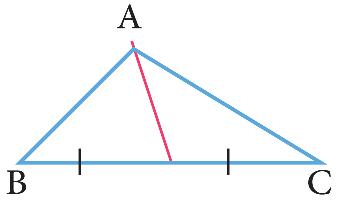
b المتوسّط المتعلّق بالضلع [BC] في المثلّث ABC هو في الشّكل



في الشّكل الأول: المستقيم المرسوم يمرّ من A ولكنّه لا يمرّ بمنتصف الضّلع [BC] . فهو ليس متوسط.

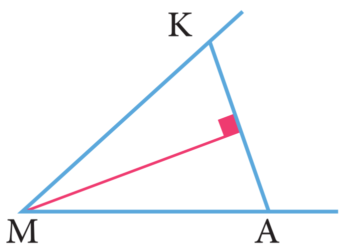


في الشّكل الثاني: المستقيم المرسوم ينصّف لكنه لا يمرّ من A. فهو ليس متوسّطاً.

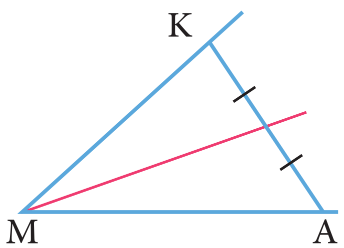


في الشّكل الثّالث: المستقيم مارّ من A ويُنصّف الضلع [BC] المقابل لـ A فهو متوسط.

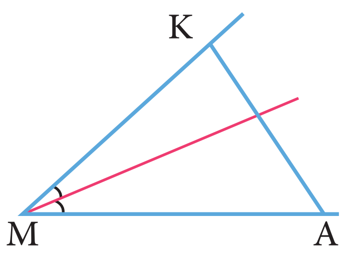
c متوسّط الضّلع [AK] في المثلّث هو في الشكل .....



في الشكل الأول المستقيم المرسوم مارّ من M ولا ينصّف الضّلع [AK] فهوليس متوسّطاً.



في الشكل الثّاني: المستقيم المرسوم يُنصّف [AK] ويمرّ من M. فهو متوسّط.



في الشكل الثّالث: المستقيم المرسوم يمرّ من M ولكنّه لا يمرّ بمنتصف الضّلع [AK] .فهو ليس متوسّطاً.

النشاط 2: كيف أرسم متوسّط ضلع في المثلّث؟

رسم متوسط ضلع في المثلّث وتعيين نقطة تلاقي المتوسطات (مركز ثقل المثلّث).

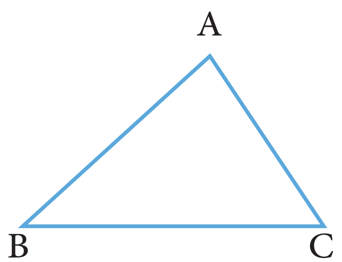
من 10 إلى 12 دقيقة.

قلم ممحاة مسطرة

أقرأ النّصّ وأجيبُ على الأسئلة المرافقة، كما في المثال المحلول:

a في الشكل المجاور:

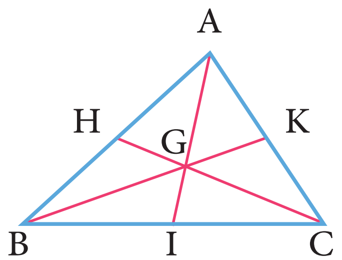
1. أقيس بالمسطرة طول القطعة[BC] ثم أعيّن النقطة I منتصف الضّلع [BC].
2. أصل بين النّقطة I والرّأس A.
3. ماذا أدعو القطعة المستقيمة [AI] ؟



أقيس بالمسطرة طول القطعة [BC] ثم أعيّن النقطة I منتصف هذه القطعة

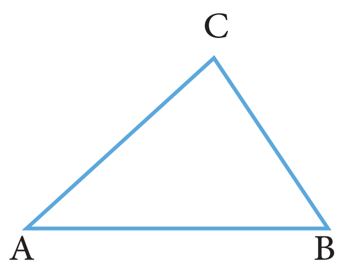
أصل بالمسطرة بين النقطة I والنقطة A أدعو القطعة المستقيمة [AI] متوسط

يمكن أن أقول أنّ المتوسطات الثلاثة في المثلّث تلتقي في نقطة واحدة G وأدعوها مركز ثقل المثلّث، وتقع دوماً داخل المثلّث.



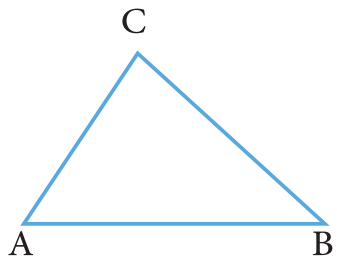
b بنفس الأسلوب السابق:

1. أرسمُ متوسّط الضّلع [AB]؟
2. أرسمُ متوسّط الضّلع [AC]؟
3. أحددُ موقع نقطة تلاقي المتوسّطين.



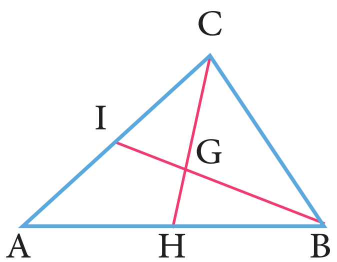
c بنفس الأسلوب السابق:

1. أرسمُ متوسّط الضّلع [BC]؟
2. أرسمُ متوسّط الضّلع [AC]؟
3. أحددُ موقع نقطة تلاقي المتوسّطين.

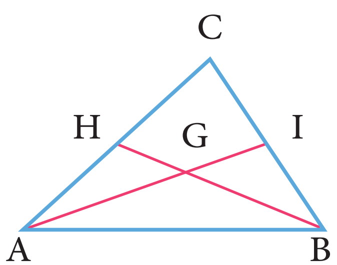


أتحقّق من إجابتي

b أرسم متوسّط الضّلع [AB]:
أقيس بالمسطرة طول القطعة [AB] وأعيّن النقطة H منتصف AB، ثم أصل بين النّقطتين H و C.
أرسم متوسّط الضّلع [AC]:
أقيس القطعة [AC] وأعيّن النّقطة I منتصف AC ثم أصل بين I و B.
G نقطة تلاقي المتوسطات (مركز ثقل المثلّث).



c أرسم متوسّط الضّلع [BC].
أقيس بالمسطرة طول القطعة [BC] وأعيّن النقطة I منتصف BC، ثم أصل بين النّقطتين I و A.
أرسمُ متوسّط الضّلع [AC]:
أقيس القطعة [AC] وأعيّن النّقطة H منتصف AC ثم أصل بين H و B.
G نقطة تلاقي المتوسطات (مركز ثقل المثلّث).



النشاط 3: المتوسط في المثلّث

تنظيم معلوماتي عن المتوسط في المثلّث.

من 15 إلى 20 دقيقة.

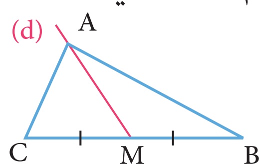
قلم ممحاة

أقرأ عن المتوسط في المثلّث ثم أُثبّت معلوماتي عنه:

ما هو المتوسّط في مثلّث؟

متوسط ضلع في المثلّث هو المستقيم المار بأحد رؤوس مثلّث، وبمنتصف الضلع المقابلة لهذا الرأس.

القطعة المستقيمة [AM] هي المتوسط المرسوم من A في المثلّث ABC.



ما خصائص نقطة تلاقي المتوسطات؟

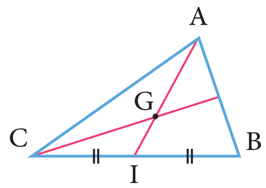
نقطة تلاقي المتوسّطات هي مركز ثقل وتبعد عن رأس المثلّث ضعفي بعده عن القاعدة وتحقق:

$AG = 2GI$

$AG = \frac{2}{3} AI$

$GI = \frac{1}{3} AI$

$GI = \frac{1}{2} AG$

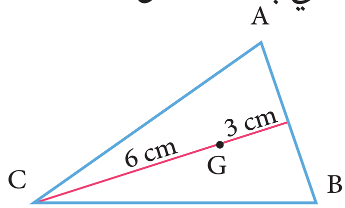


متوسط ضلع في مثلّث

مثال عن رسم المتوسط في المثلّث:

أرسم مثلّث ABC ومتوسّط الضلع [AB] وأعيّن النقطة G التي تبعد عن C ضعفي بُعدها عن منتصف [AB].

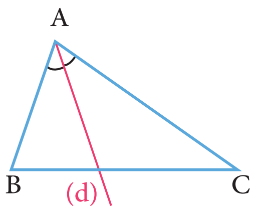
G هي نقطة تلاقي المتوسطات.



أرسم المتوسط المار من A والمتوسط المار من B.

مثال عن مستقيم ليس بمتوسط:

المستقيم d ليس متوسطاً في المثلّث لأنه يقسم الزاوية إلى قسمين متساويين ولا يقسم الضلع إلى قطعتين مستقيمتين متساويتين.



35 – 40 دقيقة

1 أرسم مثلّثاً ABC. وأضع النقطة D نظيرة A بالنسبة إلى B والنقطة E نظيرة A بالنسبة إلى C
أرمّز لنقطة تقاطع المستقيمين (DC) و (BE) بالرمز G، أشرح لماذا G مركز ثقل ADE.

....

....

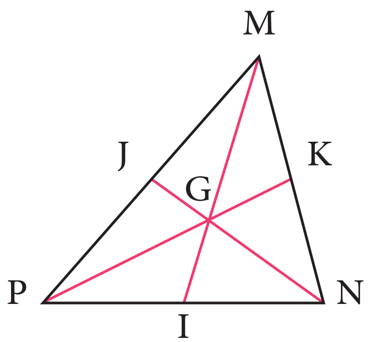
....

....

....

....

2 في الشّكل المرافق تجد مثلّثاً MNP، وG مركز ثقله فيه:
MI = 5.4 ، NJ = 2.4 ،PK = 5.8.
أحسب الأطوال JG و PG و GM.



....

....

....

أتحقّق من إجابتي

1 أرسم مثلّثاً ABC. وضع النقطة D نظيرة A بالنسبة إلى B والنقطة E نظيرة A بالنسبة إلى C، أرمّز لنقطة تقاطع المستقيمين (DC) و (BE) بالرمز G، أشرح لماذا G مركز ثقل ADE.

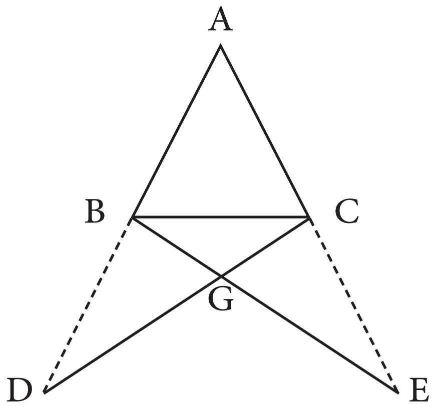
- نعين النقطة D التي تحقق الشرط DB = BA فتكون هي نظيرة A بالنسبة لـ B.
- نعين النقطة E التي تحقق الشرط CE = CA فتكون هي نظيرة A بالنسبة لـ C.

في المثلّث ADE:

المستقيم (DC) متوسّط الضلع [AE].

والمستقيم (EB) متوسّط الضلع [AD].

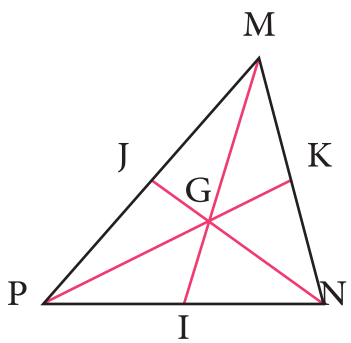
وهما متقاطعان في G فتكون هي نقطة تلاقي المتوسطات أي مركز ثقل المثلّث ADE.



2 في الشّكل المرافق تجد مثلّثاً MNP، وG مركز ثقله فيه:

PK = 5.8، NJ = 2.4 ، MI = 5.4.

أحسب الأطوال JG و PG و GM.



$$JG = \frac{1}{3}NJ = \frac{1}{3}(2.4) = 0.8$$

$$PG = \frac{2}{3}PK = \frac{2}{3}(5.8) \approx 3.87$$

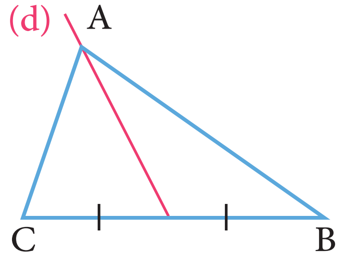
$$GM = \frac{2}{3}MI = \frac{2}{3}(5.4) = 3.6$$

ألخّصُ درسي : 35 – 40 دقيقة

تعلّمت في درس المتوسط في المثلّث:

أَضعُ إِشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:

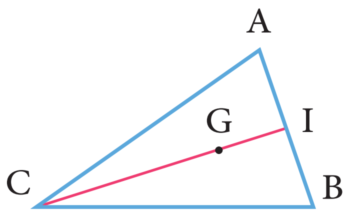
☐ تمييز متوسّط ضلع: ويمكن تعريفه وفق:
متوسّط الضّلع [BC] هو المستقيم المارّ بالنقطة A
ومنتصف الضلع [BC] المقابل لـ A



☐ نقطة تلاقي المتوسّطات G هي مركز ثقل المثلّث وتبعد عن رأس المثلّث ضِعفي بعدها عن القاعدة، وتقع دائماً داخل المثلّث.

☐ تعيين مركز ثقل المثلّث وفق الخطوات:

- أرسم متوسّط ضلع.
- أرسم متوسّط ضلع آخر.
- المتوسّطان يتقاطعان في نقطة هي مركز الثّقل.
- إنّ مركز ثقل المثلّث هو نقطة تلاقي المتوسّطات ويبعد عن رأس المثلّث ضعفي بعده عن القاعدة.



أي يحقق العلاقات:

$AG = 2GI$ ، $AG = \frac{2}{3}\ AI$ ، $GI = \frac{1}{3}\ AI$ ، $GI = \frac{1}{2}\ AG$

يمكنني رسم مثلّث وتعيين مركز ثقله.

الدّرس الرابع: منصّف زاوية مثلّث

منصّف زاوية   المثلّث   نقطة تلاقي المنصّفات

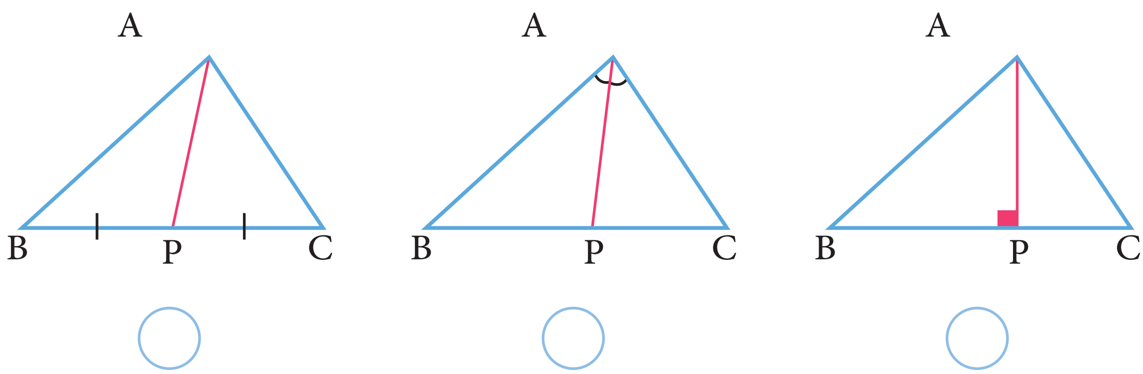
إنشاء الخطوط الأساسية في المثلّث مستعملاً الأدوات الهندسية، واستعمال خصائص الخطوط الأساسية في المثلّث في حل المسائل.

من 1:00 إلى 1:15 ساعة.

قلم   ممحاة   منقلة

هيّا بنا

أختار في كل ممّا يأتي الشكل الذي فيه المستقيم d يقسّم الزاوية A إلى قسمين طبوقين.



أسمّي المستقيم الذي يقسّم الزاوية إلى قسمين طبوقين منصّف للزاوية.

النشاط 1: ما هو منصّف زاوية مثلّث؟

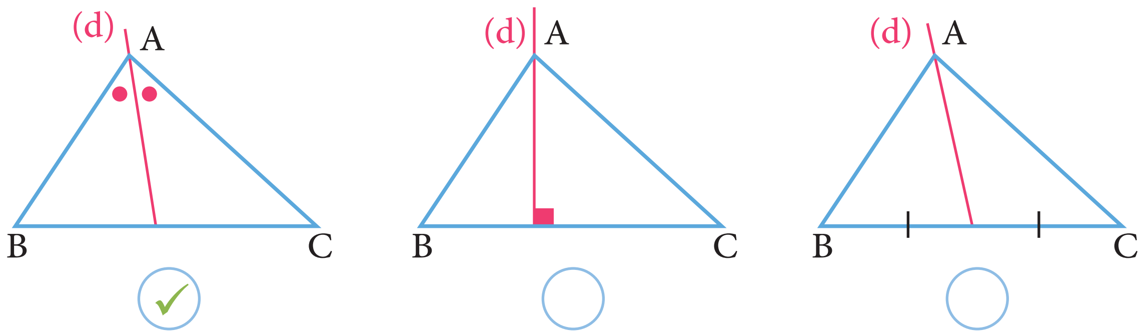
تمييز منصّف زاوية في مثلّث.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

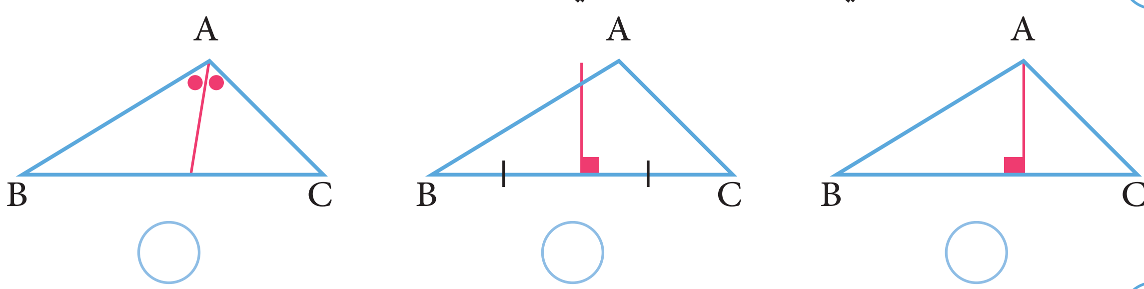
أحدّد أيّاً من المستقيمات الآتية هو منصّف زاية في مثلّث، كما في المثال المحلول:

a في الشكل الآتي: منصّف الزّاوية A في المثلّث ABC هو المستقيم d.

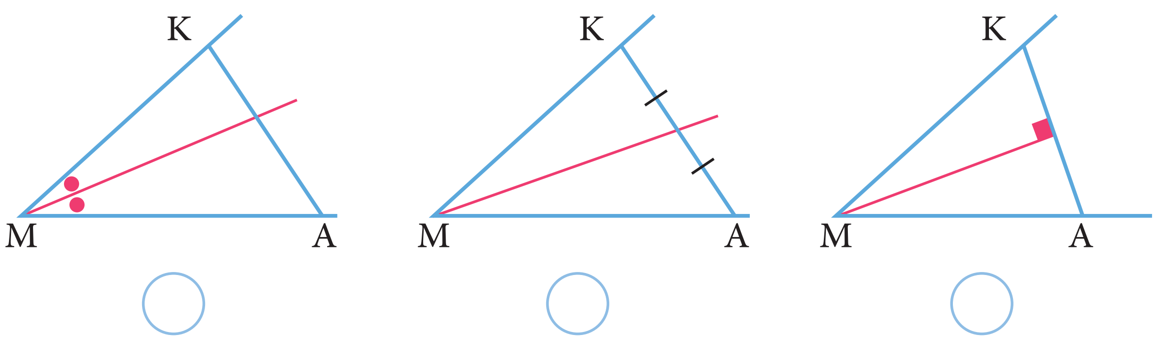


إنّ منصّف الزاوية $\hat{A}$ في المثلّث ABC هو المستقيم الذي يقسم الزاوية $\hat{A}$ إلى زاويتين قياسهما متساويان، ألاحظ أنّ منصّف الزاوية $\hat{A}$ في المثلّث ABC هو في الشكل الآتي هو d .

b منصّف الزّاوية $\hat{A}$ في المثلّث ABC هو في الشكل .....



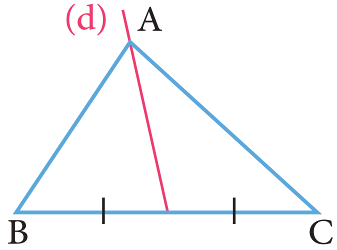
c منصّف الزّاوية $\hat{M}$ في المثلّث AKM هو في الشكل .....



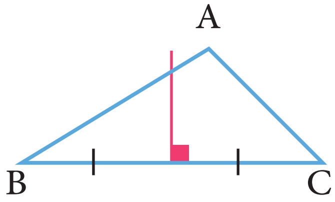
أتحقّق من إجابتي

b إنّ منصّف الزاوية $\hat{A}$ في المثلّث ABC هو في الشّكل .....

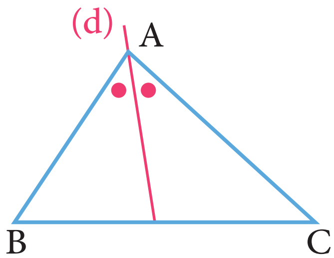
في الشكل الأول المستقيم المرسوم من A ينصّف الضّلع ولا ينصّف الزاوية فهو ليس منصّفاً.



في الشكل الثاني المستقيم المرسوم ينصّف الضلع ولا ينصّف الزاوية A. فهو ليس منصّفاً.

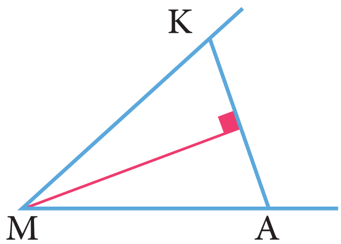


في الشكل الثالث المستقيم المرسوم من A يقسّم الزاوية إلى زاويتين متساويتين في القياس فهو منصّف.

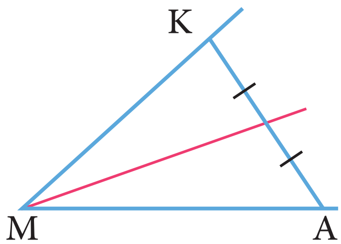


c منصّف الزاوية $\hat{M}$

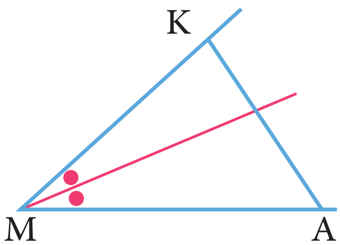
في الشكل الأول المستقيم يعامد [AK] ولا ينصف $\hat{M}$. فهو ليس مُنصّفاً.



في الشكل الثاني المستقيم ينصّف الضلع [AK] ولا ينصّف $\hat{M}$ فهو ليس منصّفاً.



في الشكل الثالث المستقيم المرسوم ينصّف $\hat{M}$ فهو منصّف.



النشاط 2: كيف أرسم منصّفاً في المثلّث؟

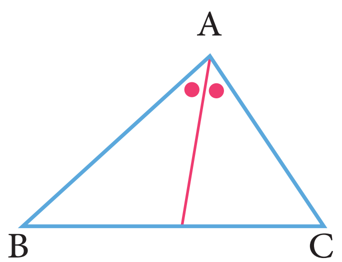
رسم منصّف زاوية في المثلّث.

من 10 إلى 12 دقيقة.

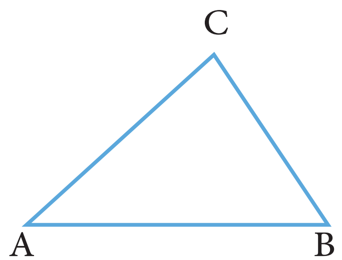
قلم ممحاة منقلة

أقرأ النّصّ وأجيبُ على الأسئلة المرافقة، كما في المثال المحلول:

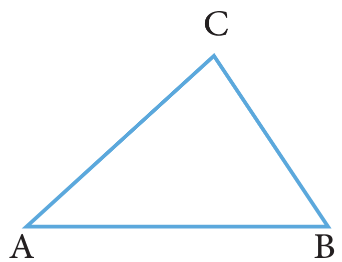
a في الشّكل المجاور: أرسم باستخدام المنقلة المستقيم المرسوم من الزاوية $\hat{A}$ ويقسّمها إلى زاويتين قياسهما متساويان.
ماذا أسمّي هذا المستقيم؟
منصّف الزاوية $\hat{A}$.



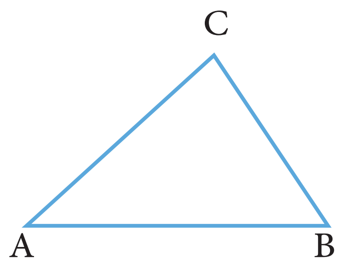
b بنفس الأسلوب السّابق:
أرسم منصّف الزاوية $\hat{A}$.



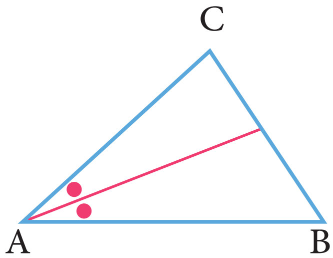
c بنفس الأسلوب السّابق:
أرسم منصّف الزاوية $\hat{B}$.



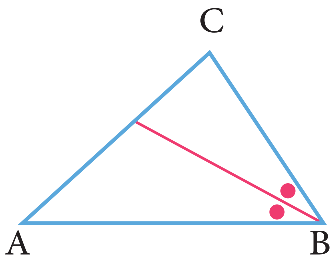
d بنفس الأسلوب السّابق:
أرسم منصّف الزاوية $\hat{C}$.



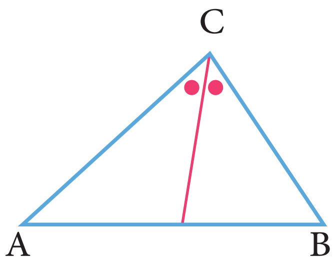
أتحقّق من إجابتي



b نقيس الزاوية باستخدام المنقلة ونرسم المستقيم الذي يقسمها إلى زاويتين قياسهما متساويان.



c نقيس الزاوية باستخدام المنقلة ونرسم المستقيم الذي يقسمها إلى زاويتين قياسهما متساويان.



d نقيس الزاوية باستخدام المنقلة ونرسم المستقيم الذي يقسمها إلى زاويتين قياسهما متساويان.

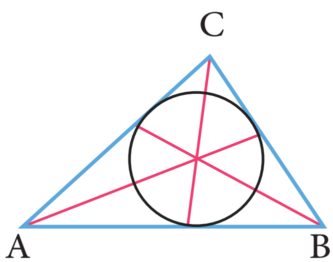
النشاط 3: الدائرة الماسّة داخلاً لأضلاع مثلّث

تحديد نقطة تلاقي المنصّفات مركز الدائرة الماسة داخلاً لأضلاع مثلّث.

من 15 إلى 20 دقيقة.

قلم ممحاة

أعيّن نقطة تلاقي المنصّفات، كما في المثال المحلول:



a في الشّكل المجاور:

أرسم منصّف الزاوية $\hat{A}$

أرسم منصّف الزاوية $\hat{B}$

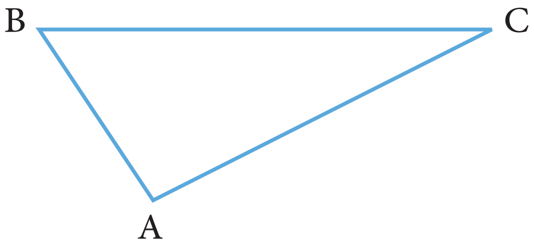
أرسم منصّف الزاوية $\hat{C}$

ألاحظ أنّ المنصّفات الثلاثة تلتقي في نقطة.

أرسم الدائرة التي مركزها نقطة تلاقي المنصّفات وتمسّ أضلاع المثلّث.

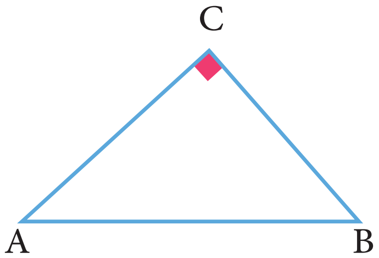
b بنفس الأسلوب السابق

أعيّن مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث.



c بنفس الأسلوب السابق

أعيّن مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث.



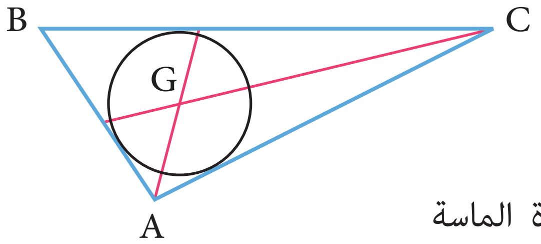
أتحقّق من إجابتي

b لتعيين مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث

أرسم منصّف الزاوية $\hat{A}$.

أرسم منصّف الزاوية $\hat{C}$.

يتقاطعان بنقطة هي G وهي مركز الدائرة الماسة لأضلاع المثلّث.

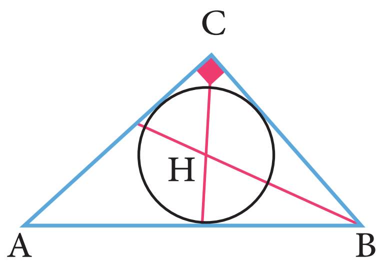


c لتعيين مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث

أرسم منصّف الزاوية $\hat{B}$.

أرسم منصّف الزاوية $\hat{C}$.

يتقاطعان بنقطة هي H وهي مركز الدائرة الماسة لأضلاع المثلّث.



النشاط 4: المنصّف في المثلّث

تنظيم معلوماتي عن منصّف زاوية في المثلّث.

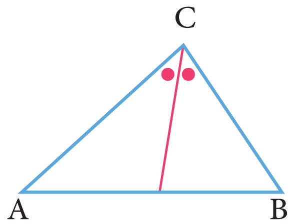
من 15 إلى 20 دقيقة.

قلم ممحاة

أقرأ عن المنصّف في المثلّث ثم أثبت معلوماتي عنه:

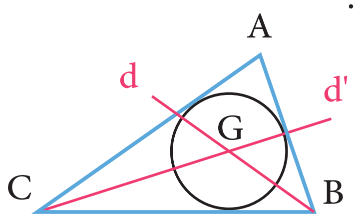
ما هو المنصّف؟

منصّف الزاوية في المثلّث هو المستقيم المرسوم من رأس المثلّث ويقسم الزاوية الى زاويتين قياسهما متساويان.



أين تتقاطع منصّفات المثلّث؟

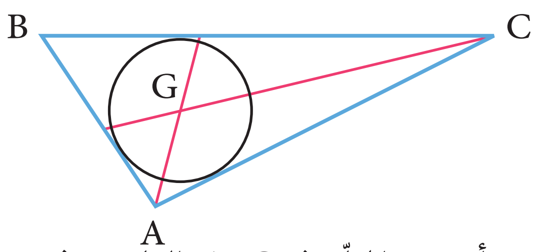
المنصّفات الثلاث تلتقي في نقطة واحدة: هي مركز الدائرة الماسّة داخلاً لأضلاع المثلّث.



المنصّف في المثلّث

مثال عن رسم المنصّف في المثلّث:

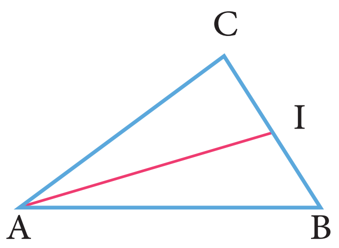
أرسم المثلّث ABC وأرسم منصّف الزاوية A ومنصّف الزاوية C وأعيّن مركز الدائرة الماسة لأضلاع المثلّث.



- أرسم المثلّث ABC القائم في B، وأرسم منصّف الزاوية A ومنصّف الزاوية C وأعيّن مركز الدائرة الماسة لأضلاع المثلّث

مثال عن مستقيم ليس منصّف:

النقطة I منتصف [BC]، فالمستقيم (AI) ليس منصّفاً بل متوسطاً.



أختبر نفسي

1 أرسم مثلّثاً ABC.

أرسم مستعيناً بالمنقلة المنصّفات الثلاثة لزوايا المثلّث ABC.

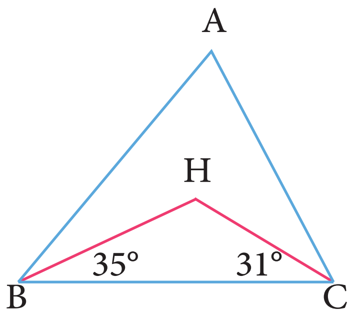
أين يقع مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث؟

....

....

2 ABC مثلّث فيه النقطة H نقطة تلاقي المنصّفات.

أحسب قياسات الزوايا $\widehat{CHB}$ و $\widehat{HCA}$.



....

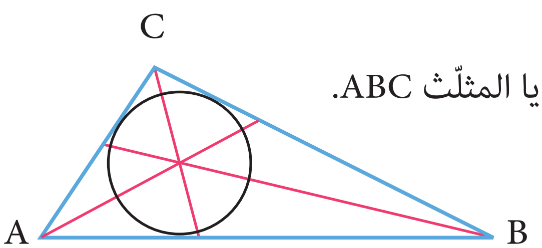
....

أتحقّق من إجابتي

1 أرسم مثلّثاً ABC.

أرسم مستعيناً بالمنقلة المنصّفات الثلاثة لزوايا المثلّث ABC.

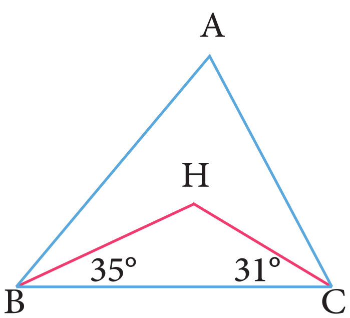
أين يقع مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث؟



- نرسم منصّف الزاوية $\hat{B}$
- نرسم منصّف الزاوية $\hat{C}$
- يتقاطعان في نقطة هي مركز الدائرة الماسة للأضلاع.

2 ABC مثلّث فيه النقطة H نقطة تلاقي المنصّفات.

أحسب قياسات الزوايا $\widehat{CHB}$ و $\widehat{HCA}$.



$\widehat{CHB} = 180° - (31° + 25°) = 124°$

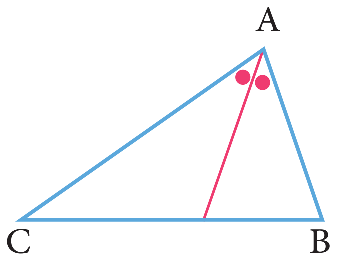
لأنّ مجموع زوايا المثلّث 180

$\widehat{HCA} = 31°$ لأنّ (CH) منصّف الزاوية $\hat{C}$

ألخّصُ درسي : 35 – 40 دقيقة

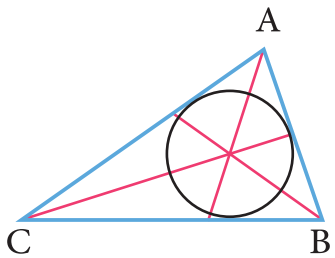
تعلّمت في درس منصّف زاوية مثلّث:

أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:



☐ تمييز منصّف زاوية مثلّث: ويمكن تعريفه وفق:
منصّف الزاوية A في المثلّث هو المستقيم المرسوم من A ويقسّم الزاوية إلى زاويتين قياساهما متساويان.

☐ رسم منصّف الزاوية A وفق الخطوات:
نقيس الزاوية باستخدام المنقلة ونرسم المستقيم الذي يقسمها إلى زاويتين قياساهما متساويان.



☐ تعيين نقطة مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلّث:

- أرسم منصّف زاوية في المثلّث.
- أرسم منصّف زاوية أخرى في المثلّث.
- المنصّفان يتقاطعان بنقطة هي مركز الدائرة المطلوبة.

يمكنني رسم مثلّث وتعيين مركز الدائرة الماسة لأضلاع المثلّث داخلاً.

1 أملأ الفراغات التالية بما يناسبها:

.a المتوسط المتعلق بضلع في مثلّث: هو ...... الذي يصل بين رأس المثلّث و...... الضلع المقابل لتلك الرأس.

.b إنّ منصّف الزاوية في مثلّث هو .... الذي يصل بين رأس المثلّث ويقسم الزاوية إلى ....

.c محور قطعة مستقيمة هو المستقيم الذي .... القطعة في ....

.d الارتفاع المتعلق بضلع في مثلّث هو المستقيم المرسوم من رأس المثلّث و...... على الضلع المقابل لتلك الرأس.

2 أختار الأجابة الصحيحة في كل من العبارات التالية:

- إن نقطة تلاقي المحاور في المثلّث القائم تقع:

○ داخل المثلّث ○ خارج المثلّث ○ في منتصف الوتر

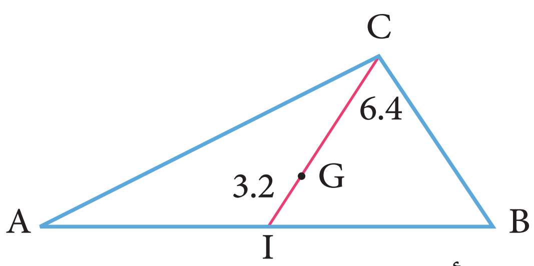
- إن مركز الدائرة الماسة بأضلاع المثلّث هي نقطة تلاقي:

○ المحاور ○ المنصّفات ○ المتوسطات

- إنّ مركز ثقل المثلّث هي نقطة تلاقي:

○ المنصّفات ○ المتوسطات ○ المحاور

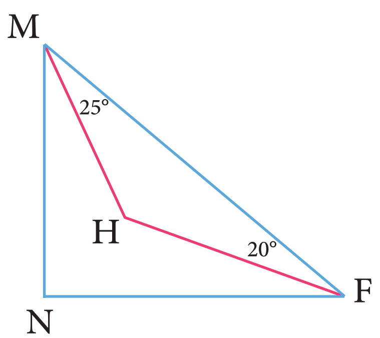
3 أتأمّل الشكل المجاور، ثم أبيّن فيما اذا كانت النقطة G مركز ثقل للمثلّث ABC.



....

....

4 أتأمّل الشكل المجاور: بفرض H مركز الدائرة الماسة بأضلاع المثلّث MNF، ثم أحسب قياس الزاوية HMF و MNF.



....

....

....

....

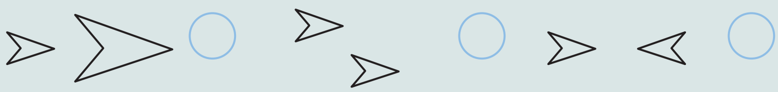
كيف أحب أن أتعلّم؟

في نهاية الوحدة أصبح بإمكاني تحديد الطّريقة الّتي ساعدتني أكثر في التّعلّم من خلال تلوين عدد من النُّجوم وفق ما يأتي:

ساعدتني كثيراً: ★★★ ساعدتني: ★★☆ ساعدتني قليلاً: ★☆☆

☆☆☆ أتعلّم بطريقة الاختيار من متعدِّد:

1. أجد الشكل وصورته في الحالة:

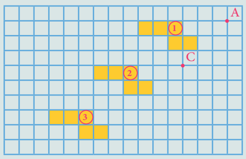


☆☆☆ أتعلّم بطريقة الرَّسم:

2 أتأمّل الشّكل المجاور:

a. أرسم الشكل 2 صورة الشكل 1 وفق الانسحاب من A إلى C؟

b. أرسم صورة الشكل 2 وفق الانسحاب من A إلى C؟

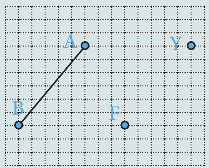


☆☆☆ أتعلّم بطريقة كتابة الإجابة:

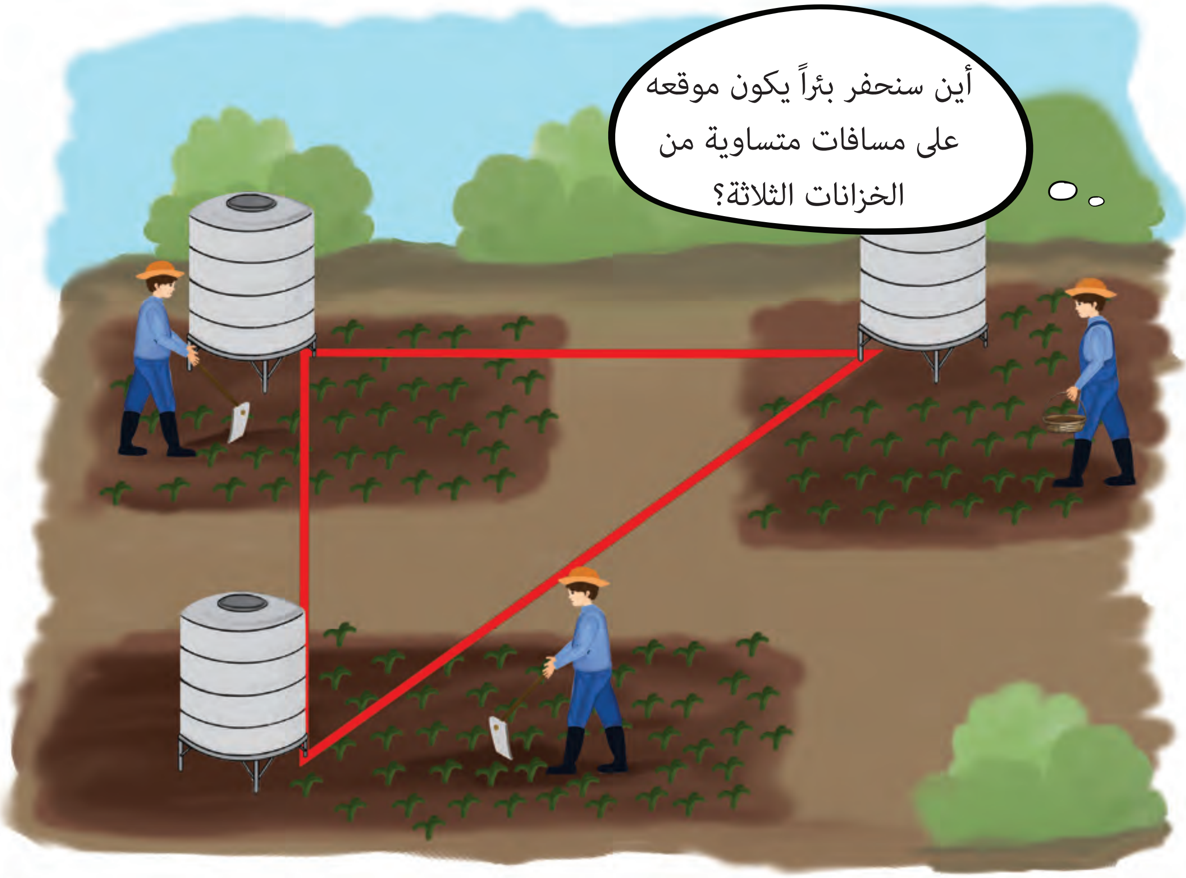
b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً ثم أملأ الفراغات:

1. صورة النّقطة y بانسحاب من A إلى B هي ....

2. الرّباعي .... متوازي أضلاع.



الوحدة الرّابعة: المثّلث القائم والدّائرة

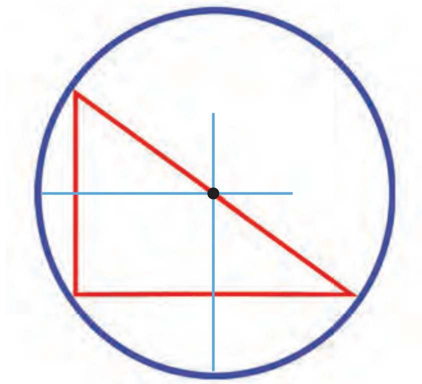


من 3:00 إلى 3:30 ساعة.

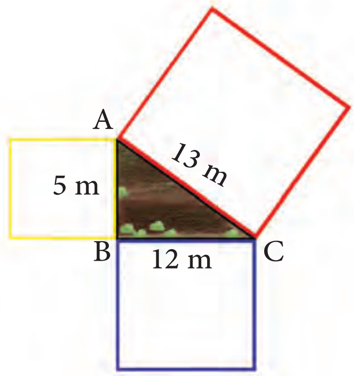
قبلَ أنْ تبدأ دراسةَ هذهِ الوحدةِ، استعنْ بدليلِ "كيفَ أتعلّمُ؟" لتنظيمِ وقتكَ وفقَ جداولِ توزيعِ المهامِّ الأسبوعيّةِ.
كما يمكنُكَ تقييمُ تَعلّمِكَ وصولاً لإتقانِ مهاراتِ التّعلّمِ في دراسةِ موادِّ منهاجِ التّعلّمِ التّمكينيِّ الآتيةِ: الرياضيّاتِ، واللُّغةِ العربيّةِ، وعلم الأحياء والفيزياء والكيمياء، واللغة الفرنسيّة، واللُّغةِ الإنكليزيّةِ.

دروس الوحدة

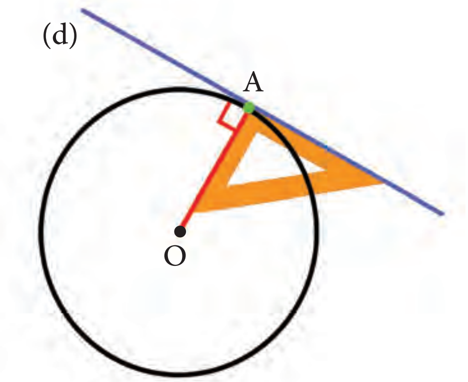
1 دائرة مارّة برؤوس مثلّث قائم



2 مبرهنة فيثاغورث - العكس



3 مماسّ دائرة



هيّا نبدأ

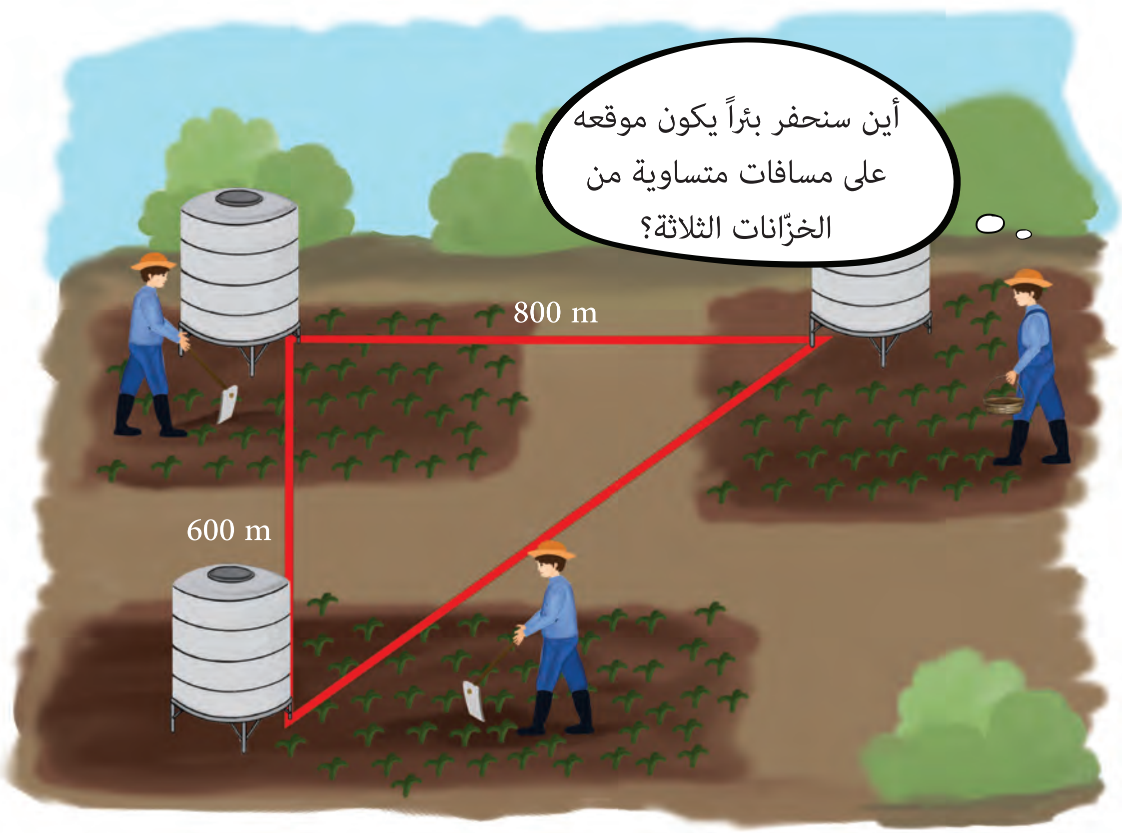
حفر بئر

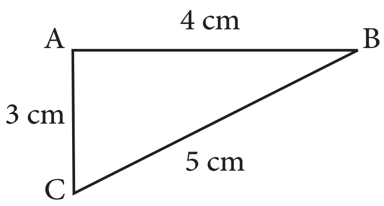
إنشاء دائرة تمر من رؤوس مثلّث قائم وتعيين مركزها.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة مسطرة

أعيّن مركز الدائرة المارّة برؤوس المثلّث القائم التي تمثل رؤوسه مواقع الخزّانات الثلاثة.





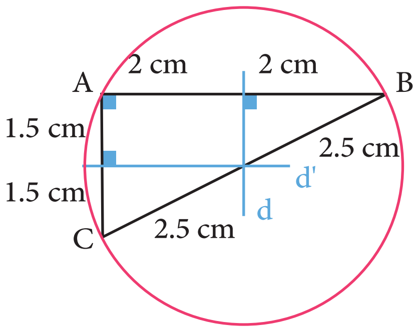
a في الشّكل ABC مثلّث قائم في A، عيّن مركز الدّائرة المارّة برؤوسه واحسبْ طول نصف قطرها.

....

....

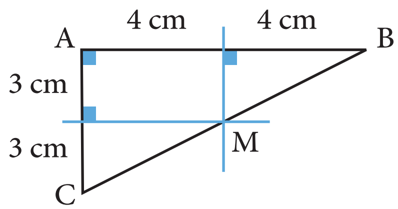
b عد إلى الصورة وارسم شكلاً يمثّل الصّورة مُمثّلاً كل 100 m بـ 1 cm ثم عيّن مركز الدّائرة.

أتحقّق من إجابتي



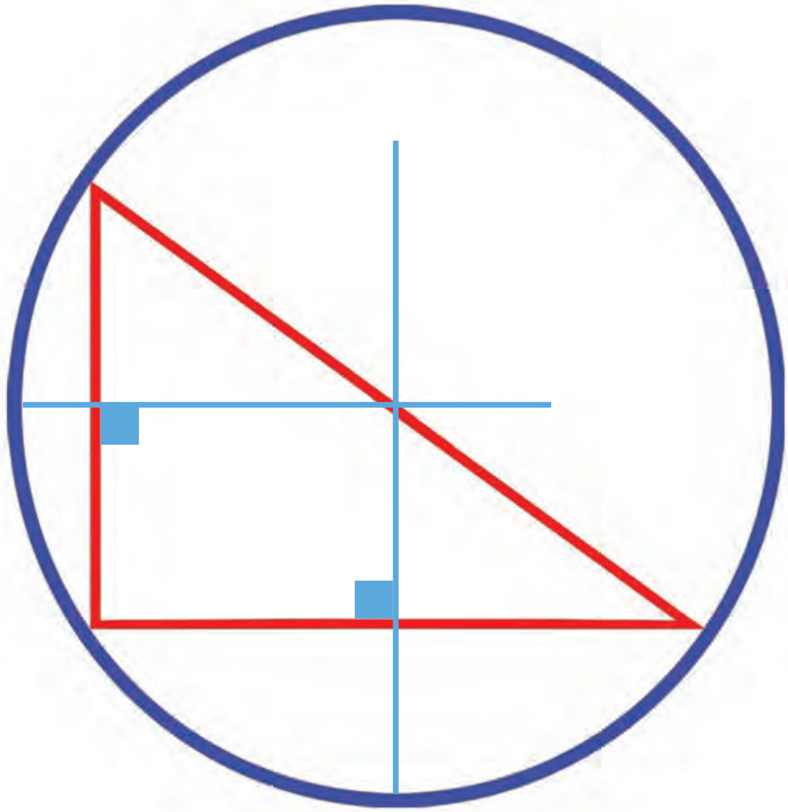
a نرسم d محور الضّلع [AB] فأي نقطة منه تكون متساوية المسافة عن النقطتين A و B
كذلك نرسم 'd محور الضّلع [AC] فأي نقطة منه تكون متساوية المسافة عن النقطتين A و C.
يتقاطع هذان المحوران في نقطة تقع في منتصف الوتر BC وهي نقطة متساوية المسافة عن رؤوس المثلّث فهي مركز الدّائرة المطلوبة.
نصف قطر الدائرة هو:

$$R = \frac{[AC]}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ cm}$$



b نرسم d محور الضّلع [AB] فأيّ نقطة منه تكون متساوية المسافة عن النّقطتين A و B
كذلك نرسم 'd محور الضلع [AC] فأيّ نقطة منه تكون متساوية المسافة عن النّقطتين A و C.
يتقاطع هذان المحوران في نقطة M تقع في منتصف الوتر [BC] وهي نقطة متساوية المسافة عن رؤوس المثلّث فهي موقع البئر المناسب.

الدّرس الأول: دائرة مارّة برؤوس مثلّث قائم



مثلّث قائم   دائرة مارّة برؤوس مثلّث قائم

إنشاء دائرة مركزها نقطة تلاقي محاور المثلّث ونصف قطرها هو المسافة بين تلك النقطة وأحد رؤوسه، وإنشاء مماسّ لدائرة.

من 1:00 إلى 1:15 ساعة.

قلم   ممحاة   منقلة   كوس   فرجار

هيّا بنا

1. أرسم مثلّثاً ABC قائماً في A فيه AB = 3 cm و AC = 4 cm
2. أرسم d محور ضلعه [AB] فيقطع الوتر [BC] في نقطة O.
3. أرسم 'd محور ضلعه [AC] فيقطع الوتر [BC] في النقطة O أيضاً.
4. ما موضع النقطة بالنسبة للوتر [BC]؟

....

....

النشاط 1: من مثلّث قائم إلى دائرة

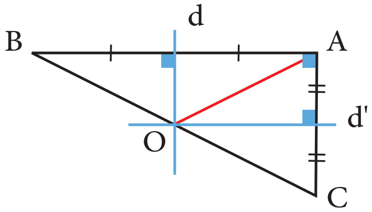
تحديد مركز ونصف قطر الدّائرة المارّة برؤوس مثلّث قائم.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة كوس

أَضعُ إشارة (✓) ضمن ◯ التي تشير إلى العبارة الصّحيحة:

في الشّكل ABC مثلّث قائم في A: d و 'd محورا الضّلعين القائمين [AB] و [AC] على التّرتيب.



a مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث القائم ABC تقع في:

◯ منتصف الضّلع القائمة [AB]

◯ منتصف الضّلع القائمة [AC]

◯ منتصف الوتر [BC]

b قطر الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث القائم ABC هو:

◯ الوتر [BC] ◯ الضّلع القائمة [AC] ◯ الضّلع القائمة [AB]

c طول المتوسّط المتعلّق بالوتر [AO]:

◯ ربع طول الوتر ◯ نصف طول الوتر ◯ طول الوتر

أتحقّق من إجابتي

a إذا كان ABC مثلّثاً قائماً في B تمرّ من رؤوسه دائرة فإنّ الوتر [AC] هو قطر في الدّائرة وعندها فإنّ
$AO = BO = CO$

b الوتر [BC]

c $AO = \dfrac{BC}{2}$

النشاط 2: المثلّث القائم والدّائرة

تنظيم معلوماتي عن علاقة المثلّث القائم بالدّائرة المارّة برؤوسه.

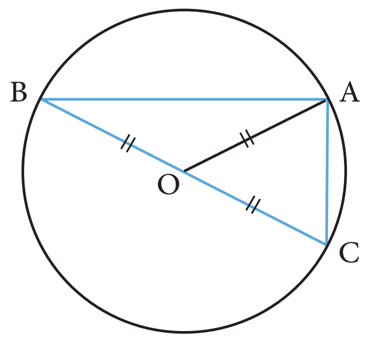
من 18 إلى 20 دقيقة.

قلم ممحاة

أقرأُ عن علاقة المثلّث القائم بالدّائرة المارّة برؤوسه، ثم أثبتُ معلوماتي ومعارفي عن الدّائرة المارّة برؤوس مثلّث:

المثلّث القائم والدّائرة:

من رؤوس أي مثلّث تمر دائرة وحيدة مركزها نقطة تقاطع محاور أضلاعه.



مركز الدّائرة المارّة برؤوس مثلّث قائم تقع في منتصف وتره.

ما خصائص الدّائرة المارّة برؤوس مثلّث قائم؟

إذا كان BAC مثلّثاً قائماً في A وكانت النّقطة O منتصف وتره [BC] ألاحظ أنّ:

- النقطة O هي مركز الدّائرة المارّة برؤوسه.
- وتره [BC] هو قطر في الدّائرة المارّة برؤوسه.
- طول المتوسط المتعلق بالوتر في المثلّث القائم يساوي نصف طول الوتر.
- $OA = OB = OC$

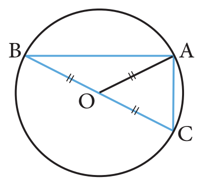
إذا كان BAC مثلّثاً رُسمت الدّائرة المارّة برؤوسه:

- إذا كان أحد أضلاعه وليكن [BC] هو قطر في الدّائرة المارّة برؤوسه كان المثلّث قائماً وتره [BC] فهو قائم في A.
- إذا كان طول المتوسّط المارّ من الرأس A ومن النقطة O منتصف الضّلع [BC] في المثلّث ABC يساوي نصف طول [BC] كان المثلّث قائماً وتره [BC] فهو قائم في A.
- إذا كانت النقطة O منتصف الضّلع BC في المثلّث ABC وكان $OA = OC = OB$ كان المثلّث قائماً وتره [BC] فهو قائم في A.

المثلّث القائم والدائرة المارة برؤوسه

مثال لدائرة مارّة برؤوس مثلّث قائم:

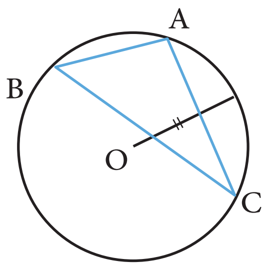
في الشّكل الآتي المثلّث قائم لأنّ أحد أضلاعه قطر في الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث.



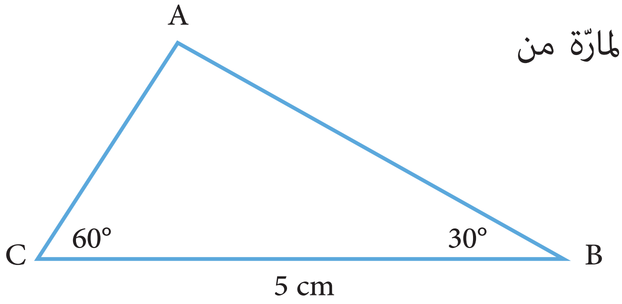
- أرسم على ورقة، مثلثاً قائماً ثم أرسم الدائرة المارة برؤوسه.

مثال لدائرة مارّة برؤوس مثلّث ليس قائماً:

في الشّكل الآتي المثلّث ليس قائماً.



1 في الشّكل المرافق: أعيّن مركز الدّائرة المارّة من رؤوس المثلّث وما طول نصف قطرها؟



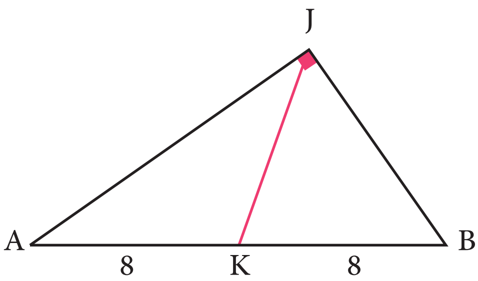
....

....

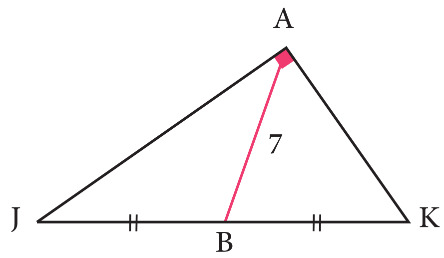
....

....

2 في كل من الشّكلين 1 و 2، أحسب الطول JK.



الشّكل 2



الشّكل 1

....

....

....

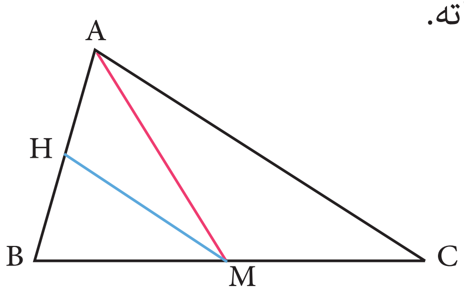
....

3 في الشّكل المرافق: ABC مثلّث، [AM] أحد متوسطاته.

H نقطة من [AB] تحقق MH = MB :

1. أعيّن مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث HBC .

2. لماذا [CH] ارتفاع في المثلّث ABC؟

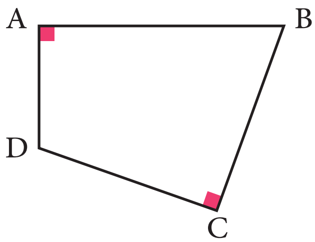


....

....

....

4 ABCD شكل رباعيّ زاويتاه $\widehat{A}$ و $\widehat{C}$ قائمتان.
اشرح لماذا تقع رؤوسه A و B و C و D على دائرة واحدة؟



....

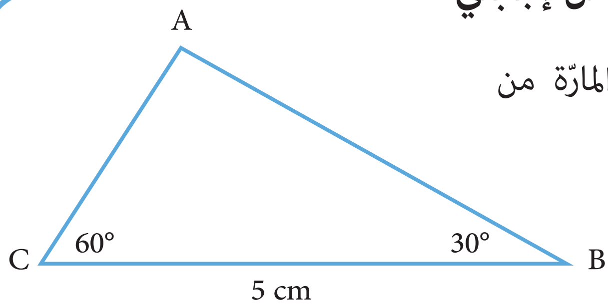
....

....

....

أتحقّق من إجابتي

1 في الشّكل المرافق: ما مركز الدّائرة المارّة من رؤوس المثلّث وما طول نصف قطرها؟



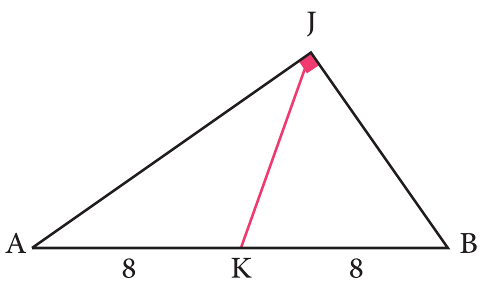
في المثلّث ABC لدينا:

$$\widehat{A} = 180 - (30 + 60) = 180 - 90 = 90°$$

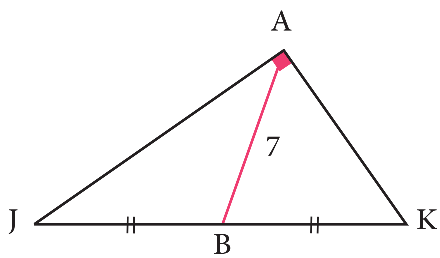
فالمثلّث قائم في A فمركز الدّائرة المارّة برؤوسه تقع في منتصف وتره [BC]
نصف قطر الدّائرة هو:

$$R = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ cm}$$

2 في كل من الشّكلين 1 و 2، أحسب الطول JK.



الشّكل 2



الشّكل 1

في الشّكل 1:

AB هو متوسّط متعلّق بالوتر في المثلّث القائم فطوله يساوي نصف طول الوتر إذاً:

$$JK = 2\ AB = 2 \times 7 = 14\ cm$$

في الشّكل 2:

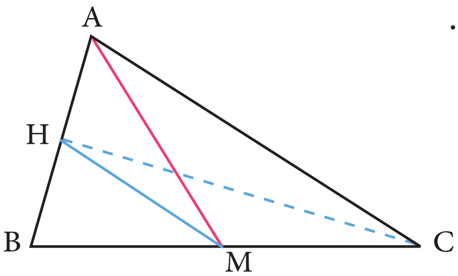
[JK] هو متوسّط متعلّق بالوتر فطوله يساوي نصف طول الوتر إذاً:

$$JK = \frac{[AB]}{2} = \frac{16}{2} = 8\ cm$$

3 في الشّكل المرافق: ABC مثلّث، [AM] أحد متوسطاته.

H نقطة من [AB] تحقق MH = MB :

1. أعيّن مركز الدّائرة المارّة برؤوس المثلّث HBC .
2. لماذا [CH] ارتفاع في المثلّث ABC؟



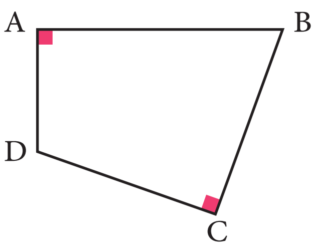
1. بما أن [AM] متوسّط مرسوم من الرأس A في المثلّث ABC إذاً M منتصف [BC] أي MB = MC

لكن MH = MB نستنتج أن MH = MB = MC فالمثلّث BHC قائم في H فمركز الدّائرة المارّة برؤوسه تقع في منتصف وتره [BC] فهي M.

2. المستقيم (CH) يمرّ من الرّأس C في المثلّث ABC ويعامد (AB) فهو ارتفاع.

4 ABCD شكل رباعيّ زاويتاه $\hat{A}$ و $\hat{C}$ قائمتان.

أشرحُ لماذا تقع رؤوسه A و B و C و D على دائرة واحدة.



المثلّثABD قائم في A فمركز الدّائرة المارّة برؤوسه تقع في منتصف وتره [BD] وهي نقطة متساوية البعد عن رؤوسه

والمثلّث BCD قائم في C فمركز الدّائرة المارّة برؤوسه تقع في منتصف وتره [BD]

نستنتج أنّ منتصف [BD] هي نقطة متساوية البعد عن رؤوس الرباعي فهي مركز الدّائرة المارّة برؤوسه فرؤوس الرباعي تقع على دائرة واحدة.

ألخّصُ درسي:

35 – 40 دقيقة

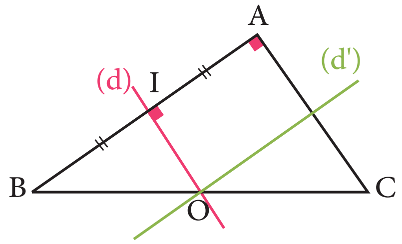
تعلّمت في درس دائرة مارّة برؤوس مثلّث قائم:

أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:

☐ من جميع رؤوس أي مثلّث تمر دائرة وحيدة.

☐ مركز الدّائرة المارّة برؤوس مثلّث قائم تقع في منتصف وتره.

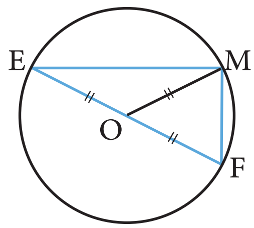
☐ وتر المثلّث القائم هو قطر في الدّائرة المارّة برؤوسه.



ABC مثلّث قائم في A

d و 'd محوري الضّلعين القائمتين ويلتقيان في O منتصف الوتر BC وبالتالي BC هو قطر للدّائرة المارّة برؤوسه.

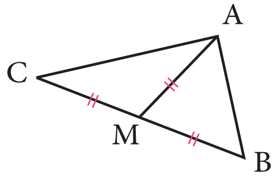
☐ طول المتوسّط المتعلّق بالوتر في المثلّث القائم يساوي نصف طول الوتر.



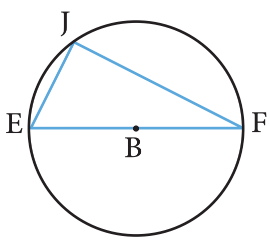
MO متوسّط متعلّق بالوتر في المثلّث القائم EMN

إذاً $MO = EO = FO$ أي $MO = \frac{EF}{2}$

☐ إذا كان طول متوسّط متعلّق بضلع في مثلّث يساوي نصف طول تلك الضّلع فالمثلّث قائم.



في مثلّث ABC ، إذا كانت M منتصف [AB] وكان $MA = \frac{1}{2} MB$ ، كان المثلّث ABC قائم الزاوية في A .

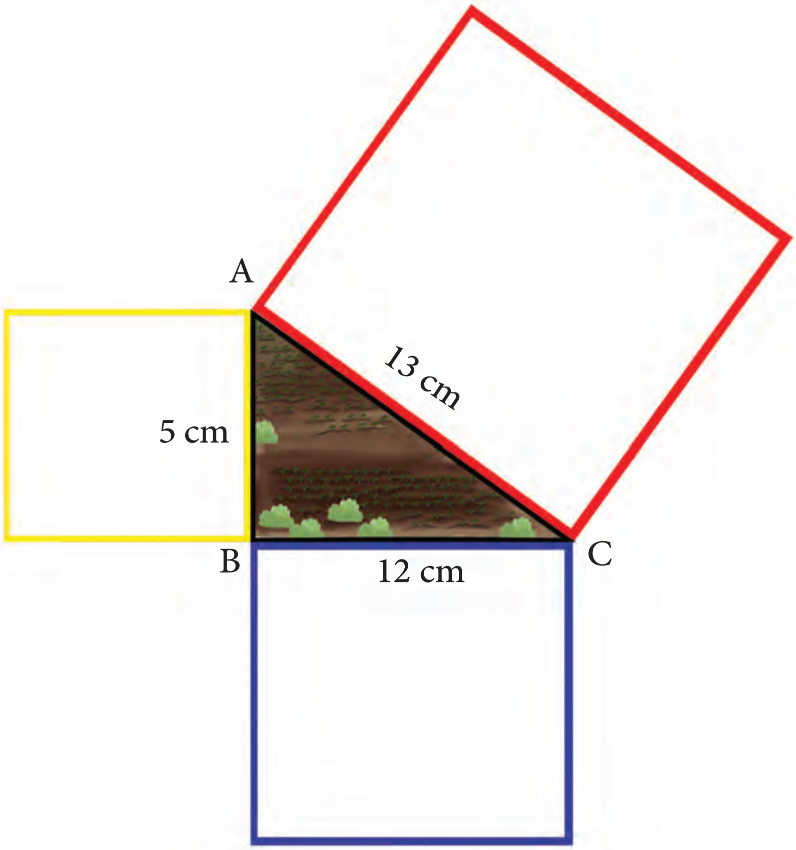


☐ إذا كان أحد أضلاع مثلّث قطر في الدّائرة المارّة برؤوسه فهو قائم، وتره ذلك الضّلع.

C دائرة مارّة برؤوس المثلّث EFJ قطرها [EF] فالمثلّث EFJ قائم وتره [EF].

يمكنني رسم مثلّث قائم ورسم الدّائرة المارّة برؤوسه.

الدّرس الثاني: مبرهنة فيثاغورث - العكس



مبرهنة فيثاغورث   مبرهنة فيثاغورث العكسية

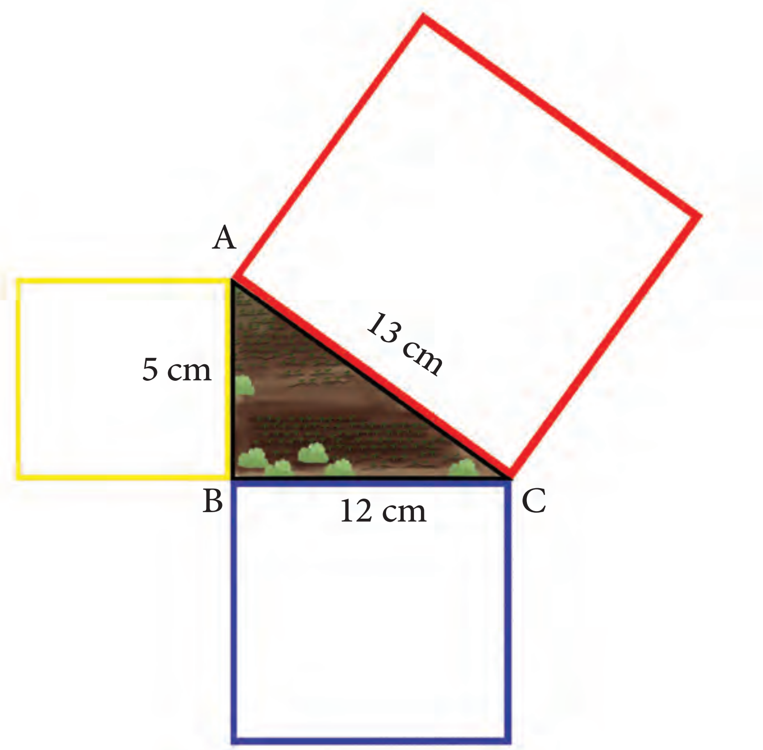
استعمال الصور أو النماذج لمعرفة خصائص المثلّث القائم وتطبيق مبرهنة فيثاغورث في حل المسائل.

من 1:00 إلى 1:15 ساعة.

قلم   ممحاة   فرجار

هيّا بنا

أتأمّل صفحة الدرس وأرى صورة لمخطط قطعة أرض شكلها مثلّث قائم وأنشئ على أضلاعه الثلاثة ثلاثة مربّعات كما في الشكل:



1) أحسب مساحة المربّعات الثلاثة.

2) أجمع مساحتي المربّعين اللذين طولا ضلعيهما 5 m و 12 m.

3) أقارن مجموع مساحتي المربّعين بمساحة المربّع الذي طول ضلعه 13 m.

....

....

....

....

....

النشاط 1: مبرهنة فيثاغورث

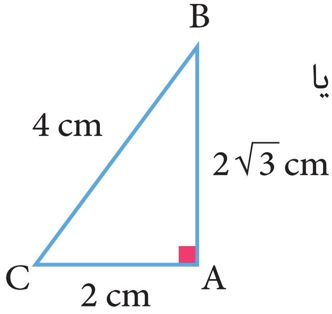
استنتاج مبرهنة فيثاغورث في المثلّث القائم.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

اضع إشارة ✓ في ◯ التي تشير إلى العبارة الصحيحة، كما في المثال المحلول:

a نوع المثلّث ABC:



✓ قائم الزاوية ◯ منفرج الزاوية ◯ حاد الزوايا

مربّع طول الوتر يساوي:

◯ 12 ◯ 4 ✓ 16

مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين $[AB]^2 + [AC]^2$ يساوي:

✓ 16 ◯ 28 ◯ 20

المثلّث ABC قائم في A وتره هو [BC]

مربّع طول الوتر: $BC^2 = (4)^2 = 16$

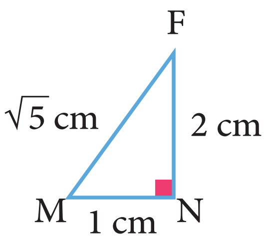
مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين:

$$AC^2 + AB^2 = (2)^2 + (2\sqrt{3})^2 = 2 \times 2 + 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} = 4 + 12 = 16$$

نلاحظ أنّ: $AC^2 + AB^2 = BC^2$

تُسمى هذه العبارة مبرهنة فيثاغورث والتي نصّها: مربّع طول الوتر في المثلّث القائم يساوي مجموع مربّعي طولي ضلعيه القائمين.

b نوع المثلّث MNF:



◯ قائم الزاوية ◯ منفرج الزاوية ◯ حاد الزوايا

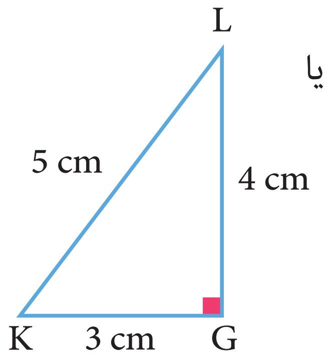
مربّع طول الوتر MF يساوي:

◯ 5 ◯ 4 ◯ 25

مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين $NF^2 + MN^2$ يساوي:

◯ 6 ◯ 5 ◯ 9

ⓑ نوع المثلّث KGL:



○ قائم الزاوية ○ منفرج الزاوية ○ حاد الزوايا

مربّع طول الوتر KL يساوي:

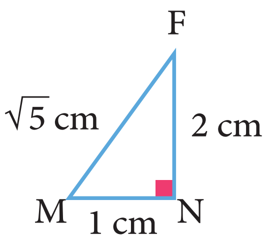
○ 25 ○ 9 ○ 16

مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين $KG^2 + GL^2$ يساوي:

○ 4 ○ 34 ○ 25

أتحقّق من إجابتي

ⓑ المثلّث MNF قائم في N وتره هو [MF].



مربّع طول الوتر: $MF^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$

مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين:

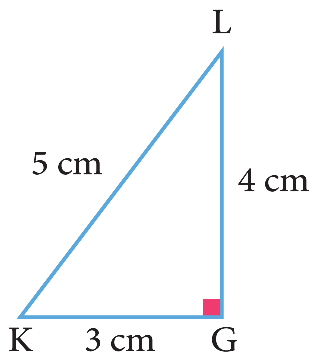
$$MN^2 + NF^2 = (1)^2 + (2)^2 = 1 + 4 = 5$$

نلاحظ أنّ: $MN^2 + NF^2 = MF^2$

تسمّى هذه العبارة مبرهنة فيثاغورث والتي نصّها:

مربّع طول الوتر في المثلّث القائم يساوي مجموع مربّعي طولي ضلعيه القائمين.

ⓒ المثلّث KGL قائم في G وتره هو [LK].



مربّع طول الوتر: $KL^2 = (5)^2 = 25$

مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين:

$$KG^2 + GL^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$$

نلاحظ أنّ: $KG^2 + GL^2 = LK^2$

تسمّى هذه العبارة مبرهنة فيثاغورث والتي نصّها:

مربّع طول الوتر في المثلّث القائم يساوي مجموع مربّعي طولي ضلعيه القائمين.

النشاط 2: متى أُطبّق مبرهنة فيثاغورث؟

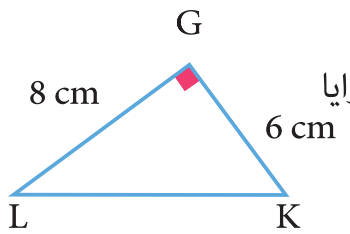
حساب طول ضلع في مثلّث قائم اعتماداً على مبرهنة فيثاغورث.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

اضع إشارة ✓ في ○ التي تشير إلى العبارة الصحيحة، كما في المثال المحلول:

a نوع المثلّث KGL :



✓ قائم الزاوية ○ منفرج الزاوية ○ حاد الزوايا

مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين $KG^2 + GL^2$ يساوي:

○ 14 ○ 28 ✓ 100

بحسب مبرهنة فيثاغورث مربّع الوتر يساوي مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمتين إذاً $[KL]^2$يساوي:

✓ 100 ○ 14 ○ 28

طول الوتر [KL] يساوي:

○ 100 ✓ 10 ○ 14

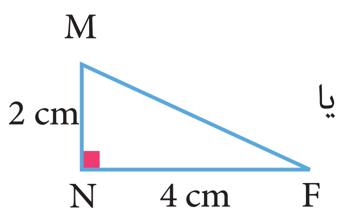
نوع المثلّث KGL: قائم في G

بحسب مبرهنة فيثاغورث مربّع الوتر يساوي مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين إذاً

$$KL^2 = KG^2 + GL^2 = (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100$$

$$KL = \sqrt{100} = 10$$

b نوع المثلّث MNL :



○ قائم الزاوية ○ منفرج الزاوية ○ حاد الزوايا

مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين $MN^2 + NF^2$ يساوي:

○ 6 ○ 20 ○ 14

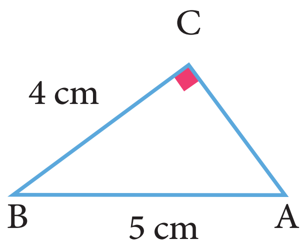
بحسب مبرهنة فيثاغورث مربّع الوتر يساوي مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين إذاً $[MF]^2$يساوي:

○ 6 ○ 14 ○ 20

طول الوتر [MF] يساوي:

○ $\sqrt{6}$ ○ $2\sqrt{5}$ ○ 6

c نوع المثلّث ABC:



○ قائم الزاوية ○ منفرج الزاوية ○ حاد الزوايا

بحسب مبرهنة فيثاغورث في المثلّث القائم نكتب:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

وهذه العبارة يمكن كتابتها بالصيغة المكافئة الآتية:

○ $AC^2 = AB^2 - BC^2$

○ $AC^2 = BC^2 - AB^2$

○ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

إذاً مربّع طول الضلع القائمة AC يساوي مربّع طول الوتر مطروحاً منه مربّع طول الضلع القائمة المعلومة [BC] أي $[AC]^2$ يساوي:

○ $25 - 16$ ○ $25 + 16$ ○ $5 - 4$

طول [AC] يساوي:

○ $\sqrt{31}$ ○ 3 ○ 1

أتحقّق من إجابتي

b المثلّث MNF قائم في N: بحسب مبرهنة فيثاغورث مربّع الوتر يساوي مجموع مربّعي طولي الضلعين القائمين إذاً:

$$MF^2 = MN^2 + NF^2 = (2)^2 + (4)^2 = 4 + 16 = 20$$

$$MF = \sqrt{20} = \sqrt{4\times5} = \sqrt{4}\,\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

c المثلّث ABC قائم في C.

بحسب مبرهنة فيثاغورث في المثلّث القائم نكتب: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

وهذه العبارة يمكن كتابتها بالصيغة المكافئة الآتية: $AC^2 = AB^2 - BC^2$

أي مربّع طول الضلع القائمة AC يساوي مربّع طول الوتر مطروحاً منه مربّع طول الضلع القائمة المعلومة أي:

$$[AC]^2 = (5)^2 - (4)^2 = 25 - 16 = 9$$

$$[AC] = \sqrt{9} = 3$$

النشاط 3: مبرهنة فيثاغورث العكسية

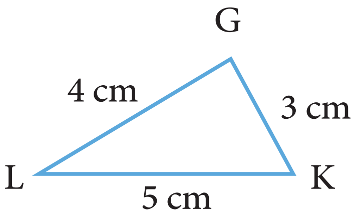
استعمال مبرهنة فيثاغورث العكسية في التحقق فيما إذا كان مثلّثاً قائماً أم لا.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

اضع إشارة ✓ في ◯ التي تشير إلى العبارة الصحيحة، كما في المثال المحلول:

a في المثلّث KGL يكون مربّع الطول KL هو:



◯ 9 ✓ 25 ◯ 16

مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين:

✓ 25 ◯ 34 ◯ 31

العبارة الصحيحة التي نستنتجها من السؤالين السابقين:

◯ $LG^2 = GK^2 + LK^2$

✓ $LK^2 = GL^2 + GK^2$

◯ $GK^2 = LG^2 + LK^2$

نوع المثلّث حسب زواياه:

✓ قائم الزاوية ◯ منفرج الزاوية ◯ حاد الزوايا

في المثلّث KGL أطول اضلاع المثلّث هو الضلع [LK] ومربّعه $LK^2 = 5^2 = 25$

مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين:

$$GL^2 + GK^2 = (4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25$$

نستنتج أن: $LK^2 = GL^2 + GK^2$

يبدو المثلّث قائم الزاوية في G.

نستنتج أنه إذا كان في مثلّث ما: (مربّع أطول أضلاع المثلّث يساوي مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين فالمثلّث قائم الزاوية في الرأس المقابل للضلع الأكبر)

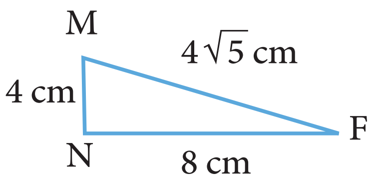
تُسمّى المُبرّهنة السّابقة مُبرهنة فيثاغورث العكسيّة.

تستخدم هذه المبرهنة لإثبات أن مثلّثاً ما هو مثلّث قائم إذا تحقق الشّرط:

مربّع أطول أضلاع المثلّث يساوي مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين.

كما تستخدم هذه المبرهنة لإثبات أن مثلّثاً ما هو مثلّث غير قائم إذا لم يتحقق الشرط السابق أي إذا تحقق الشرط: مربّع أطول أضلاع المثلّث لا يساوي مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين

b في المثلّث MNF مربّع أطول الأضلاع:



○ 80　　○ 64　　○ 16

مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين:

○ 144　　○ 96　　○ 80

العبارة الصحيحة التي نستنتجها من السؤالين السابقين:

○ $NF^2 = MF^2 + MN^2$

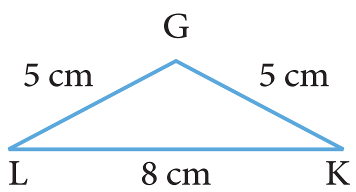
○ $MN^2 = MF^2 + NF^2$

○ $MF^2 = MN^2 + NF^2$

نوع المثلّث حسب زواياه:

○ قائم الزاوية　　○ منفرج الزاوية　　○ حاد الزوايا

c في المثلّث LGK مربّع أطول الأضلاع:



○ 16　　○ 64　　○ 25

مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين:

○ 50　　○ 96　　○ 80

العبارة الصحيحة التي نستنتجها من السؤالين السابقين:

○ $LK^2 \neq LG^2 + GK^2$

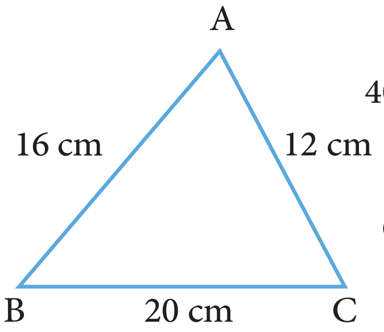
○ $LK^2 = LG^2 + GK^2$

○ $LK^2 = LG^2 + GK^2$

نوع المثلّث:

○ قائم الزاوية في $\hat{G}$　　○ ليس قائماً

d في المثلّث ABC مربّع طول BC يساوي:



○ 80 ○ 40 ○ 400

مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين:

○ 28 ○ 400 ○ 60

العبارة الصحيحة التي نستنتجها من السؤالين السابقين:

○ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

○ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

○ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

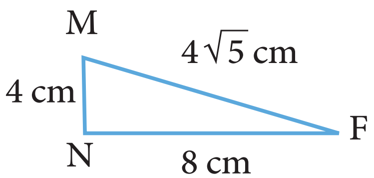
نوع المثلّث حسب زواياه:

○ قائم الزاوية ○ منفرج الزاوية ○ حاد الزوايا

أتحقّق من إجابتي

b في المثلّث MNF أطول أضلاع المثلّث هو الضلع [MF] ومربّعه:

$$MF^2 = (4\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$$



مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين:

$$MN^2 + NF^2 = (4)^2 + (8)^2 = 16 + 64 = 80$$

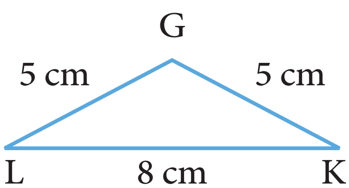
نستنتج أن:

$$MF^2 = MF^2 + MF^2$$

فالمثلّث قائم الزاوية في N حسب مبرهنة فيثاغورث العكسية.

c في المثلّث LGK أطول أضلاع المثلّث هو الضلع [LK] ومربّعه:

$$LK^2 = (8)^2 = 64$$



مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين:

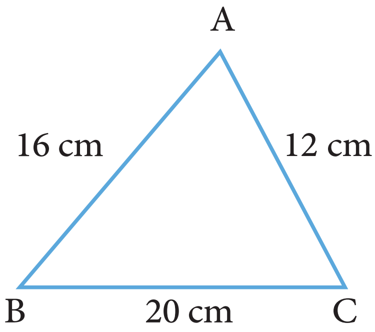
$$GL^2 + GK^2 = (5)^2 + (5)^2 = 25 + 25 = 50$$

نستنتج أن:

$$LK^2 \neq LG^2 + GK^2$$

فالمثلّث ليس قائماً حسب مبرهنة فيثاغورث العكسية.

d في المثلّث ABC أطول أضلاع المثلّث هو الضلع [BC] ومربّعه:



$$BC^2 = (20)^2 = 400$$

مجموع مربّعي طولي الضلعين الآخرين:

$$AC^2 + AB^2 = (16)^2 + (12)^2 = 256 + 144 = 400$$

نستنتج أن:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

فالمثلّث قائم الزاوية في A حسب مبرهنة فيثاغورث العكسية.

النشاط 4: مساحة المثلّث المتساوي الأضلاع

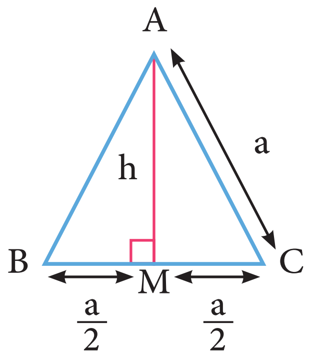
حساب ارتفاع ومساحة المثلّث المتساوي الأضلاع.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

أملأ الفراغات في أسئلة النشاط الآتي، كما في المثال المحلول:

a في الشكل ABC مثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه a:



AM ارتفاع مرسوم من الرأس A فهو متوسط و منصّف و محور

فالنقطة M منتصف [BC] ، إذاً:

$$MB = MC = \frac{a}{2}$$

المثلّث AMC قائم في M إذاً بحسب مبرهنة فيثاغورث نكتب:

$$AM^2 = AC^2 - MC^2$$

$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2$ ومنه: $h^2 = a^2 - \frac{a^2}{2}$

وبتوحيد المقامات نجد: $h^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$ ومنه : $h^2 = \frac{3a^2}{4}$ ومنه: $h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$

ومنه: $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، وإذا رمزنا لمساحة المثلّث ABC بالرمز S كان:

$$S = \frac{BC \times AM}{2} = \frac{a \times h}{2} = \frac{a \times a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{2} = a^2\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

b مثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه 4 cm :

طول ارتفاع المثلّث:

$$h = a\frac{\sqrt{3}}{2} = (\ldots) \times \frac{\ldots}{\ldots} = 2\sqrt{\ldots}$$

مساحة المثلّث:

$$S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = (\ldots)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = (\ldots) \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \ldots\sqrt{3}$$

c مثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه 6 cm :

طول ارتفاع المثلّث:

h = ...

مساحة المثلّث:

S = ...

أتحقّق من إجابتي

b مثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه 4 cm :

طول ارتفاع المثلّث:

$$h = a\frac{\sqrt{3}}{2} = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

مساحة المثلّث:

$$S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = (4)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 16 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

c مثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه 6 cm :

طول ارتفاع المثلّث:

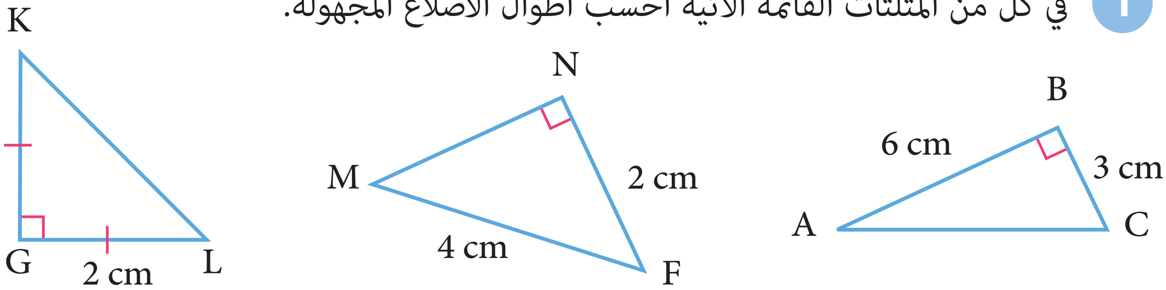
$$h = a\frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$$

مساحة المثلّث:

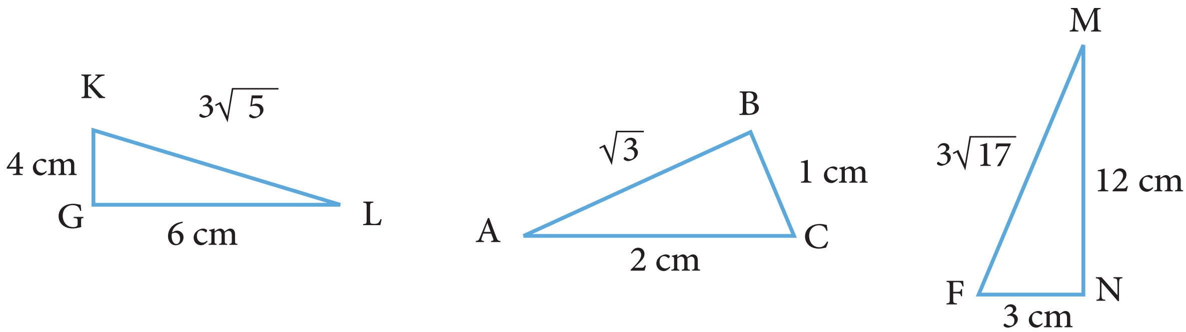
$$S = a^2\frac{\sqrt{3}}{4} = (6)^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 36 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

35 – 40 دقيقة

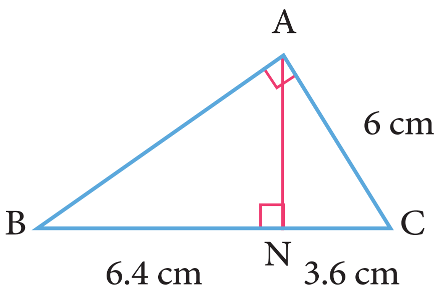
1 في كل من المثلّثات القائمة الآتية احسب أطوال الأضلاع المجهولة.



2 في كل من الحالات الآتية بيّن إذا ما كان المثلّث قائماً أم لا، وإذا ماكان قائماً حدد وتره.



3 تأمل الشكل ثم احسب كلاً من الطولين:
AB و AN.



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

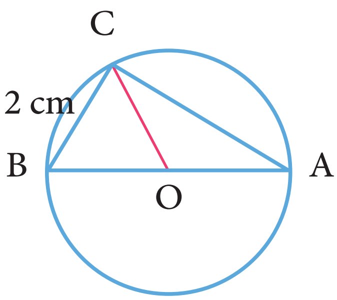
4 في الشكل [AB] قطر في الدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 2 cm و المطلوب:

a. ما طبيعة كلٍّ من المثلّثين ABC و BOC.

b. احسبْ الطول AC.

c. احسبْ مساحة المثلّث BOC.

d. ما بُعدُ النقطة A عن المستقيم (BC).



....

....

....

....

....

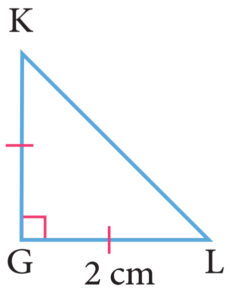
....

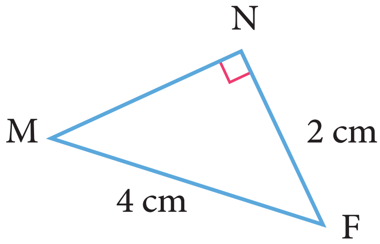
....

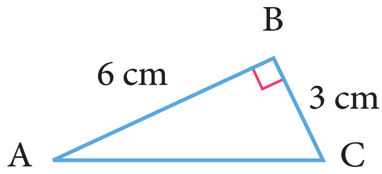
....

أتحقّق من إجابتي

1 في كل من المثلّثات القائمة الآتية احسب أطوال الأضلاع المجهولة.







- في المثلّث ABC الضلع المجهولة هي الوتر [AC]، حسب مبرهنة فيثاغورث:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = (6)^2 + (3)^2 = 36 + 9 = 45$$

$$AC = \sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{9}\,\sqrt{5} = 3\sqrt{5}\ \text{cm}$$

- في المثلّث MNF الضلع المجهولة هي الضلع القائمة MN، حسب مبرهنة فيثاغورث:

$$MN^2 = MF^2 - NF^2$$

$$MN^2 = (4)^2 + (2)^2 = 16 + 4 = 20$$

$$MN = \sqrt{20} = \sqrt{5 \times 4} = \sqrt{5}\,\sqrt{4} = 2\sqrt{5}\ \text{cm}$$

- المثلّث KGL قائم ومتساوي الساقين في G إذاً: $GK = GL = 2\ \text{cm}$

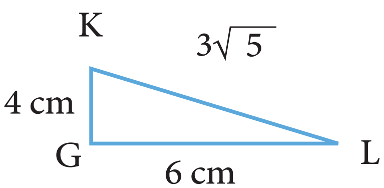
حسب مبرهنة فيثاغورث:

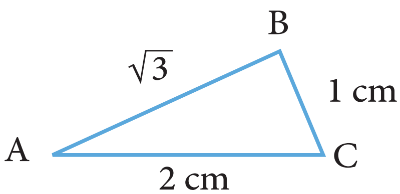
$$KL^2 = GK^2 + GL^2$$

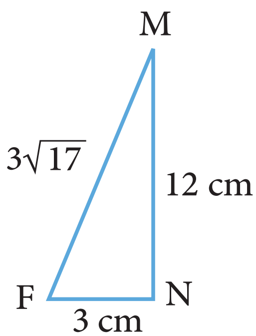
$$KL^2 = (2)^2 + (2)^2 = 4 + 4 = 8$$

$$KL = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4}\,\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ \text{cm}$$

2 في كل من الحالات الآتية بيّن إذا ما كان المثلّث قائماً أم لا، وإذا ماكان قائماً حدد وتره.







- في المثلّث MNF أطول أضلاع المثلّث هو: $[FM] = 3\sqrt{17}$ مربّعه هو:

$$FM^2 = (3\sqrt{17})^2 = 3\sqrt{17} \times 3\sqrt{17} = 9 \times 17 = 153$$

مجموع مربّعي الضلعين الآخرين هو:

$$FN^2 + NM^2 = (3)^2 + (12)^2 = 9 + 144 = 153$$

نستنتج أن: $FN^2 + NM^2 = FM^2$

فالمثلّث قائم حسب مبرهنة فيثاغورث العكسية وتره هو الضلع الأطول فهو [FM] فالمثلّث قائم في N.

- أطول أضلاع المثلّث هو: $AC = 2$ مربّعه هو :

$$AC^2 = (2)^2 = 4$$

مجموع مربّعي الضلعين الآخرين هو:

$$AB^2 + BC^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 3 + 1 = 4$$

نستنتج أن: $AB^2 + BC^2 = AC^2$

فالمثلّث قائم حسب مبرهنة فيثاغورث العكسية وتره هو الضلع الأطول فهو [AC] فالمثلّث قائم في B.

- أطول أضلاع المثلّث هو: $KL = 3\sqrt{5}$ مربّعه هو :

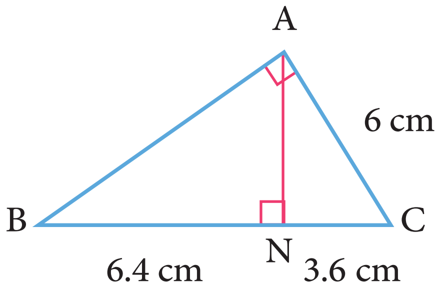
$$KL^2 = (3\sqrt{5})^2 = (3)^2 \times (\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$$

مجموع مربّعي الضلعين الآخرين هو:

$$KG^2 + GL^2 = (4)^2 + (6)^2 = 16 + 36 = 52$$

نستنتج أن: $FN^2 + NM^2 \neq FM^2$

فالمثلّث ليس قائماً حسب مبرهنة فيثاغورث العكسية.



3 تأمل الشكل ثم احسب كلاً من الطولين:
AB و AN.

- حساب الطول AB:

نلاحظ أن [AB] هو طول ضلع قائمة في المثلّث القائم ABC.

ولدينا: $BC = 6.4 + 3.6 = 10 \text{ cm}$

وفي هذا المثلّث عُلمَ طول الوتر والضلع القائمة الأخرى، إذاً حسب مُبرهنة فيثاغورث:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2$$
$$AB^2 = (10)^2 - (6)^2 = 100 - 36 = 64$$
$$AB = \sqrt{64} = 8\ cm$$

- حساب الطول AC:

نلاحظ أن [AN] هو طول ضلع قائمة في المثلّث القائم ANC.
وفي هذا المثلّث عُلم طول الوتر والضّلع القائمة الأخرى إذاً حسب مبرهنة فيثاغورث:

$$AN^2 = AC^2 - NC^2$$
$$AN^2 = (6)^2 - (3.6)^2 = 36 - 12.96 = 23.04$$
$$AN = \sqrt{23.04} = \sqrt{\frac{2304}{100}} = \frac{\sqrt{2304}}{\sqrt{100}} = \frac{48}{10} = 4.8\ cm$$

طريقة ثانية لحساب الطول [AC]:
لنرمز بالرمز S لمساحة المثلّث ABC، لدينا:

$$S = \frac{[AB] \times [AC]}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = \frac{48}{2} = 24\ cm^2$$

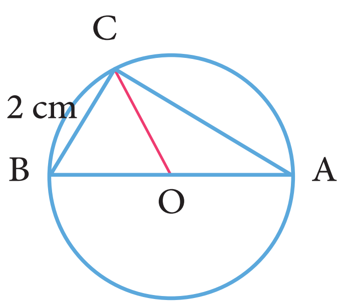
ولكن:

$$S = \frac{[BC] \times [AN]}{2} = \frac{10 \times [AN]}{2} = 5[AN]$$

نستنتج أن: $5AN = 24$ إذاً:

$$AN = \frac{24}{5} = 4.8\ cm$$

4 في الشكل [AB] قطر في الدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 2 cm و المطلوب:



a. ما طبيعة كلٍّ من المثلّثين ABC و BOC.
b. احسبْ الطول AC.
c. احسبْ مساحة المثلّث BOC.
d. ما بُعدُ النقطة A عن المستقيم (BC).

a. المثلّث ABC أحد أضلاعه وهو [AB] قطر في الدائرة المارّة برؤوسه فهو قائم وتره [AB] فهو قائم في C .
المثلّث BOC فيه $BO = CO = 2$ لأنهما أنصاف أقطار في الدائرة
وبما أن $BC = 2$ إذاً: $BO = CO = BC = 2$
فهو متساوي الأضلاع

b. حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلّث القائم ABC نكتب:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2$$

$$AC^2 = (4)^2 - (2)^2 = 16 - 4 = 12$$

إذاً:

$$AC = \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\ \text{cm}$$

c. مساحة المثلّث BOC:

$$S = (2)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

d. المثلّث ABC قائم في C إذاً:

بُعد النقطة A عن المستقيم (BC) هو الطول $AC = 2\sqrt{3}$ cm

أَلخّصُ درسي:

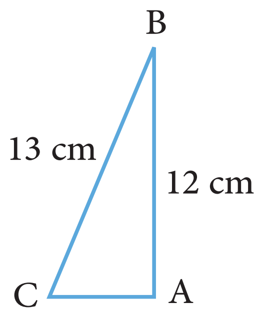
35 – 40 دقيقة

تعلّمت في درس مُبرهنة فيثاغورث- العكس:

أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:

☐ **مُبرهنة فيثاغورث واستعمالها.**

نستعمل مبرهنة فيثاغورث لحساب طول ضلع مجهولة في مثلّث قائم عُلم فيه طولا الضلعين الآخرين.



مثال:

حسب مُبرهنة فيثاغورث:

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (13)^2 - (12)^2 = 169 - 144 = 25$$

ومنه:

$$AC = \sqrt{25} = 5\ cm$$

☐ **مُبرهنة فيثاغورث العكسية واستعمالها.**

نستعمل مُبرهنة فيثاغورث العكسية في مثلّث عُلم فيه جميع أطوال أضلاعه لمعرفة إذا ما كان هذا المثلّث قائماً أم لا.

مثال:

ABC مثلّث أطوال أضلاعه $AB = 6\ cm$ و $BC = 8\ cm$ و $AC = 9\ cm$

$$AB^2 + BC^2 = 36 + 64 = 100$$

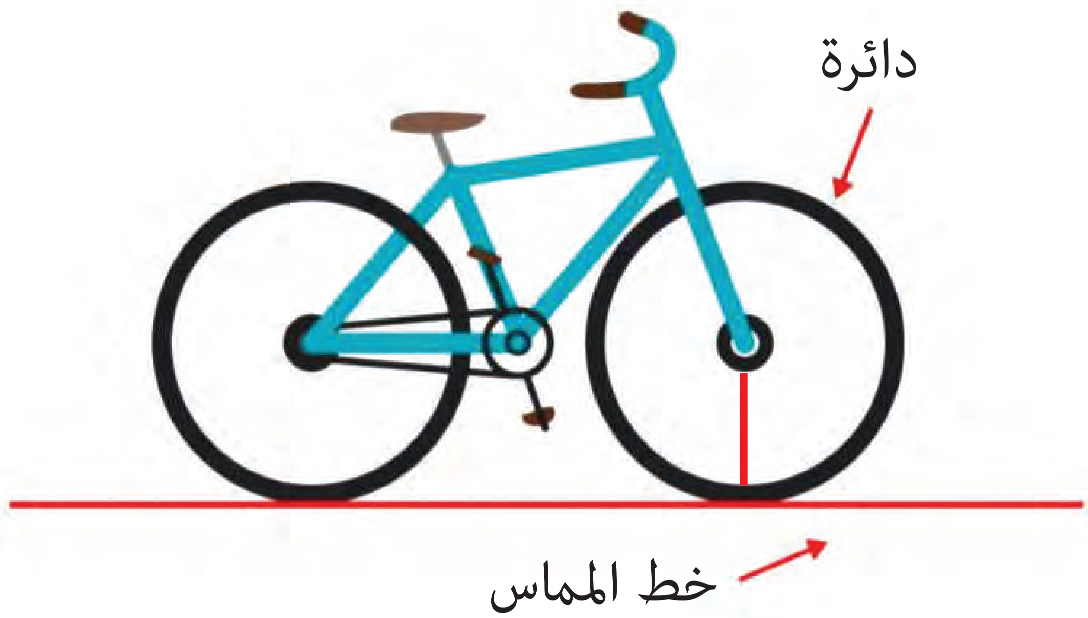
$$AC^2 = 81$$

$$AB^2 + BC^2 \neq AC^2$$

فالمثلّث ليس قائماً حسب مبرهنة فيثاغورث العكسية.

يمكنني كتابة أطوال أضلاع مثلّث والتّحقق فيما إذا كانت تشكّل أطوال أضلاع مثلّث قائم.

الدّرس الثالث: مماسّ دائرة



المماسّ

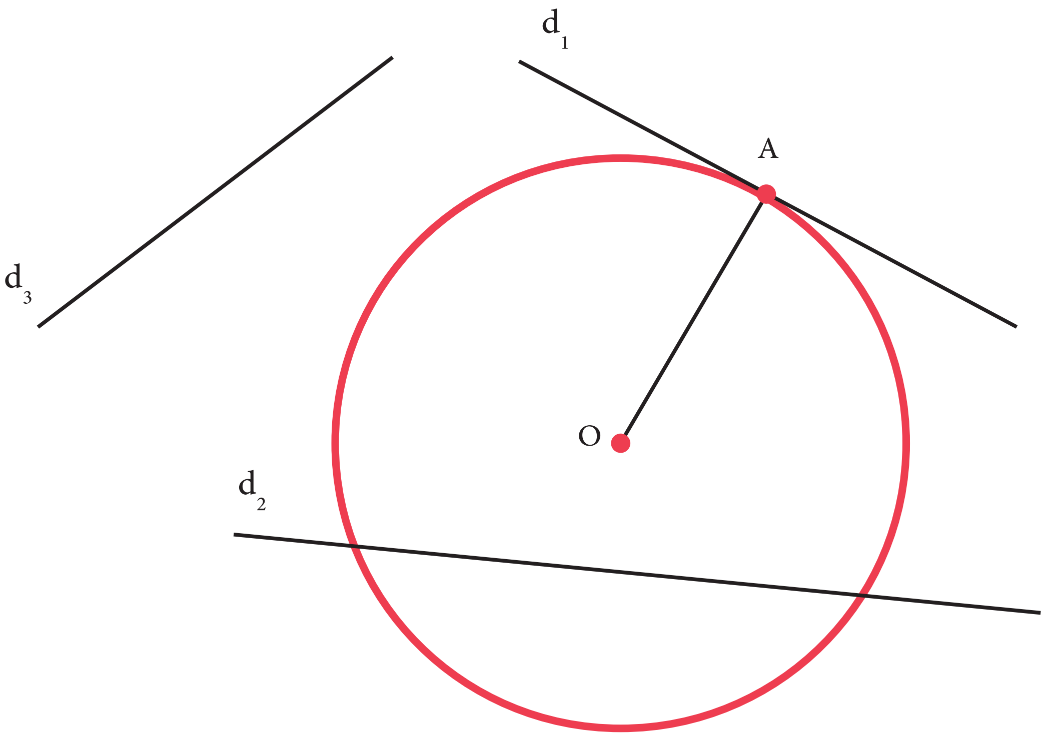
إنشاء دائرة مركزها نقطة تلاقي محاور المثلّث ونصف قطرها هو المسافة بين تلك النقطة و أحد رؤوسه، وإنشاء مماسّ دائرة.

من 45 دقيقة إلى 1 ساعة.

قلم   ممحاة   مسطرة   فرجار

هيّا بنا

ألاحظ الشكل وأملأ الجدول:



عدد النقاط المشتركة بين المستقيم و الدّائرة	اسم المستقيم
	d_1
	d_2
	d_3

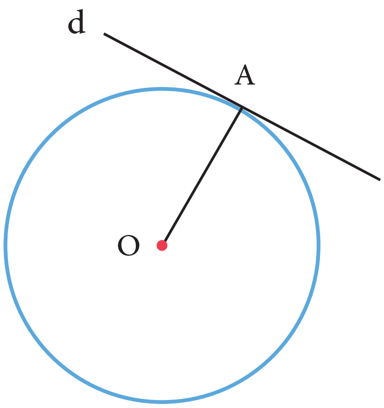
النشاط 1: مماسّ دائرة

استنتاج خصائص المماسّ لدائرة.

من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

أضع إشارة (✓) في ◯ التي تشير إلى العبارة الصحيحة، كما في المثال المحلول:



a في الشّكل المستقيم (d) مماسّ للدّائرة في النقطة A:

◯ المستقيم d يشترك مع الدّائرة بنقطتين.

◯ المستقيم d لا يشترك مع الدّائرة بأي نقطة.

✓ المستقيم d يشترك مع الدّائرة بنقطة واحدة.

b بُعد مركز الدّائرة عن المماسّ d :

◯ أكبر من نصف قطر الدّائرة.

◯ يساوي نصف قطر الدّائرة.

◯ أصغر من نصف قطر الدّائرة.

c المماسّ d :

◯ يعامد نصف القطر [OA] في النقطة A.

◯ يشكّل مع نصف القطر [OA] زاوية قياسها أصغر تماماً من 90°.

◯ يشكّل مع نصف القطر [OA] زاوية قياسها أكبر تماماً من 90°.

أتحقّق من إجابتي

b إذا كان بُعد مستقيم ما عن مركز الدّائرة يساوي نصف قطرها فالمستقيم مماسّ للدائرة.

c المماسّ d في نقطة A للدّائرة التي مركزها O ونصف قطرها R يُعامد نصف القطر OA في النقطة A

النشاط 2: خواص المماسّ لدائرة

تنظيم معلوماتي عن المماس لدائرة.

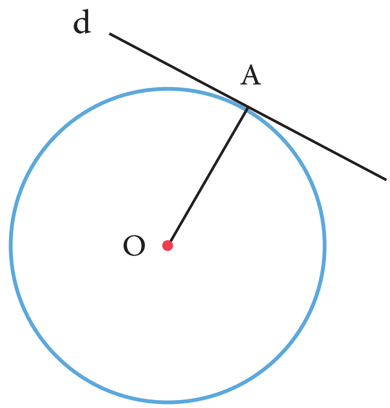
من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

أقرأ عن خواص المماسّ وأُثبّت معلوماتي ومعارفي:

ما المستقيم المماسّ لدائرة؟

هو مستقيم يشترك مع الدّائرة بنقطة واحدة.



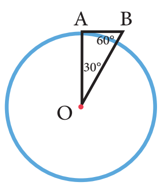
ما خصائص مماسّ لدائرة؟

- المماسّ لدائرة مركزها O ونصف قطرها R في نقطة A منها يعامد نصف القطر [OA] في النقطة A.
- بُعد المستقيم المماسّ لدائرة عن مركزها يساوي نصف قطرها.
- لإثبات أن مستقيماً ما d مماسّ لدائرة مركزها O في نقطة منها A.
  - نثبت أن المستقيم d يعامد نصف القطر (OA) في النقطة A.
  - نثبت أنّ المستقيم يشترك مع الدّائرة في النقطة A فقط.

مُماسّ الدائرة

مثال عن مستقيم مماسّ لدائرة:

في الشكل الآتي هل المستقيم (AB) مماسّ للدائرة؟



الحل: بما أن مجموع قياسات زوايا المثلّث OAB يساوي 180° إذاً:

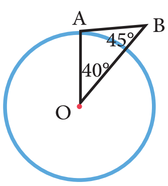
$OAB = 180 - (30 + 60) = 180 - 90 = 90°$

فالمثلّث OAB قائم في A فالمستقيم (AB) مماسّ للدائرة.

- أرسم دائرة ثم أرسم مماسها في نقطة A منها.

مثال عن مستقيم ليس مماسّاً لدائرة:

في الشكل الآتي هل المستقيم (AB) مماسّ للدائرة؟



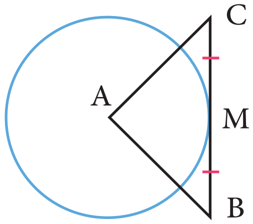
الحل: بما أن مجموع قياسات زوايا المثلّث OAB يساوي 180° إذاً:

$OAB = 180 - (45 + 40) = 180 - 85 = 95°$

فالمثلّث OAB ليس قائماً في A فالمستقيم (AB) ليس مماسّاً للدائرة.

35 – 40 دقيقة

1 في الشكل ABC مثلّث متساوي الساقين في A والنقطة M منتصف ضلعه [BC] أثبت أن المستقيم (BC) مماسّ للدائرة في M.



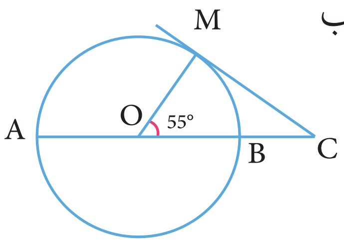
....

....

....

....

2 في الشكل المستقيم (MC) مماسّ للدائرة في M والمطلوب احسب قياس الزاوية OCM.



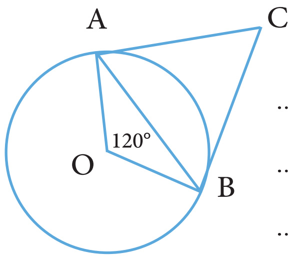
....

....

....

....

3 في الشكل ABC مثلّث متساوي الأضلاع أثبت أن المستقيمين (AC) و (BC) مماسّين للدائرة في A و B على الترتيب.



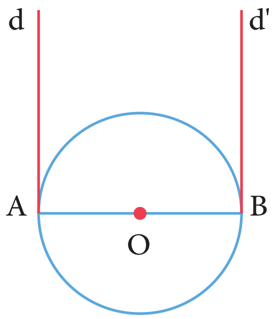
....

....

....

....

4 في الشكل المستقيمان d و 'd مماسّان للدائرة في A و B على الترتيب، أثبت أن المستقيمين d و 'd متوازيان.



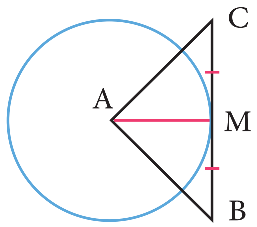
....

....

....

....

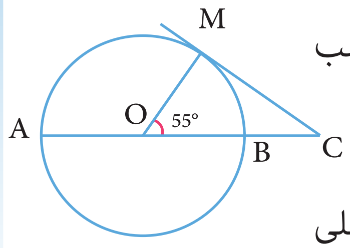
أتحقّق من إجابتي



1 في الشكل ABC مثلّث متساوي الساقين في A والنقطة M منتصف ضلعه [BC] أثبت أن المستقيم (BC) مماسّ للدائرة في M.

[AM] هو متوسط مرسوم من الرأس في المثلّث المتساوي الساقين فهو ارتفاع.

فالمستقيم (BC) عمودي على نصف القطر [AM] في النقطة M فهو مماسّ للدائرة في النقطة M



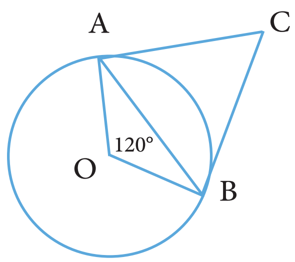
2 في الشكل المستقيم (MC) مماسّ للدائرة في M والمطلوب احسب قياس الزاوية $\widehat{OMC}$.

المستقيم (MC) مماسّ للدائرة في النقطة M فهو عمودي على نصف القطر [OM] في النقطة M

وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلّث OMC يساوي 180° إذاً:

$$\widehat{OMC} = 180 - (55 + 90) = 180 - 145 = 35°$$

3 في الشكل ABC مثلّث متساوي الأضلاع أثبت أن المستقيمين (AC) و (BC) مماسّين للدائرة في A و B على الترتيب.



المثلّث AOB متساوي الساقين في A لأن:

$$OA = OB = R$$

إذاً قياس كلٍّ من زاويتي القاعدة:

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \frac{180 - 120}{2} = \frac{60}{2} = 30°$$

ولدينا:

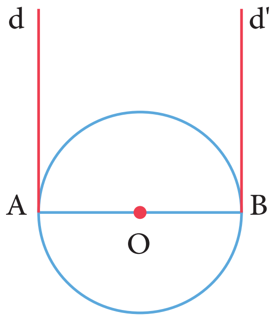
$$\widehat{CAB} = \widehat{CBA} = 60°$$

لأن المثلّث ABC متساوي الأضلاع إذاً:

$$\widehat{CAO} = \widehat{CBO} = 60° + 30° = 90°$$

فالمستقيمان (AC) و (BC) مماسّان للدائرة في A و B.

4 في الشكل المستقيمان d و 'd مماسّان للدائرة في A و B على الترتيب، أثبت أن المستقيمين d و 'd متوازيان.



المستقيم d مماسّ للدائرة في A فهو عمودي على القطر [AB] في A.
المستقيم 'd مماسّ للدائرة في A فهو عمودي على القطر [AB] في B.
نستنتج أن المستقيمين d و 'd متوازيان لأنهما عمودان على مستقيم واحد.

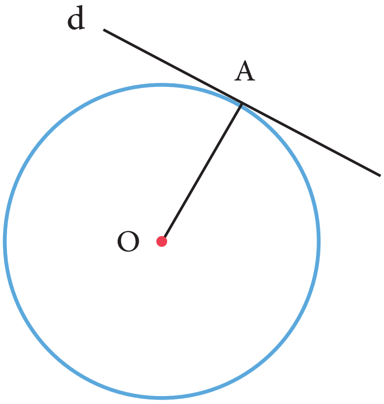
35 – 40 دقيقة

أَلخّصُ درسي:

تعلّمت في درس حساب مماسّ دائرة:

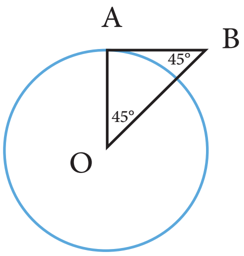
أضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:

☐ **تعريف المماسّ وخواصّه.**



- المماسّ هو مستقيم يشترك مع الدّائرة بنقطة واحدة.
- المماسّ لدائرة مركزها O ونصف قطرها R في نقطة A منها يعامد نصف القطر [OA] في النقطة A.

☐ **إثبات أن مستقيماً ما هو مماسّ لدائرة في نقطة منها.**



في الشكل المستقيم (AB) مماسّ للدائرة في A لأن:

$$\widehat{OAB} = 180° - (45° + 45°) = 180° - 90° = 90°$$

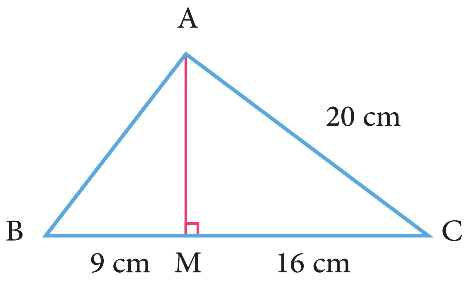
فالمثلّث OAB قائم في A فالمستقيم (AB) مماسّ للدائرة في A لانه عمودي على نصف القطر [OA] في A.

يمكنني رسم دائرة ووضع نقطة عليها ورسم مماسّ للدائرة مار من النقطة.

1 أتأمّل الشّكل والمطلوب:

a. أحسب الطّولين [AM] و [AB].

b. ما طبيعة المثلّث ABC مع التّعليل؟



....

....

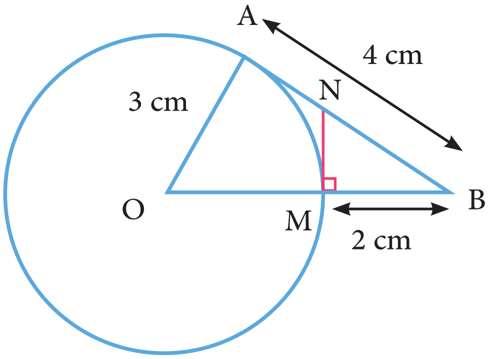
....

....

....

....

2 في الشّكل الآتي أثبت أنّ كلّاً من المستقيمين (AB) و (MN) مماسّ للدّائرة.



....

....

....

....

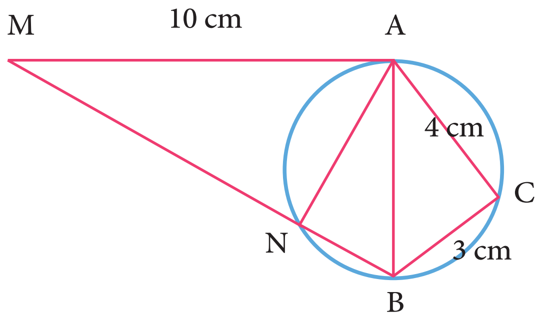
3 في الشّكل الآتي [AB] قطر في دائرة مركزها O:

a. ما طبيعة المثلّث ABC؟

b. أحسبْ نصف قطر الدّائرة.

c. أحسبْ طول [MB].

d. ما الدّور الّذي يلعبه المستقيم (AN) في المثلّث ABM؟



....

....

....

....

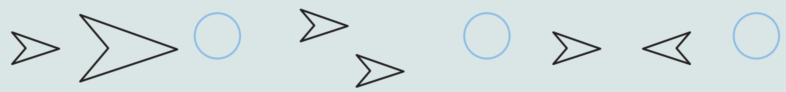
كيف أحب أن أتعلّم؟

في نهاية الوحدة أصبح بإمكاني تحديد الطّريقة الّتي ساعدتني أكثر في التّعلّم من خلال تلوين عدد من النُّجوم وفق ما يأتي:

ساعدتني كثيراً: ساعدتني: ساعدتني قليلاً:

أتعلّم بطريقة الاختيار من متعدِّد:

1. أجد الشكل وصورته في الحالة:

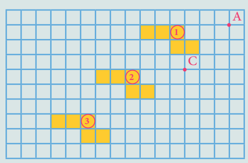


أتعلّم بطريقة الرَّسم:

2 أتأمّل الشّكل المجاور:

a. أرسم الشكل 2 صورة الشكل 1 وفق الانسحاب من A إلى C؟

b. أرسم صورة الشكل 2 وفق الانسحاب من A إلى C؟

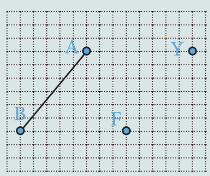


أتعلّم بطريقة كتابة الإجابة:

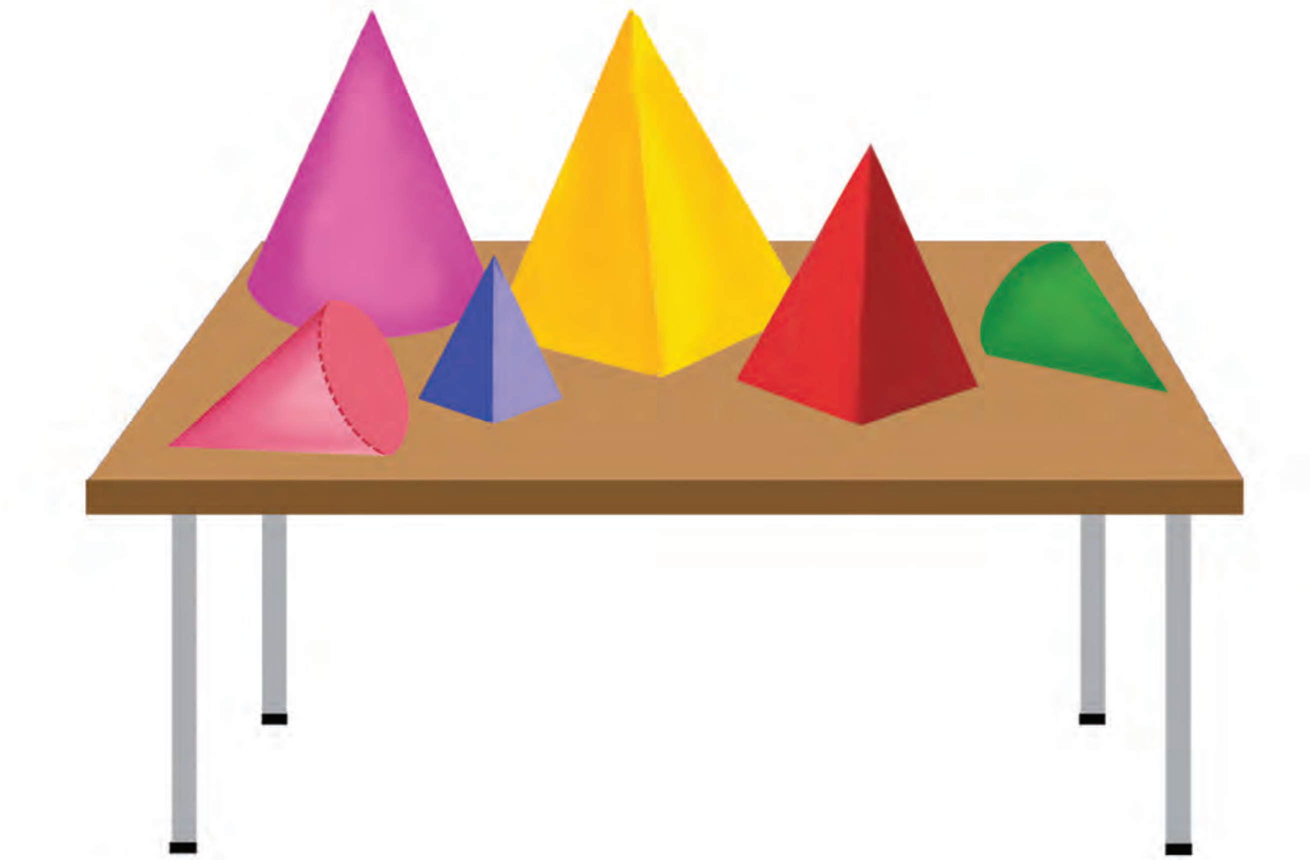
b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً ثم أملأ الفراغات:

1. صورة النّقطة y بانسحاب من A إلى B هي ....

2. الرّباعي .... متوازي أضلاع.



الوحدة الخامسة: الهرم والمخروط

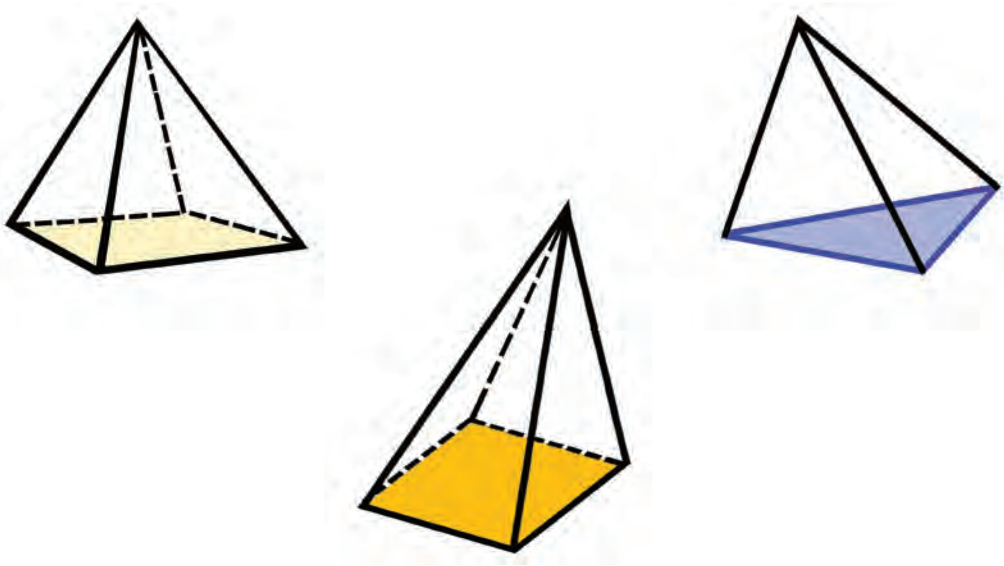


من 1:30 إلى 2:00 ساعة.

قبلَ أنْ تبدأَ دراسةَ هذهِ الوحدةِ، استعنْ بدليلِ "كيفَ أتعلّمُ؟" لتنظيمِ وقتِكَ وفقَ جداولِ توزيعِ المهامِّ الأسبوعيّةِ.
كما يمكنُكَ تقييمُ تَعلّمِكَ وصولاً لإتقانِ مهاراتِ التّعلّمِ في دراسةِ موادِّ منهاجِ التّعلّمِ التّمكينيِّ الآتيةِ: الرياضيّاتِ، واللُّغةِ العربيّةِ، وعلم الأحياء والفيزياء والكيمياء، واللغة الفرنسيّة، واللُّغةِ الإنكليزيّةِ.

دروس الوحدة

1 الهرم وحجمه



2 المخروط وحجمه

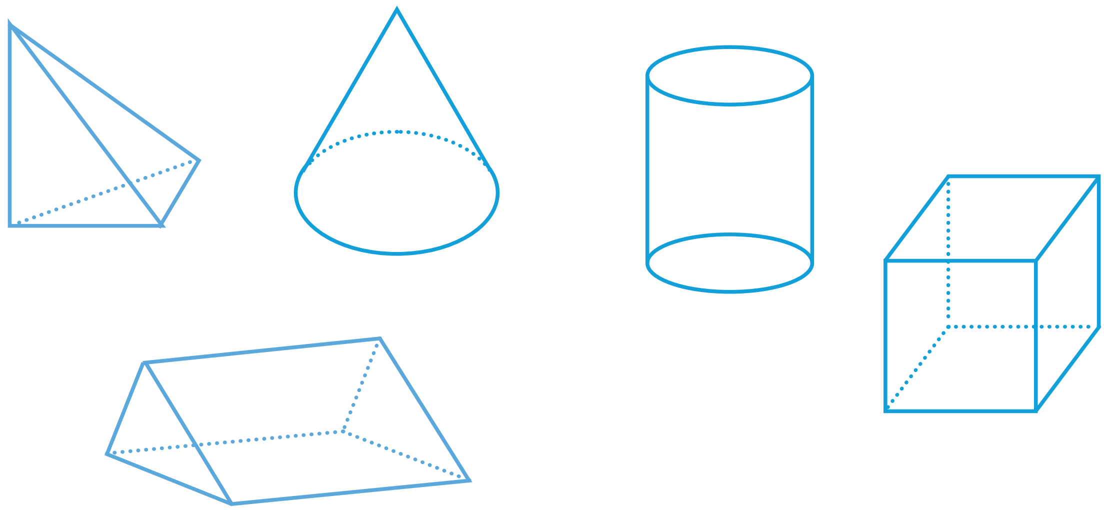
وصف المجسّمات

تحديد عدد الرؤوس والأوجه لبعض المجسّمات.

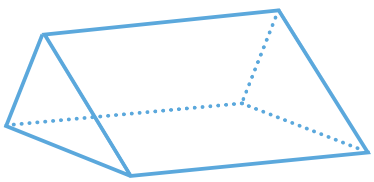
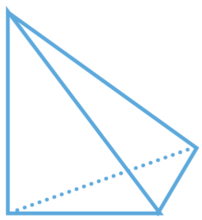
من 8 إلى 10 دقائق.

قلم ممحاة

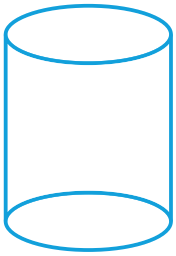
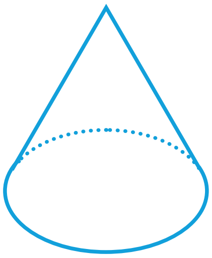
أملأ الجدولين السابقين بالأعداد المناسب:



a

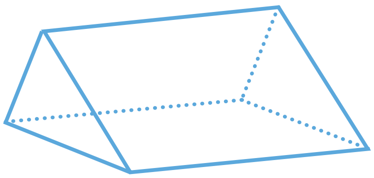
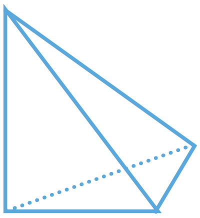
		
عدد الرؤوس	6	4
عدد الأوجه المتقابلة		
عدد الأوجه الجانبية		

b

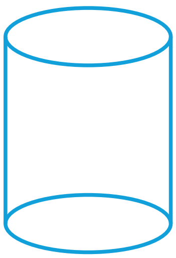
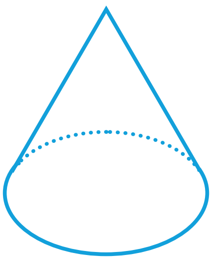
		
عدد الرؤوس		
عدد الأوجه المتقابلة		

أتحقّق من إجابتي

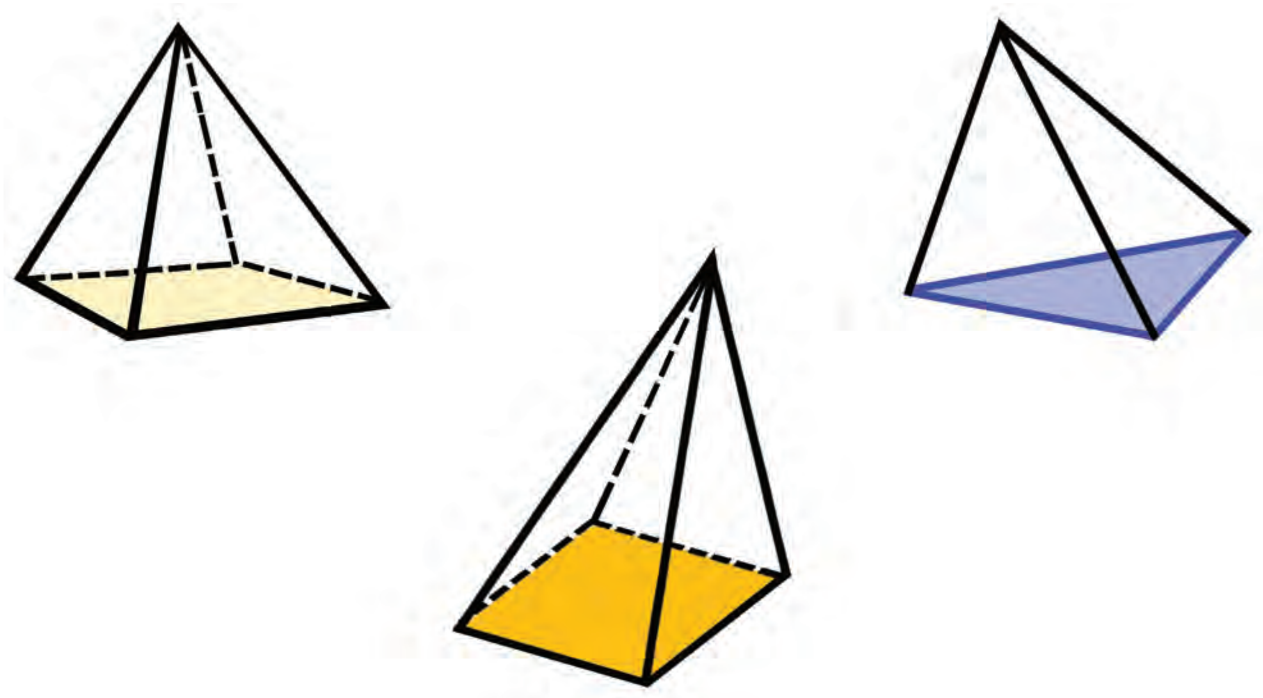
a

		
عدد الرؤوس	6	4
عدد الأوجه المتقابلة	2	0
عدد الأوجه الجانبية	3	3

b

		
عدد الرؤوس	0	1
عدد الأوجه المتقابلة	2	0

الدّرس الأول: الهرم وحجمه



هرم حجم هرم

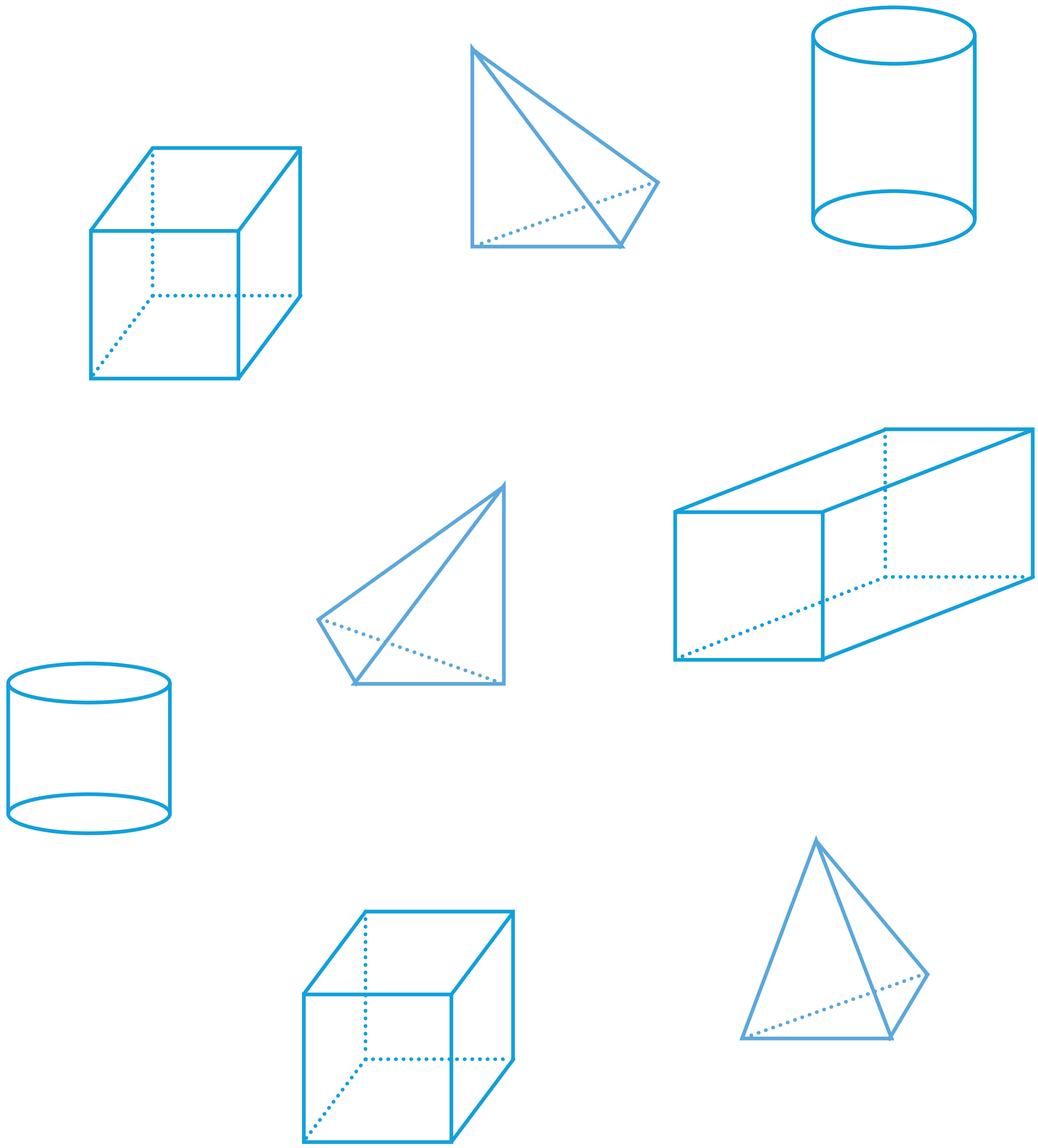
- وصف الهرم والمخروط الدوراني القائم ورسْم المجسّمات كما يراها من مختلف المواقع وصنعها اعتماداً على المخططات.
- اكتشاف حجم الهرم والمخروط الدوراني القائم اعتماداً على حجم الموشور الرباعي القائم والأسطوانة الدورانية.

من 1:15 إلى 1:30 ساعة.

قلم ممحاة

هيّا بنا

أتأمّل المجسّمات التالية، ثمّ أشير إلى الأهرامات:



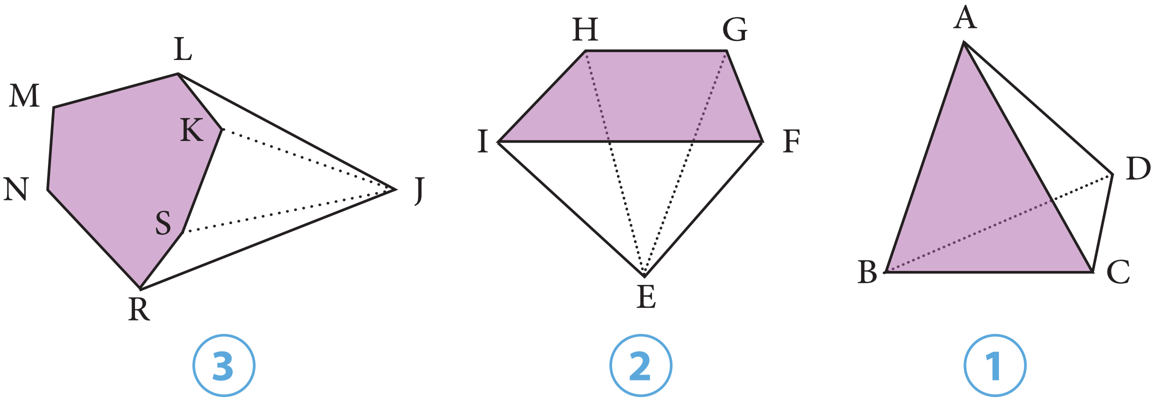
النشاط 1: أصفُ الهرم

التعرّف على الهرم ووصفه.

من 13 إلى 15 دقيقة.

قلم ممحاة

أتأمّل الأشكال المرسومة والتي تمثل ثلاثة أهرامات ثم أملأ الجدول، كما في المثال المحلول.

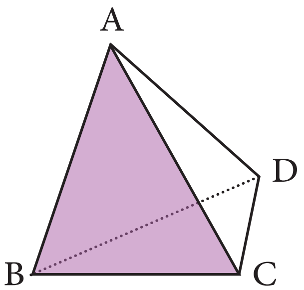


رقم الهرم	1	2	3
اسم القاعدة			KLMNRS
اسم الرأس			J
عدد الأوجه الجانبية			6
عدد الأحرف			12

أتحقّق من إجابتي

1 الهرم مجسّم يتميز بالخصائص الآتية:

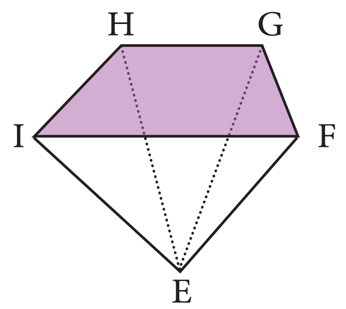
- أحد أوجهه مُضلّع يُسمّى القاعدة.
- نقطة لا تنتمي لمستوي هذا الوجه تُسمّى رأس الهرم.
- أوجهه الجانبية مثلّثات.



- في الشكل 1 قاعدة هذا الهرم هي مثلّث فيمكن اعتبار أي وجه قاعدة إذا اعتبرنا ABC قاعدة الهرم فرأسه هو D .

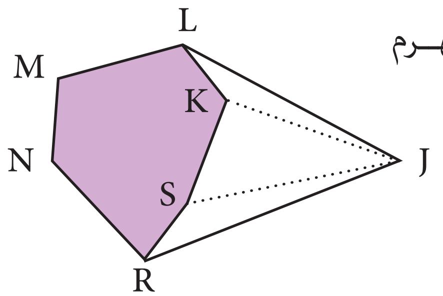
عدد الأوجه الجانبية للهرم يساوي عدد أضلاع قاعدته فعددها 3.

عدد أحرف الهرم هو عدد أحرف القاعدة مضافاً إليه عدد الأحرف الجانبية فعددها 6 أحرف.



2 لا يمكن اعتبار إلا الوجه FGHI قاعدة للهرم فرأسه هو النقطة E.

عدد أوجهه الجانبية 5 وعدد أحرفه 8.



3 لا يمكن اعتبار إلا الوجه KLMNRS قاعدة للهرم فرأسه هو النقطة J.

عدد أوجهه الجانبية 6 وعدد أحرفه 12.

النشاط 2: الهرم وحجمه

تنظيم معلوماتي عن الهرم وخصائصه.

من 13 إلى 15 دقيقة.

قلم ممحاة

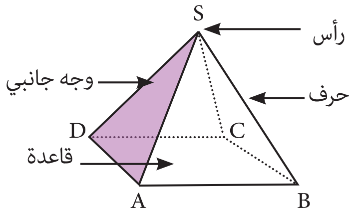
أقرأ عن الهرم وخصائصه ثم أُثبّت معلوماتي ومعارفي عن الهرم:

الهرم المنتظم

ما الهرم المنتظم؟

الهرم المنتظم: نقول إنَّ هرماً رأسه S هو هرم منتظم، إذا استوفى الشرطين:

- قاعدته P مُضلّع منتظم مركزه O (مثلّث متساوي الأضلاع أو مربّع أو ...)
- ارتفاعه القطعة المستقيمة [SO] (الواصلة بين رأس الهرم ومركز القاعدة)

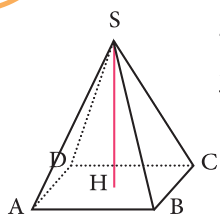


ما صفات الهرم؟

الأوجه الجانبية لهرمٍ منتظم هي مثلّثات متساوية الساقين في S، وهي طبوقة.

مثال عن هرم منتظم:

أحسبُ حجم هرم قاعدته مربّع طول ضلعه 3 cm وارتفاعه 5 cm



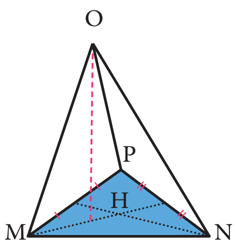
نحسب مساحة القاعدة :

$S = [3]^2 = 9\ cm^2$

$$V = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3}(9)(5) = 3 \times 5 = 15\ cm^2$$

- أرسم هرماً أعلم أطوال أضلاعه وأحسب حجمه.

مثال عن هرم ليس منتظماً:



في الشكل قاعدة الهرم مثلّث متساوي الأضلاع وهذا الشكل لا يمثّل هرماً منتظماً لأن قاعدته مضلّع منتظم مركزه H رأس الهرم O لكنّ ارتفاعه ليس [OH] فهو لا يحقق أحد شرطي الهرم المنتظم.

النشاط 3: حجم الهرم

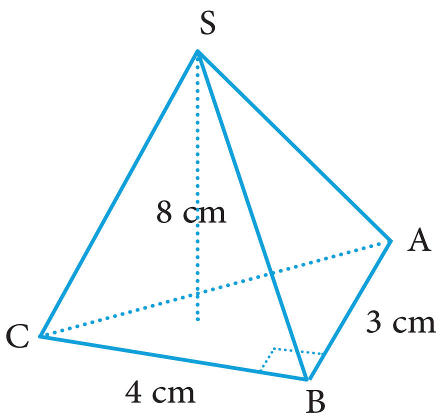
حساب حجم الهرم.

من 18 إلى 20 دقيقة.

قلم ممحاة

ألاحظ الأشكال التي تمثل أهرامات مختلفة، ثم أضع ✓ في ◯ التي تمثل الإجابة الصحيحة ثم أحسب حجم الهرم، كما في المثال المحلول:

a نوع القاعدة ومساحتها:



◯ مثلّث: $S = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$

◯ متوازي الأضلاع: $S = \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

◯ معيّن: $S = \frac{\text{جداء القطرين}}{2}$

◯ مثلّث متساوي الاضلاع: $S = \frac{(\text{طول الضلع})^2\sqrt{3}}{4}$

✓ مثلّث قائم: $S = \frac{\text{جداء القائمين الضلعين}}{2}$

◯ مستطيل: $S = \text{الطول} \times \text{العرض}$

◯ مربّع: $S = (\text{طول الضلع})^2$

قاعدة الهرم هي مثلّث قائم عُلِمَ طولا ضلعيه القائمتين $AB = 3\text{ cm}$ و $CB = 4\text{ cm}$

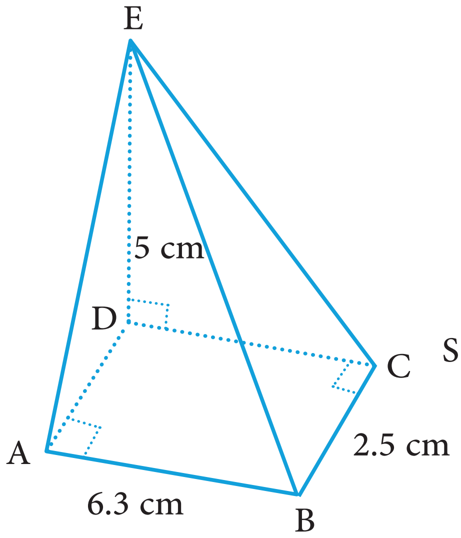
ونعلم أنّ: $\frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2} = \text{مساحة المثلّث القائم}$

$$S = \frac{BC \times AM}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{ cm}^2$$

$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ارتفاع الهرم}$

$$v = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3} \times 6 \times 8 = \frac{48}{3} = 16\text{ cm}^3$$

b نوع القاعدة ومساحتها:



- ◯ مثلّث: $S = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$
- ◯ متوازي الأضلاع: $S = \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$
- ◯ معيّن: $S = \frac{\text{جداء القطرين}}{2}$
- ◯ مثلّث متساوي الاضلاع: $S = \frac{\sqrt{3}\,(\text{طول الضلع})^2}{4}$
- ◯ مثلّث قائم: $S = \frac{\text{جداء القائمين الضلعين}}{2}$
- ◯ مستطيل: $S = \text{الطول} \times \text{العرض}$
- ◯ مربّع: $S = (\text{طول الضلع})^2$

....

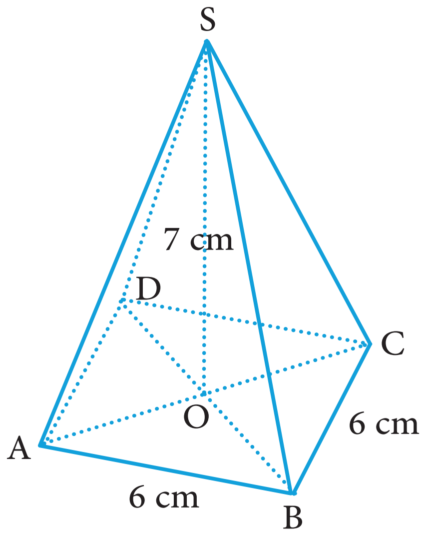
....

S = ...

....

v = ...

c نوع القاعدة ومساحتها:



مثلّث: $S = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$

متوازي الأضلاع: $S = \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

معيّن: $S = \frac{\text{جداء القطرين}}{2}$

مثلّث متساوي الاضلاع: $S = \frac{\sqrt{3}\,(\text{طول الضلع})^2}{4}$

مثلّث قائم: $S = \frac{\text{جداء القائمين الضلعين}}{2}$

مستطيل: $S = \text{الطول} \times \text{العرض}$

مربّع: $S = (\text{طول الضلع})^2$

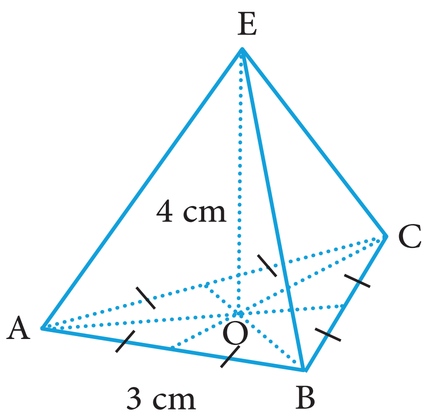
....

S = ...

....

v = ...

d نوع القاعدة ومساحتها:



مثلّث: $S = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{القاعدة}}{2}$

متوازي الأضلاع: $S = \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

معيّن: $S = \frac{\text{جداء القطرين}}{2}$

مثلّث متساوي الاضلاع: $S = \frac{\sqrt{3}\,(\text{طول الضلع})^2}{4}$

مثلّث قائم: $S = \frac{\text{جداء القائمين الضلعين}}{2}$

مستطيل: $S =$ الطول × العرض

مربّع: $S =$ (طول الضلع) ^{2}

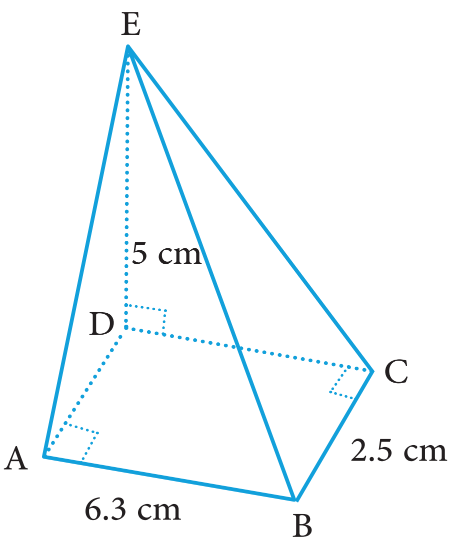
....

$S =$ ....

....

$v =$ ....

أتحقّق من إجابتي



b

قاعدة الهرم هي مستطيل بُعداه: $AB = 6.3\ cm$

و $[CB] = 2.5\ cm$

ونعلم أنّ:

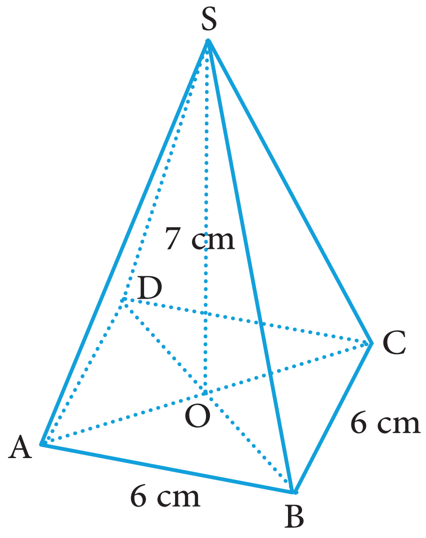
المستطيل مساحة=بُعديه جداء =العرض ×الطول

إذاً :

$S = AB \times BC = 6.3 \times 2.5 = 15.75\ cm^2$

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ × مساحة القاعدة × ارتفاع الهرم

$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times 6.3 \times 2.5 \times 5 = 26.25\ cm^3$



c قاعدة الهرم مربّع طول ضلعه $[AB] = 6\ cm$

ونعلم أنّ:

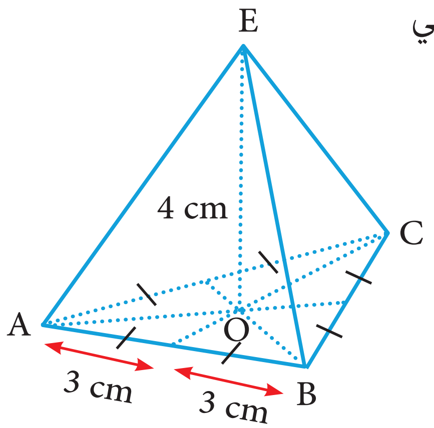
$$S = (\text{طول الضلع})^2$$

إذاً :

$$S = [AB]^2 = (6)^2 = 36\ cm^2$$

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ارتفاع الهرم}$$

$$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times 36 \times 7 = 12 \times 7 = 84\ cm^3$$



d اعتماداً على المعطيات المدوّنة على الشّكل: قاعدة الهرم هي مثلّث متساوي الأضلاع طول ضلعه $AB = 3 + 3 = 6\ cm$

ونعلم أن:

$$\text{مساحة المثلّث المتساوي الأضلاع} = \frac{(\text{طول الضلع})^2 \sqrt{3}}{4}$$

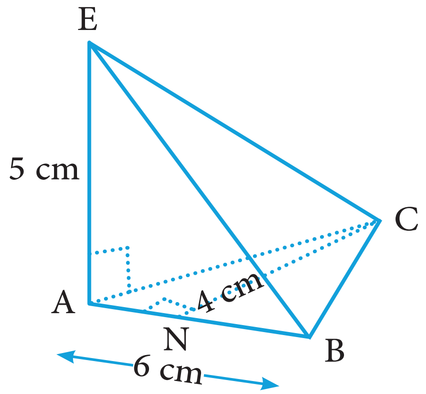
إذاً :

$$S = \frac{(\text{طول الضلع})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{(6)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{36 \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ارتفاع الهرم}$$

$$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times 4 = 3\sqrt{3} \times 4 = 12\sqrt{3}\ cm^3$$

1 احسبْ حجم الهرم الذي يمثّله الشّكل المرافق:



2 هرم منتظم قاعدته مربّع حجمه $250\ cm^3$ وطول ارتفاعه $10\ cm$ والمطلوب احسب مساحة قاعدته وطول ضلعه.

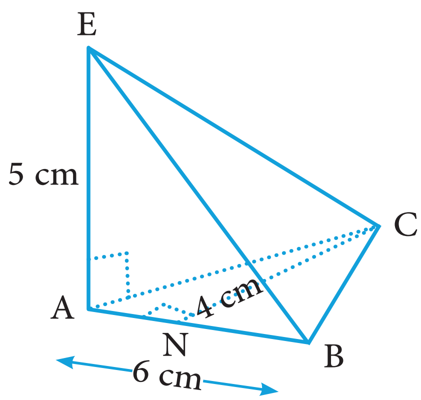
3 هرم حجمه $1024\ cm^3$ مساحة قاعدته $128\ cm^2$ احسب طول ارتفاعه.

4 احسب حجم هرم ارتفاعه $2.4\ cm$ وقاعدته مُعيّن طولا قطراه $4\ cm$ و $3.2\ cm$

5 هرم حجمه $240\ cm^3$ وقاعدته مستطيل بُعداه $8\ cm$ و $9\ cm$ احسبْ ارتفاعه.

أتحقّق من إجابتي

1 احسبْ حجم الهرم الذي يمثّله الشّكل المرافق:



القاعدة مثلّث طول أحد أضلاعه $[AB] = 6\text{ cm}$ وطول الارتفاع المتعلّق بهذا الضلع هو $[AB] = 6\text{ cm}$.

$$\text{مساحة المثلّث} = \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2} = \frac{[AB]\times[CN]}{2} = \frac{(6)\times(4)}{2} = \frac{24}{2} = 12\text{ cm}^2$$

$$v = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3} \times 12 \times 5 = 4 \times 5 = 20\text{ cm}^3$$

2 هرم منتظم قاعدته مربّع حجمه 250 cm^3 وطول ارتفاعه 10 cm والمطلوب احسب مساحة قاعدته وطول ضلعه.

$v = \frac{1}{3}S.h$ ومنه $3v = S.h$ ومنه $S = \frac{3v}{h}$ وبالتعويض:

$$S = \frac{3 \times 250}{10} = \frac{3 \times 25}{1} = 75\text{ cm}^2$$

$$\text{طول ضلع المربّع} = \sqrt{75} = \sqrt{25\times 3} = \sqrt{25}\sqrt{3} = 5\sqrt{3}\text{ cm}$$

3 هرم حجمه 1024 cm^3 مساحة قاعدته 128 cm^2 احسب طول ارتفاعه.

$v = \frac{1}{3}S.h$ ومنه $3v = S.h$ ومنه $h = \frac{3v}{S}$ وبالتعويض:

$$h = \frac{3 \times 1024}{128} = \frac{3 \times 8}{1} = 24\text{ cm}$$

4 احسب حجم هرم ارتفاعه 2.4 cm وقاعدته مُعيّن طولا قطراه 4 cm و 3.2 cm

القاعدة مُعيّن طولا قطريه 4 cm و 3.2 cm:

$$S = \frac{\text{جداء القطرين}}{2} = \frac{(3.2) \times (4)}{2} = 3.2 \times 2 = 6.4\ cm^2$$

$$v = \frac{1}{3}\,S.h = \frac{1}{3} \times 6.4 \times 2.4 = \frac{15.36}{3} = \frac{15.36 \times 100}{3 \times 100} = \frac{1536}{300} = 5.12\ cm^3$$

5 هرم حجمه $240\ cm^3$ وقاعدته مستطيل بُعداه 8 cm و 9 cm احسبْ ارتفاعه.

القاعدة مستطيل بُعداه 8 cm و 9 cm :

$$S = \text{العرض} \times \text{الطول} = 8 \times 9 = 72\ cm^2$$

$$h = \frac{3v}{S} = \frac{3 \times 240}{72} = \frac{720}{72} = 10\ cm$$

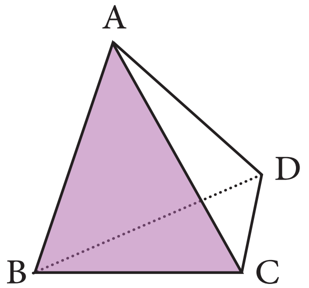
ألخّصُ درسي :

35 – 40 دقيقة

تعلّمت في درس الهرم وحجمه:

أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:

☐ الهرم: وهو المجسّم الذي يُميزه : مُضلّع يُسمى قاعدة الهرم و نقطة لا تنتمي إلى مستوي الهرم تُسمّى رأس الهرم.



☐ حجم الهرم: إذا رمزنا بالرمز v إلى حجم الهرم و بالرمز s إلى مساحة قاعدته وبالرمز h إلى ارتفاعه فحجم الهرم يُعطى بالدستور:

$$v = \frac{1}{3} S.h$$

احسب حجم هرم ارتفاعه 7 cm قاعدته مثلّث قائم أطوال أضلاعه 3 cm و 4 cm و 5 cm.

الحل:

القاعدة مُثلث قائم أطول أضلاعه هو الوتر وطوله 5 cm فطولا ضلعيه القائمتين 3 cm و 4 cm.

$$S = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = \frac{12}{2} = 6\ cm^2$$

$$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times 6 \times 7 = \frac{42}{3} = 14\ cm^3$$

يمكنني حساب حجم أحد أهرامات مصر.

الدّرس الثاني: المخروط وحجمه

مخروط حجم المخروط

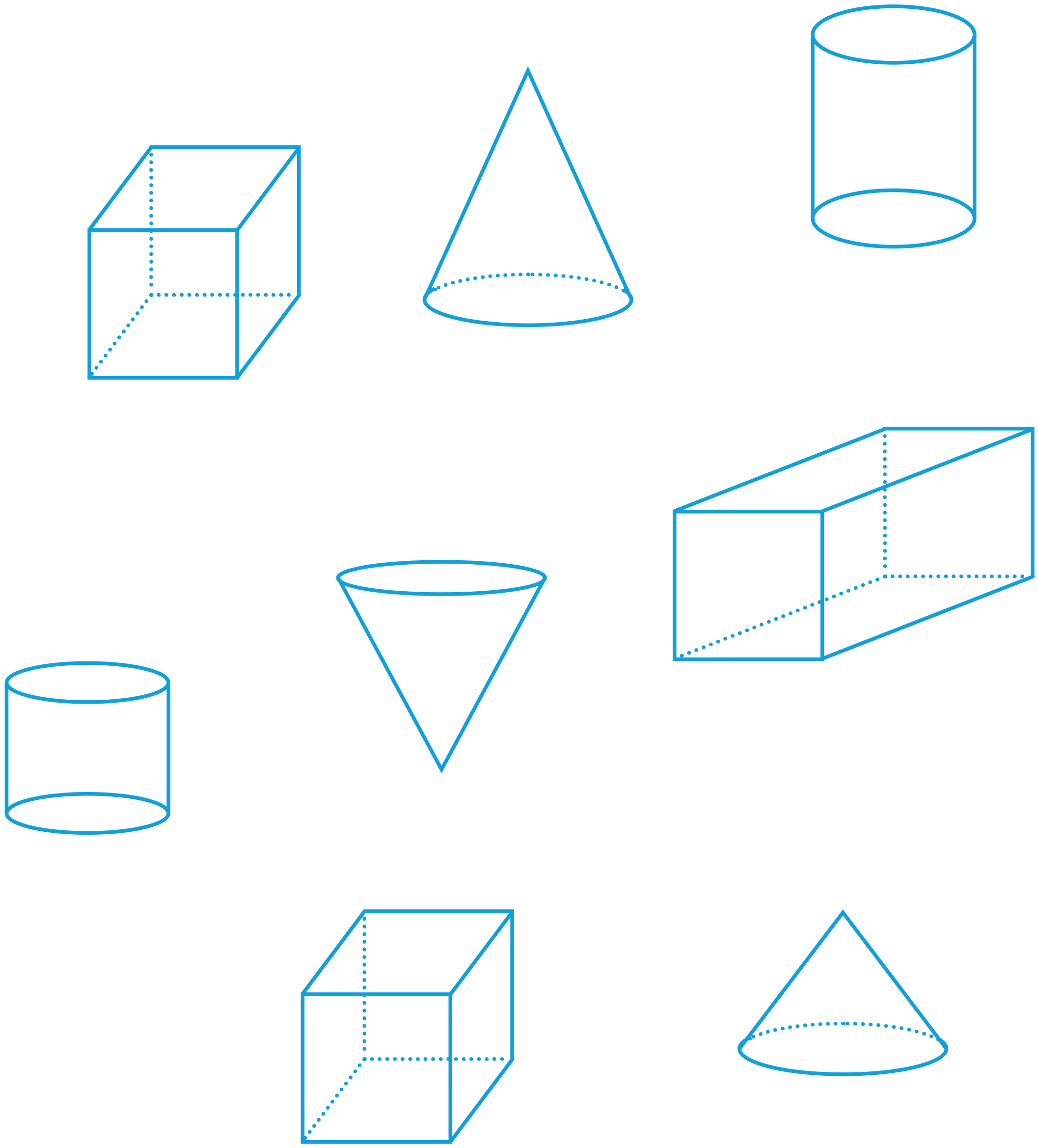
- وصف الهرم والمخروط الدّوراني القائم ورسْم المجسّمات كما يراها من مختلف المواقع وصنعها اعتماداً على المخططات.
- اكتشاف حجم الهرم والمخروط الدّوراني القائم اعتماداً على حجم الموشور الرباعي القائم والأسطوانة الدّورانية.

من 1:00 إلى 1:10 ساعة.

قلم ممحاة

هـيّا بنـا

أتأمّل المجسّمات، ثم أرسمُ دائرة حول المخاريط، ثمّ أسمي كل مجسّم أعلمُ اسمه:



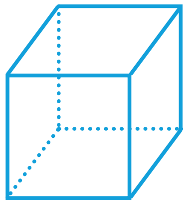
النشاط 1: أصفُ المخروط

التعرف على المخروط ووصفه.

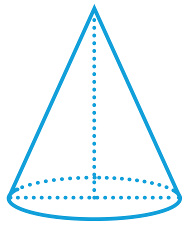
من 13 إلى 15 دقيقة.

قلم ممحاة

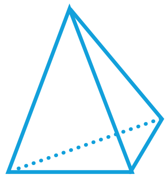
أتأمّل الأشكال المرسومة ثم أصل كل مجسّم بالعبارات المناسبة له:



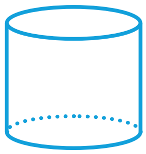
مجسّم فيه وجه واحد دائري الشكل



مجسّم جميع وجوهه مضلّعات

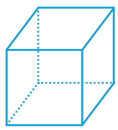


مجسّم سطحه الجانبي منحني

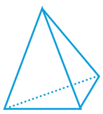


مجسّم فيه وجهان دائريان

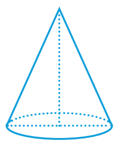
أتحقّق من إجابتي



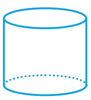
مجسّم جميع وجوهه مضلّعات



مجسّم جميع وجوهه مضلّعات



مجسّم فيه وجه واحد دائري الشكل وسطحه الجانبي منحني



مجسّم فيه وجهان دائريان وسطحه الجانبي منحني

النشاط 2: ما المخروط؟

تنظيم معلوماتي ومعارفي عن المخروط.

من 13 إلى 15 دقيقة.

قلم ممحاة

أقرأ عن المخروط وخواصّه، ثم أُثبّت معلوماتي ومعارفي عن المخروط:

المخروط الدوراني وحجمه

ما المخروط الدّوراني؟

المخروط الدّوراني هو مجسّم يتمتع بالخاصتين الآتيتين:

- فيه وجه دائري الشكل (دائرة أو قرص دائري) يُسمى قاعدة المخروط.
- فيه نقطة لا تنتمي لمستوي هذا الوجه تُسمّى رأس المخروط.

يتولّد المخروط من دوران مثلّث قائم حول أحد ضلعيه القائمتين حيث يمثل الضّلع الذي تم تدوير المثلّث حوله ارتفاع المخروط بينما يولد الضلع القائمة الأخرى قاعدة المخروط.

كيف أحسبُ حجم المخروط؟

حجم مخروط، وليكن V ، يساوي ثلث جداء ضرب مساحة قاعدته، ولتكن S بارتفاعه h .

$$v = \frac{1}{3} S.h$$

وإذا كانت نصف قطر قاعدته R كان:

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2.h$$

أمثلة أطبقُ فيها قانون حجم مخروط:

ما حجم مخروط نصف قطر قاعدته 6 cm وارتفاعه 5 cm؟

$$S = \pi r^2 = \pi(6)^2 = 36\pi\ cm^2$$

$$\text{حجم المخروط} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

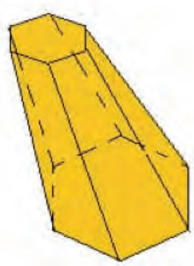
$$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 6$$

$$= 12\pi \times 6 = 72\pi\ cm^3$$

- ما حجم مخروط نصف قطر قاعدته 8 cm وارتفاعه 10 cm؟

أمثلة لا يمكنني أن أُطبّق فيها قانون حجم المخروط:

أحسبُ حجم المجسّم.



لا يمكنني تطبيق قانون حجم المخروط في حساب حجم هذا المجسّم.

النشاط 3: حجم المخروط

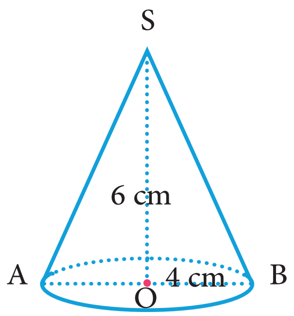
حساب حجم مخروط.

من 13 إلى 15 دقيقة.

قلم ممحاة

في كل ممّا يأتي أتأمّل المعطيات المدوّنة على الشكل أو أقرأ المعطيات ثم أحسب حجم المخروط، كما في المثال المحلول:

a أحسب حجم المخروط المبيّن في الشّكل



$$S = \pi r^2 = \pi(4)^2 = 16\pi\ cm^2$$

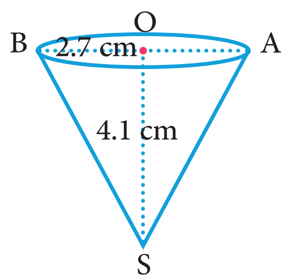
الارتفاع × مساحة القاعدة × $\frac{1}{3}$ = حجم المخروط

$$v = \frac{1}{3}\,S.h = \frac{1}{3} \times 16\ \pi \times 6 = 32\pi\ cm^3$$

ويمكن أن نكتب مباشرة:

$$v = \frac{1}{3}\,\pi r^2.h = \frac{1}{3} \times \pi \times (4)^2 \times 6 = \frac{1}{3} \times \pi \times 16 \times 6 = 32\pi\ cm^3$$

b أحسب حجم المخروط المبين في الشكل:



....

....

....

....

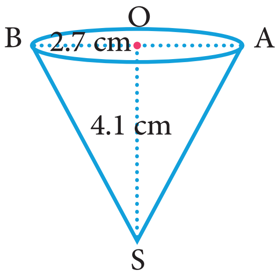
c أحسب حجم مخروط دوراني مساحة قاعدته $96\ cm^2$ وارتفاعه $4\ cm$.

....

d أحسب ارتفاع مخروط دوراني حجمه $12\ cm^2$ ومساحة قاعدته $4\ cm^2$.

....

أتحقّق من إجابتي



b

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3} \times \pi \times (2.7)^2 \times 4.1$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 2.7 \times 2.7 \times 4.1$$

$$= \pi \times 0.9 \times 2.7 \times 4.1 = 9.963\pi \text{ cm}^3$$

c

$$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times 96 \times 4 = 32 \times 4 = 128 \text{ cm}^3$$

d

$v = \frac{1}{3} S.h$ ومنه $3v = S.h$ ومنه $h = \frac{3v}{S}$ وبالتعويض:

$$h = \frac{3 \times 12}{4} = 9 \text{ cm}$$

35 – 40 دقيقة

1 أحسبُ حجم مخروط نصف قطر قاعدته 2.1 cm وارتفاعه 3 cm.

....

....

2 أحسبُ مساحة قاعدة مخروط دوراني حجمه $5.1\ cm^3$ وارتفاعه 1.7 cm

....

....

....

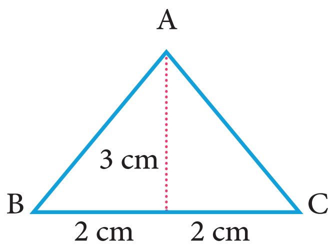
3 أحسبُ ارتفاع مخروط مساحة قاعدته $8\ cm^2$ وحجمه $6\ cm^3$.

....

....

....

4 ندور المثلّث المجاور حول (AN) دورة كاملة صف المجسّم المتولّد عن الدوران.



....

....

....

أتحقّق من إجابتي

1 أحسبُ حجم مخروط نصف قطر قاعدته 2.1 cm وارتفاعه 3 cm.

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2.h = \frac{1}{3} \times \pi \times (2.1)^2 \times 3 = 4.41\pi \text{ cm}^3$$

2 أحسبُ مساحة قاعدة مخروط دوراني حجمه 5.1 cm^3 وارتفاعه 1.7 cm

$v = \frac{1}{3} S.h$ ومنه $3v = S.h$ ومنه $S = \frac{3v}{h}$ وبالتعويض:

$$S = \frac{3 \times 5.1}{1.7} = \frac{15.3}{1.7} = \frac{153}{17} = 9 \text{ cm}^2$$

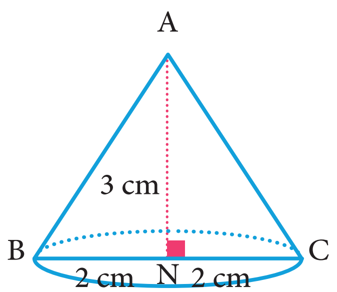
3 أحسبُ ارتفاع مخروط مساحة قاعدته 8 cm^2 وحجمه 6 cm^3.

$v = \frac{1}{3} S.h$ ومنه $3v = S.h$ ومنه $h = \frac{3v}{S}$ وبالتعويض:

$$h = \frac{3 \times 6}{8} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} = 2.25 \text{ cm}$$

4 ندور المثلّث المجاور حول (AN) دورة كاملة صف المجسّم المتولّد عن الدوران.

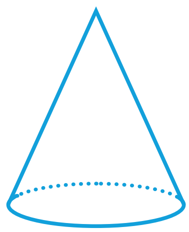
المجسّم هو مخروط مركز قاعدته N ونصف قطرها 2 cm وارتفاعه 3 cm.



تعلّمت في درس المخروط وحجمه:

أَضعُ إشارة (✓) ضمن ☐ أمام العبارات التي تعلّمتها في الدرس:

☐ المخروط الدّوراني هو مجسّم فيه وجه دائري الشكل يسمّى قاعدة المخروط ونقطة لا تنتمي إلى هذا الوجه تُسمّى رأس المخروط.



☐ حجم المخروط:

$$v = \frac{1}{3} S.h$$

وإذا كان نصف قطر قاعدته r كان:

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2.h$$

مثال: أحسب حجم مخروط نصف قطر قاعدته 9 cm وارتفاعه 8 cm.

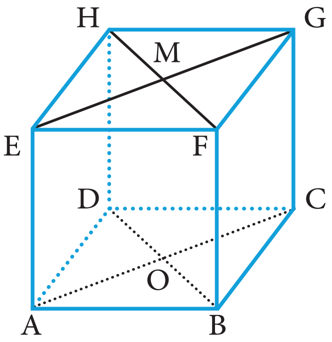
الحل:

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2.h = \frac{1}{3} \times \pi \times (9)^2 \times 8$$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 81 \times 8 = 27\pi \times 8 = 216\pi \text{ cm}^3$$

يمكنني تدوير مثلّث قائم حول أحد ضلعيه القائمتين وحساب حجمه.

1 في الشكل ABCDEFGH مكعّب طول حرفه 3 cm
باستخدام النقاط المبينة في الشكل فقط:
a. سمّ هرماً منتظماً واحسبْ حجمه.
b. سمّ هرماً قاعدته مثلّث قائم واحسبْ حجمه.
c. سمّ هرماً ليس منتظماً قاعدته مربّع واحسبْ حجمه.



....

....

....

2 هرمان حجماهما متساويان، قاعدة أحدهما مربّع طول ضلعه 9.3 cm و ارتفاعه 7.2 cm،
ارتفاع الهرم الآخر يساوي ثُلث ارتفاع الهرم الأول.
ما مساحة قاعدة الهرم الآخر؟

....

....

....

3 هرم ومخروط حجماهما متساويان وارتفاعهما متساويان، مساحة قاعدة المخروط $4\ cm^2$
وقاعدة الهرم مربّع.
احسب طول ضلع قاعدة الهرم.

....

....

....

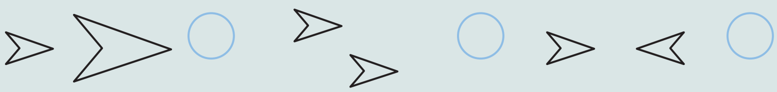
كيف أحب أن أتعلّم؟

في نهاية الوحدة أصبح بإمكاني تحديد الطّريقة الّتي ساعدتني أكثر في التّعلّم من خلال تلوين عدد من النُّجوم وفق ما يأتي:

ساعدتني كثيراً: ساعدتني: ساعدتني قليلاً:

أتعلّم بطريقة الاختيار من متعدِّد:

1. أجد الشكل وصورته في الحالة:

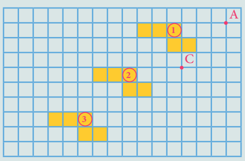


أتعلّم بطريقة الرَّسم:

2 أتأمّل الشّكل المجاور:

a. أرسم الشكل 2 صورة الشكل 1 وفق الانسحاب من A إلى C؟

b. أرسم صورة الشكل 2 وفق الانسحاب من A إلى C؟

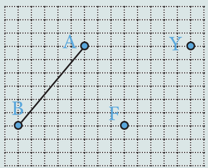


أتعلّم بطريقة كتابة الإجابة:

b أتأمّل الشكل المرسوم جانباً ثم أملأ الفراغات:

1. صورة النّقطة y بانسحاب من A إلى B هي ....

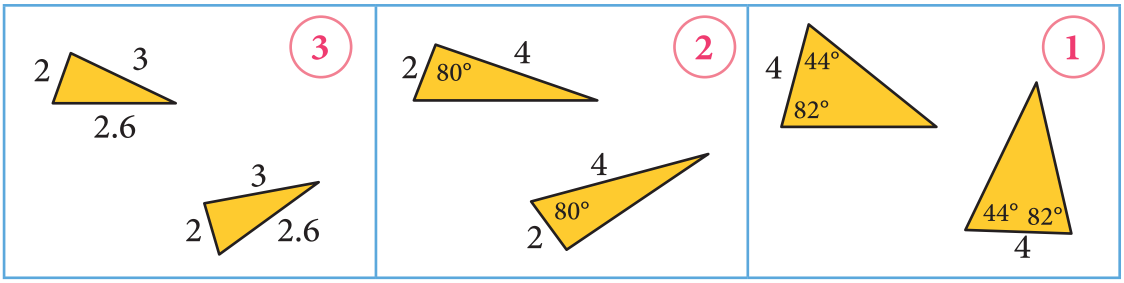
2. الرّباعي .... متوازي أضلاع.



حلول أوراق عمل الوحدات

أتحقّق من إجابتي

1 في كل حالة من الحالات الاتية على تطابق المثلّثين:

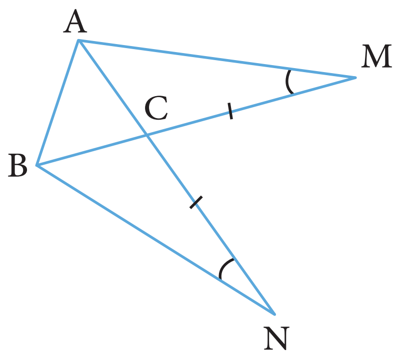


الشكل 1) حسب حالة ضلع وزاويتين مجاورتين له مع مقابلاتها من الثاني.

الشكل 2) حسب حالة ضلعين وزاوية محصورة بينهما مع مقابلاتها من الثاني.

الشكل 3) حسب حالة تساوي ثلاث أضلاع من الأول مع مقابلاتها من الثاني.

2 في الشكل المجاور:



a أثبت تطابق المثلّثين CNB و CMA.

- $CN = CM$ فرضاً.
- $\hat{N} = \hat{M}$ فرضاً.
- $\widehat{BCN} = \widehat{ACM}$ للتقابل بالرأس.

حسب حالة (زاوية – ضلع – زاوية) المثلّثان طبوقان ومن التطابق نجد: $AC = BC$.

b أثبت تطابق المثلّثين ANB و BMA.

- AB ضلع مشترك.
- $BN = AM$ من تطابق المثلّثين CNB و CMA.
- $AN = AC + CN = BC + CM = BM$.

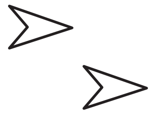
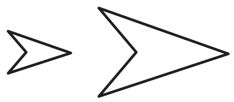
حسب حالة (ضلع – ضلع – ضلع) المثلّثان طبوقان.

c استنتج نوع المثلّث CBA.

$AC = BC$ فالمثلّث متساوي الساقين.

3 **لكل حالة من الحالات الاتيه اجابة واحدة صحيحة:**

1. نجد الشكل وصورته في الحالة:

○    ✓    ○ 

2. P نقطة غير واقعه على المستقيم (RS) ، Q صورة P وفق الانسحاب الذي ينقل R الى S عندئذ:

○ RSPQ متوازي أضلاع   ○ PQRS متوازي أضلاع   ✓ RSQP متوازي اضلاع

3. مساحة شكل F هي $20\ cm^2$ ، فإن مساحة الشكل 'F صورة الشكل F وفق الانسحاب هي:

○ أكبر من 20   ✓ 20   ○ أصغر من 20

4. ABC مثلّث قائم، فإن صورته وفق انسحاب:

○ مثلّث كيفي   ○ مثلّث متساوي الاضلاع   ✓ مثلّث قائم

5. D و Δ مستقيمان متوازيان فإن صورتهما وفق انسحاب هو:

○ مستقيمان متقاطعان   ✓ مستقيمان متوازيان   ○ مستقيمان متعامدان

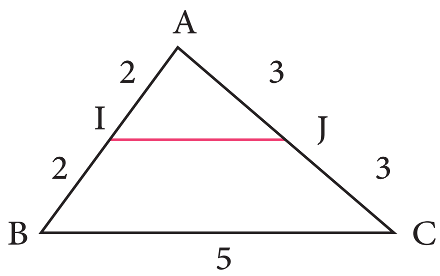
4 **أقول إن كنت موافق أم لا أمام الادعاءات التالية:**

1. d و 'd مستقيمان متوازيان، عندئذ يوجد انسحاب واحد فقط ينقل d إلى 'd. غير موافق
2. d و 'd مستقيمان متقاطعان، عندئذ لايوجد انسحاب ينقل d إلى 'd. موافق
3. المستقيم ('BM) صورة المستقيم (AM) وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى B عندئذ 'M صورة M وفق الانسحاب السابق. غير موافق
4. القطعة المستقيمة ['BM]صورة القطعة المستقيم [AM] وفق الانسحاب الذي ينقل A إلى Bعندئذ 'M صورة M وفق الانسحاب السابق. موافق

أتحقّق من إجابتي

1 أجيب بعبارة موافق أم غير موافق مع شرح الإجابة.

ABC مثلّث فيه I ، J نقطتان من الضلعين [AB]،[AC] و يحققان الأطوال الموضّحة بالشكل.



• (IJ) || (BC)

موافق لأنّ النّقطة I منتصف الضلع [AB] والنقطة J منتصف الضلع [AC] وحسب مُبرّهنة المنتصفات في مثلّث.

• IJ = BC = 5

غير موافق لأنّ القطعة [IJ] واصلة بين منتصفي ضلعين في مثلّث تساوي نصف طول الضلع الثالثة

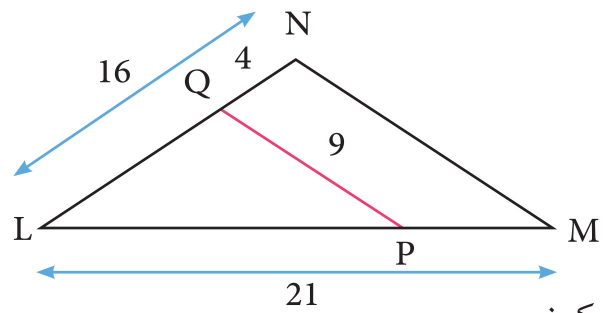
وحسب المبرهنة الأولى في المنتصفات يكون IJ = 2.5

2 أحلُّ المسألة التالية:

في الشكل المرافق: LMN مثلّث فيه:

(PQ) || (MN)

أحسب كلّاً من الأضلاع [MN] ، [LP]



حسب مبرهنة النسب الثلاث في مثلّث يكون :

$$\frac{LQ}{LN} = \frac{LP}{LM} = \frac{QP}{MN}$$

$$\frac{12}{16} = \frac{LP}{21} = \frac{9}{MN}$$

$$LP = \frac{12 \times 21}{16} = \frac{3 \times 21}{4} = \frac{63}{4}$$

$$MN = \frac{16 \times 9}{12} = \frac{4 \times 9}{3} = \frac{36}{3} = 12$$

أتحقّق من إجابتي

1 أملأ الفراغات التالية بما يناسبها:

a. المتوسط المتعلق بضلع في مثلّث: هو المستقيم الذي يصل بين رأس المثلّث ومنتصف الضلع المقابل لتلك الرأس.

b. إنّ منصّف الزاوية في مثلّث هو المستقيم الذي يصل بين رأس المثلّث ويقسم الزاوية إلى زاويتين قياسهما متساويان.

c. محور قطعة مستقيمة هو المستقيم الذي يعامد القطعة في منتصفها.

d. الارتفاع المتعلق بضلع في مثلّث هو المستقيم المرسوم من رأس المثلّث والعامود على الضلع المقابل لتلك الرأس.

2 أختارُ الأجابة الصحيحة في كل من العبارات التالية:

- إن نقطة تلاقي المحاور في المثلّث القائم تقع:

○ داخل المثلّث ○ خارج المثلّث ✓ في منتصف الوتر

- إن مركز الدائرة الماسة بأضلاع المثلّث هي نقطة تلاقي:

○ المحاور ✓ المنصّفات ○ المتوسطات

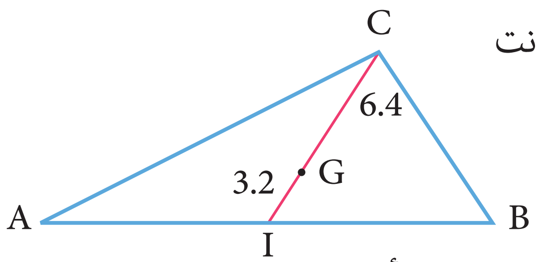
- إنّ مركز ثقل المثلّث هي نقطة تلاقي:

○ المنصّفات ✓ المتوسطات ○ المحاور

3 أتأمّلُ الشكل المجاور، ثم أبيّن فيما اذا كانت النقطة G مركز ثقل للمثلّث ABC.

$6.4 = 2(3.2)$ أي أنّ: $GC = 2GI$

ومنه النقطة G مركز ثقل.



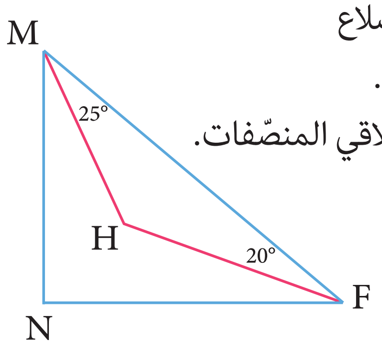
4 أتأمّلُ الشكل المجاور: بفرض H مركز الدائرة الماسة بأضلاع المثلّث MNF، ثم أحسب قياس الزاوية $\widehat{HMN}$ و $\widehat{MNF}$.

بما أنّ النقطة H مركز الدائرة الماسة للأضلاع فهي نقطة تلاقي المنصّفات.

$$\widehat{HMF} = \widehat{HMN} = 25$$

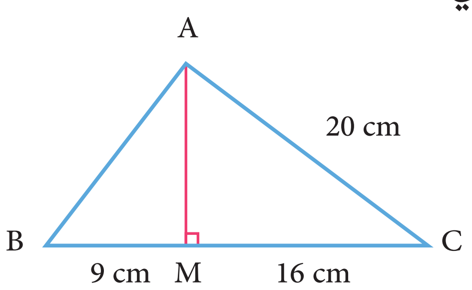
$$\widehat{MNF} = 180 - (50 + 40) = 90$$

لأن مجموع زوايا المثلّث 180.



أتحقّق من إجابتي

1 أتأمّل الشّكل والمطلوب:



a. أحسب الطّولين [AM] و [AB].

b. ما طبيعة المثلّث ABC مع التّعليل؟

a. حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلّث القائم AMC يكون:

$$AC^2 = AM^2 + MC^2$$

$$(20)^2 = AM^2 + (16)^2$$

$$400 = AM^2 + 256$$

ومنه $AM = 12$

حسب مبرهنة فيثاغورث في المثلّث القائم AMB يكون:

$$AB^2 = AM^2 + MB^2$$

$$AB^2 = (12)^2 + (9)^2 = 225$$

ومنه $AB = 15$

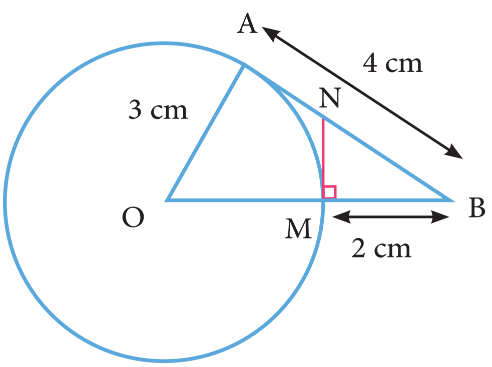
b. طبيعة المثلّث ABC:

$$BC^2 = (25)^2 = 625$$

$$AB^2 + AC^2 = 225 + 400 = 625$$

فحسب عكس مبرهنة فيثاغورث يكون ABC مثلّثاً قائماً في A.

2 في الشّكل الآتي أثبت أنّ كلّاً من المستقيمين (AB) و (MN) مماسّ للدّائرة.



$$OB = OM + MB = 3 + 2 = 5$$

$$OA^2 + AB^2 = (3)^2 + (4)^2 = 9 + 16 = 25$$

$$OB^2 = (5)^2 = 25$$

نستنتج أن:

$$OA^2 + AB^2 = OB^2$$

فالمثلّث OAB قائم في A حسب مبرهنة فيثاغورث العكسيّة.

نستنتج أن (AB)عمودي على نصف القطر [OA]في النّقطة A من الدائرة فهو مماسّ للدّائرة في النّقطة A.

المستقيم (MN)عمودي على نصف القطر [OM] في النّقطة M من الدّائرة فهو مماسّ للدائرة في النقطة M.

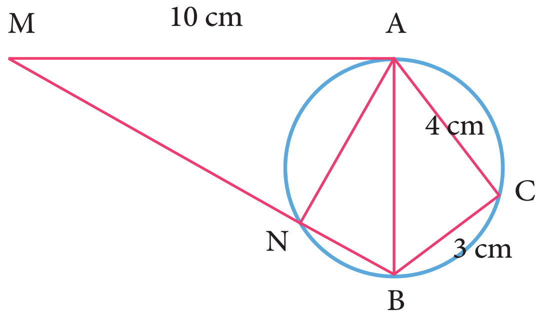
3 في الشّكل الآتي [AB] قطر في دائرة مركزها O:

a. ما طبيعة المثلّث ABC؟

b. احسبْ نصف قطر الدّائرة

c. احسبْ الطّول [MB]

d. مـا الـدّور الّذي يلعبه المسـتقيم (AN) في المثلّث ABM؟



a. المثلّث ABC قائم في $\hat{C}$ لأنّ أحد أضلاعه هو قطر للدّائرة المارّة برؤوسه.

b. حسب فيثاغورث في المثلّث القائم ABC:

$$[AB]^2 = [AC]^2 + [BC]^2$$

ومنه $AB = 5$ ونصف قطر الدائرة يساوي 2.5

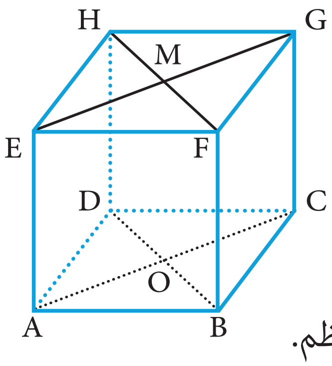
c. حسب فيثاغورث في المثلّث القائم ABM:

$$[MB]^2 = [AM]^2 + [AB]^2 = 100 + 25 = 125$$

$$MB = 5\sqrt{5}$$

d. AN ارتفاع في المثلّث ABM.

أتحقّق من إجابتي



1 في الشكل ABCDEFGH مكعّب طول حرفه 3 cm
باستخدام النقاط المبينة في الشكل فقط:

a. سمّ هرماً منتظماً واحسبْ حجمه.

b. سمّ هرماً قاعدته مثلّث قائم واحسبْ حجمه.

c. سمّ هرماً ليس منتظماً قاعدته مربّع واحسبْ حجمه.

a. الهرم الذي رأسه M وقاعدته المربّع ABCD هو هرم مُنتظم.
قاعدة الهرم مربّع طول ضلعه AB = 3 cm ، وارتفاع الهرم هو طول حرف المكعب h = 3 cm
ونعلم أن:
$$S = (\text{طول الضلع})^2$$
إذاً:
$$S = AB^2 = (3)^2 = 9\ cm^2$$
$$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 = 3 \times 3 = 9\ cm^3$$

b. هناك خيارات متعددة مثلاً: الهرم الذي رأسه G وقاعدته المثلّث ABC القائم في B.
قاعدة الهرم مثلّث قائم طول كلٍّ من ضلعيه القائمتين 3 cm وارتفاع الهرم هو طول حرف المكعب h = 3 cm
ونعلم أنّ:
$$S = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5\ cm^2$$
إذاً :
$$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times 4.5 \times 3 = 4.5\ cm^3$$

وهنا نلاحظ أن حجم هذا الهرم يساوي نصف حجم الهرم السابق.
هناك أيضاً الهرم الذي رأسه M وقاعدته المثلّث القائم و المتساوي الساقين AOB (لأنّ قطرا المربّع متناصفان ومتساويان ومتعامدان).
بحسب مبرهنة فيثاغورث في المثلّث القائم ABC نجد: $AC = 3\sqrt{2}$
إذاً:
$$AO = AB = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
إذاً:
$$S = \frac{\text{جداء الضلعين القائمين}}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}\ cm^2$$

$$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} \times 3 = \frac{9}{4} = 2.25\ cm^3$$

وهنا نلاحظ أيضاً أن حجم هذا الهرم يساوي نصف حجم الهرم السابق.

c. الهرم الذي رأسه G وقاعدته المربّع ABCD هو هرم ليس منتظماً.

قاعدة الهرم مربّع طول ضلعه $[AB] = 3\ cm$ وارتفاع الهرم هو طول حرف المكعب $h=3\ cm$

ونعلم أنّ:

$$S = (\text{طول الضلع})^2$$

إذاً:

$$S = AB^2=(3)^2 = 9\ cm^2$$

$$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 = 3 \times 3 = 9\ cm^3$$

2 هرمان حجماهما متساويان، قاعدة أحدهما مربّع طول ضلعه 9.3 cm و ارتفاعه 7.2 cm، ارتفاع الهرم الآخر يساوي ثُلث ارتفاع الهرم الأول، ما مساحة قاعدة الهرم الآخر؟

نحسب حجم الهرم الأول وليكن v_1:

$$v = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \times (3)^2 \times 7.2 = 3 \times 7.2 = 21.6\ cm^3$$

ليكن h_1 ارتفاع الهرم الآخر إذاً:

$$h_1 = \frac{1}{3} \times 7.2 = 2.4\ cm$$

وليكن v_2 حجمه فيكون:

$$v_2 = \frac{1}{3} \times s \times 2.4 = 0.8\ s$$

لكنّ حجمي الهرمين متساويان إذاً: $v_1 = v_2$ ومنه:

$$0.8\ s = 21.6$$

ومنه:

$$s = \frac{21.6}{0.8} = \frac{216}{8} = 27\ cm^2$$

3 هرم ومخروط حجماهما متساويان وارتفاعهما متساويان، مساحة قاعدة المخروط $4\ cm^2$ وقاعدة الهرم مربّع، احسب طول ضلع قاعدة الهرم.

بما أنّ حجمي الهرم والمخروط متساويان ولهما الارتفاع نفسه نستنتج أنّ مساحة قاعدتيهما متساويتان.

إذاً: مساحة قاعدة الهرم = 4 ومنه: $\sqrt{4} = 2\ cm$ = طول ضلع المربّع